LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS
500
C33r
v.30-31

OAK ST. HDSF

Digitized by the Internet Archive
in 2017 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/rozpravyceskeaka3031cesk

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.

TŘÍDA II.
(MATHEMATICKO-PŘÍRODNICKÁ.)

ROČNÍK XXX.

(1921.)

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.
1921.

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.

TŘÍDA II.
(MATHEMATICKO-PŘÍRODNICKÁ.)

ROČNÍK XXX.
(1921.)

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.
1921.

TISKEM ALOISA WIESNERA V PRAZE,
KNIHTISKAŘE ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ A ČESKÉHO VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO
V PRAZE.

509
C33r
v. 30-31

OBSAH:

Číslo

Dr. *Jan Vilhelm*: Paracorolla v květech Mimulus. (Se 4 obrázky v textu.) 1

Odolen Kodym: Stratigrafické příspěvky z jihozápadního cípu listu Praha 2

Dr. *Václav Hruška*: O nových vzorcích z theorie pfaffianů 3

J. Sobotka: O druhé indikatrix plochy v obyčejném bodě 4

Dr. *Jaroslav Milbauer* a inž. *Jan Pazourek*: Oxydace siřičitanů v koncentrovaných roztocích 5

Dr. *Vítězslav Veselý* a Ing. *Karel Dvořák*: O nahrazování skupiny diazoniové nitroskupinou. 6

Dr. *Frant. Rádl*: O nových invariantech kaskádní transformace . . . 7

E. Senft: O barevných membránách mechů z rodu Mnium. (S 6 obr. v textu.) 8

Vojtěch Rosický: Amfibolovec od Kojetína a horniny jej provázející. (S obrazcem v textu.) 9

Dr. *B. Ježek*: Nová měření chondroditu vesuvského 10

Dr. *Bohumil Němec*: O hálkách roztočů. (Se 6 obrazci v textu.) . . . 11

MUDr. *Mauric Remeš*: Eocén u Nové Bašky (Besca Nuova) na ostrově Krku (Veglia). (S mapkou v textu.) 12

Prof. Dr. *Vincenc Jarolímek*: Tři příspěvky k theorii ploch stupně druhého. (Se 2 obrazci v textu.) 13

Dr. techn. *Václav Hruška*: O elementárních dělitelích alternující bilineární formy 14

Dr. *Eduard Čech*: K diferenciální geometrii prostorových křivek . . . 15

Odolen Kodym: Poznámky ke směrným přesmykům v Barrandienu. (Příspěvek k poznání mechanismu vrásnění.) (Se 3 obrázky.) . . . 16

E. Senft: Mnioindikán. Nové rostlinné barvivo. (S 5 obrazy v textu.) 17

PhDr. *Eduard Skarnitzl*: Příspěvek k mikrochemii mléčné šťávy Asclepias syriaca Linné 18

PhDr. a Pharm. Mr. *Oldřich Tomíček*: O některých sloučeninách indolinonových 19

Dr. *Jan Vojtěch*: Otočení a souměrnost prostoru čtyřrozměrného . . 20

Dr. *Josef Klobouček*: O jistém komplexu 4. řádu G_{ab} 21

Odolen Kodym: Diabasový aplit z Housiny u Zdic v Čechách. (Se 2 obr. v textu.) 22

Dr. *Eduard Čech*: O trilineárních systémech čar na ploše a projektivní aplikaci ploch 23

B. Ježek: Nová měření antimonitu příbramského. (Se 4 obrázky v textu.) 24

Číslo
Alois Matějka: K otázce ,,vltavského zlomu“. 25
Silvestr Prát: Isolace hub z vosích hnízd (Se 4 obr. v textu.) 26
Dr. *J. Heyrovský*: Kyselina hlinitá 27
B. Ježek: Příspěvek k morfologii antimonitu z Alšaru a z Baia Sprie. (Se 6 obr.) 28
MUDr. *Jan Wolf*: Vývoj ostrůvků Langerhansových u člověka v době embryonální. (S tabulkou.) 29
Dr. *Mauric Remeš*: Zrůdnosti na korýších štramberského tithonu. (Se 7 obrázky.) 30
Dr. *Frant. Rádl*: O invariantech jisté rovnice s derivacemi parciálními lineárné 31
Dr. *Frant. Rádl*: O jisté rovnici s derivacemi parciálními lineární bez transformační řady. 32
Dr. *Vlad. Mašek*: O ploše naplněné ohnisky parabol na hyp. paraboloidu 33
M. J. Marek: Nové tvary na japonském amfibolu. (S 1 obrazcem v textu.) 34
Dr. *Boh. Ježek*: Optické konstanty některých českých nerostů 35
Dr. *Eduard Čech*: O obecné příbuznosti mezi dvěma plochami 36
Dr. *K. Teige*: K theorii zákona Lorenzova 37
Dr. *Otakar V. Srdínko*: O histologii tkáně šlachové v ohybech šlachových (Se 3 obrazci v textu a 1 tabulkou.) 38
Dr. *J. Heyrovský, H. Kadlcová a K. Stoklasová*: Roztoky hlinitanů alkalických zemin. 39
Dr. *Jan Kořínek*: O korrelační citlivosti u rostlin 40
Dr. *Silvestr Prát*: Plasmolysa Cyanophyceí 41
Quido Záruba: Geologické poměry naftového území u Papradna na Slovensku. (S 1 profilem v textu.) 42
Dr. *Radim Kettner*: O transgresích a regresích spodnosilurského moře v Čechách. (S vyobrazením v textu.) 43
Dr. *Jan Vilhelm*: Hermaphroditní útvar v abnormálním květu lilie bílé (Lilium candidum L.) (S 2 vyobrazeními v textu.) 44
Alois Matějka: O spodním siluru mezi Vinoří a Brandýsem nad Labem. (S 2 obrázky.) 45
Dr. *Bohumil Němec*: O hálkách háďátka Heterodera radicicola na cukrovce. (S 1 obr. v textu.) 46
Dr. *Z. Frankenberger*: Má mesonefros ssavčích embryí exkretorickou funkci? (S 1 tabulkou v textu.) 47
Aug. Ondřej: Čedič z Vinařické hory. (S 1 obrazcem v textu.) 48
Dr. *Radim Kettner*: Tektonické studie od Březiny sev. od Rokycan. (Se 4 vyobrazeními v textu.) 49
Karel Dusl: O důkazu obecné věty Riemann-Rochovy se stanoviska theorie funkční 50

Paracorolla v květech Mimulus.

Příspěvek k morfologii a biologii květu.

Napsal

dr. **Jan Vilhelm,**

docent university Karlovy v Praze.

(S 4 obrázky v textu.)

(Předloženo v sezení dne 5. listopadu 1920.

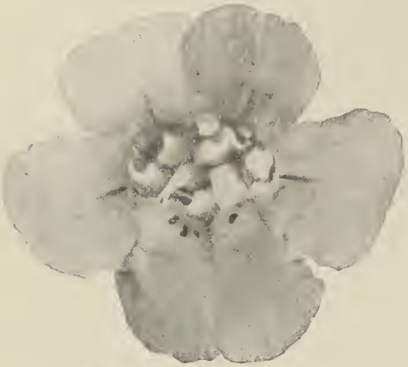
Letošního roku v polovici měsíce září obdržel jsem od p. kolegy univ. doc. dr. Artura Brožka několik plnokvětých květů *Mimulus,* které označuje jako *Mimulus tigrinoides — luteus* var. *flore pleno* Brožek,*) k studiu morfologickému, kteroužto odrůdu vypěstoval autogamií a selekcí jako druhou novou parentální linii v četných jedincích při svých genetických pokusech a studiích konaných na pokusných plochách universitní zahrady ústavu pro fysiologii rostlinnou univ. prof. dra Boh. Němce.

Kulturu této hybridní rostliny začal doc. dr. Brožek v roce 1913, a z autogamního květu obdržel v r. 1914 míšené sourozenstvo, v němž objevily se extremní případy v řadě 25ti rostlin. Mezi těmito měly 3 rostliny mimo 4 své normální tyčinky ještě petaloidní útvary považované tehdy doc. Brožkem za tyčinky petaloidní, jež byly žlutě a červeně kropenaté a opačně k petalům orientovány. V těchto květech tedy objevily se první známky znaku t. zv. „flore pleno“. Květ k autogamii pak zvolený měl celkem 6 petaloidů mimo normální tyčinky a selekce pak směřovala na vypěstění linie flore pleno. V r. 1915 objevily se v kultuře květy normální jednoduché i plnokvěté. K další kultuře byl vzat doc. Brožkem květ rostliny označený jím *Te, 16 g, 22 h* (viz vyobrazení květu) se žlutými petaly s 8 petaloidními útvary v trubce květní. Další generace ze semen tohoto květu vzešlá v r. 1916 měla u všech rostlin již

---

*) Artur Brožek: *Mosaikový míšenec Mimulus tigrinoides Hort., hybrida var. Paulina (var. nova).* Předběžná zpráva. Zvl. otisk z „Lékařských rozhledů,“, přílohy Časopisu lékařův českých 1920.

tyto nové petaloidní útvary aspoň v některých květech. V dalších letech až po letošní rok byly pěstovány plnokvěté *Mimuly* doc. Brožkem a nový útvar v květu dědičně se udržoval ve 100%. V prvních letech pokusů doc. Brožka byl ještě počet těchto petaloidů kolisavý a menší (6—10), rovněž tvar i velikost ještě byla v různém stupni vývoje. Od r. 1916 s velkou pravděpodobností může se považovati vypěstovaná nová linie doc. Brožkem za geneticky ustálenou, homozygotní pro znak t. zv. flore pleno.



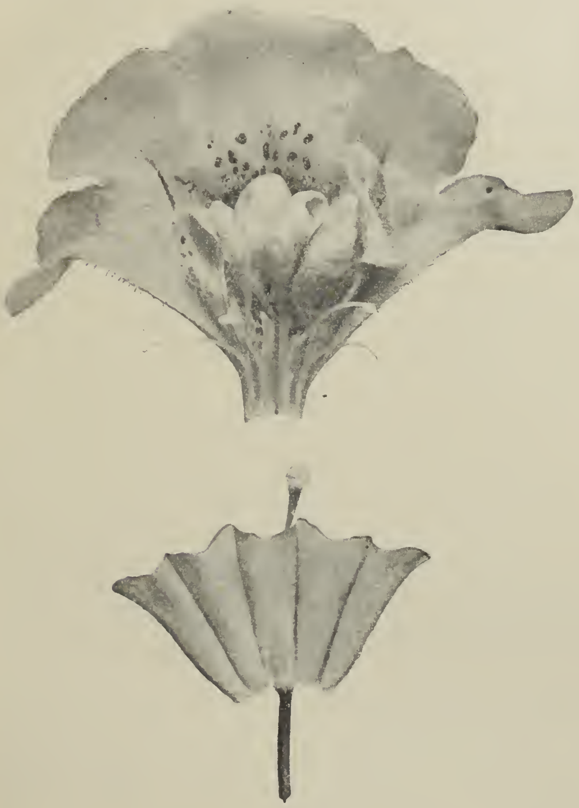
Obr. 1.

Při těchto t. zv. plnokvětých květech *Mimulus* nápadným jest vyplnění trubky korunní větším počtem plátků, jež zbarvením a kresbou úplně shodují se s trubkovitě srostlou korunou, ač zároveň v květu 4 tyčinky jsou pravidelně vyvinuty. Při podrobnějším prohlédnutí květů, po roztržení trubky korunní, jeví se nám mezi tyčinkami, přirůstajícími na dlouhých nitkách k basi trubky květní, ještě zvláštní petaloidní útvary, z nichž vždy dva a dva v mezeře mezi tyčinkami vyrůstají ze zpodu trubky korunní. Jejich velikost jest asi navzájem přibližně stejná a nemnoho přesahují ústí trubky korunní. Tvar jejich jest také skoro podobný a z dolejší úzké, skoro stopkaté base rozšiřuje se nahoře v podobě širokého, nepravidelně ohraničeného nehtu. Mimo to bývají často v hoření části vypouklé do vnitř květu. Zvláštní jest zbarvení jejich, jež jest úplně shodné s korunou, liší se jen tím, že strana obrácená do trubky korunní má stejnou kresbu a zbarvení jako protilehlá část trubky korunní (vnitřní strana), kdežto strana těchto petalů dovnitř květů obrácená úplně shoduje se se vnější stranou trubky korunní.

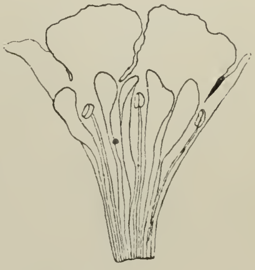
Po vyšetření postavení těchto útvarů v plánu květním shledáno, že téměř přesně staví se tyčinky mezi cípy koruny a do středu plátků korunních spadají tyto novotvary květní.

Na první pohled zdály by se tyto zvláštní plné květy *Mimulus* podobati se květům, v nichž tyčinky přeměňují se v plátky korunní, ale takové abnormální květy vyskytují se u *Mimulus* dosti často a byly doc. dr. Brožkem při jeho pokusech sledovány. Toto odlišné plemeno má však vedle vyvinutých čtyř tyčinek jako v normálních květech (jedna tyčinka zpravidla abortuje) ještě mezi tyčinkami nový útvar složený z desíti členů. Při podrobném sledování base těchto útvarů a base nitek tyčinek jest patrné, že tyčinky i tyto útvary petaloidní rovnoběžně vedle sebe sbíhají až k nejspodnější části trubky korunní a s ní v dolení části úplně srůstají. Mnohdy i některý lístek skoro do poloviny srůstá s trubkou korunní.

Morfologický význam tohoto zjevu v květu Mimulus není jiný než v některých květech jiných druhů rostlinných častěji pozorovaný, který se zvláště může dědičně udržovati v zahradnicky pěstovaných odrůdách. Zde však jeví se v jiném tvaru a proto nelze ho na první pohled ztotožňovati se známými zjevy. Tak na př. prodává se u nás velmi často v obchodech květinářských pěstovaná jihoamerická t. zv. *plnokvětá gloxinie (Sinningia speciosa)*,*) jež byla prof. E. Morren-em popsána jako odrůda. U této odrůdy plnokvěté *gloxinie* zase na zevní straně trubkovité koruny vyrůstá ještě jedna cípatá koruna (catacorolla), jež podle zbarvení jest na rub obrácena vzhledem k normální trubce korunní. Zde cípy obou korun stojí rovněž za sebou, nejsou střídavé, jak by se dalo očekávati u srostloplátečných. Stejného významu morfologického jest i paracorolla v květech *Mimulus*. Zde na rozdíl od *gloxinie* koruna se duplikuje uvnitř trubky korunní. Cípy pak této trubkovitě dole srostlé duplikatury koruny jsou podobně obrácené vzhledem k původní trubce korunní a zvláště význačným zbarvením i strukturou protilehlé části obou korun se shodují. Velenovský vykládá uvedený úkaz u *glo-*



Obr. 2.



Obr. 3.

---

*) *Bull. Acad. Belg.* 1865.

Penzig. *Miscellanea Teratologica.* 1884.

Masters-Dammer. *Pflanzen-Teratologie.* 1886, p. 509. Fig. 238.

Velenovský. *Srovnáv. morfologie.* Díl II. 1907. Str. 343 a obr. 261. — Díl III. 1910. Str. 856.

xinie jako příklad na listy dvojčepelné. Dvojčepelné listy*) mívají rovněž strany k sobě obrácené stejně vyvinuté. Podobně i Velenovským uvedené v Srovn. Morfol. příklady stipul nebo ligul u čeledi *Caryophyllaceae* možno srovnávati s naším případem u *Mimulus*, neboť i zde v těch případech, kde jsou tyto výrůstky z koruny vyvinuty zvlášť velké a plátkovité, často zbarvením svým podobají se plátku korunnímu a mají pak rub a líc podobně jako dvojčepelný list. Rovněž i tu strana lícní jest k líci petalu obrácena a rubní část pak na zevnějšek. Proto i zde ve květech *Mimulus* jsou protilehlé vnitřní části obou korun úplně podobně zbarveny i mají stejnou strukturu chloupkovitou zvláště na tmavočervených skvrnách. Také tento nový útvar v květu *Mimulus* není střídavý s korunou, jak by se dalo souditi podle pravidelného střídání kruhů květních u srostloplátečných, jen střídají se tyčinky s plátky (cípy) koruny a s těmito také nové stipulární útvary. Z toho jasně vyplývá, že tento petaloidní novotvar — paracorolla — v květu *Mimulus* náleží k původní koruně, jež mění se v korunu dvojčepelnou.

Jinak zdálo by se, že by to mohly býti přeměněné tyčinky ještě dvou kruhů následujících, snad abortovaných, jež v potomstvu znovu se přihlásily a vystoupily náhle. Tu však petaloidní jejich povaha jevila by se jistě podobnou přeměněným tyčinkám v petaly v květech abnormálních, jež se často v pěstovaných *Mimulech* vyskytují. Ani nejmenší podobnost toho jsem neshledal srovnávaje petaloidní tyčinky jiných plemen *Mimulus*.

Jiná ještě souvislost těchto nových útvarů mohla by se ještě předpokládati, nejsou-li totiž v nějaké spojitosti nebo vztahu k samotným tyčinkám. Ani v tomto případě nedal se zjistiti nějaký bližší vztah těchto vedle sebe rovnoběžně sbíhajících se obou útvarů.

Čelakovský**) zabýval se obšírně morfologickým významem a původem věnce (paracorolla) u *Narcisovitých* a rovněž nabyl mínění na základě studovaných jím abnormit, že tento věnec *narcisů* náleží k okvětí a složen jest ze srostlých listových exkrescencí okvětních listů.

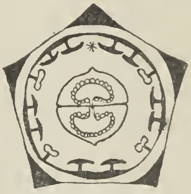
Dosud bývaly popisovány podobné abnormity v květech různých druhů nahodile se vyskytnuvší, ale v tomto případě u *Mimulus* podařilo se toto plemeno tvořící ploché emergence z koruny ze semen dále pěstovati a tento náhle nabytý znak morfologický v květu udržeti v dalších pokoleních. Toto pokusně odvozené plemeno v květech zygomorfických, vytvořivší uvnitř trubky korunní nové petaloidní útvary, podává důkaz systematice rostlinné, jak vznikati mohou nové odrůdy nebo plemena jevnosnubných a jak tyto udržují nově získané znaky děděním.

---

*) O dvojčepelných listech obšírněji pojednali: Čelakovský, A. Braun, Magnus, Eichler, Velenovský atd.

**) *O významu a původu věnce (paracorolla) Narcisovitých*. Rozpr. Čes. Akad. Ročn. VII., tř. II., č. 13.

Zajímavé jest také sledování postavení těchto stipulárních výrostků korunních v celém diagramu květním. Vždy přesně dva stipulární výrostky vedle sebe vyrůstají na lístku korunním. Kde srůstají korunní plátky, tam přirůstají dole k trubce korunní tyčinky, střídajíce se takto pravidelně s korunními plátky. Mezi dvěma hořeními plátky v pravidelném květu *Mimulus* bývá zpravidla abortovaná tyčinka. I tu v tomto novém plemeni nebývá tyčinka vyvinuta mezi novými stipulárními útvary, jen ve dvou květech bylo vyvinuto pravidelně všech pět tyčinek. Nejlepší přehled postavení těchto zvláštních květů podá nám diagram květu.


Obr. 4.

Význam této duplikatury koruny u *Mimulus* na celkové složení květu nutno vyložiti takto: vytvoření nového cyklu koruny vzniklé zdvojením koruny projevilo se náhle, a v mutantu se zase objevily převládající původní dosud latentní disposice k vytvoření pelorického pentacyklického květu. Tento nový květ *Mimulus* nelze však považovati za pentacyklický, ač jeví na pohled zdání pentacyklického květu na rozdíl od původního tetracyklického. Kdyby se jednalo o skutečně nový cyklus v květu, tu by dle pravidel o střídání členů měl se nový cyklus střídati s tyčinkami. To bychom sice zde měli, ale jiná otázka jest, odpovídá-li tento vsunutý cyklus se zdvojeným počtem členů druhému (vnitřnímu) cyklu tyčinek. Po bedlivém prozkoumání vyvinutých květů není možno tento fakt zjistiti, neboť vzrůstem mohou se snadno posunouti orgány těsně vedle sebe stojící, zaujímající místo, jež tu jest volné. Při rozboru několika vyvinutých květů, které jsem měl k disposici, nabyl jsem přesvědčení prohlédnutím všech petaloidních částí nového cyklu květního, že neodpovídají tyčinkám, ani nelze tyto útvary srovnávati s petalisovanými tyčinkami, jež mohl jsem studovati z květů jiné rasy *Mimulus* pěstěné p. doc. dr. Brožkem. Také nikde jsem nenalezl zbytků po prašnících na těchto petaloidních útvarech. Charakter nových plátků korunních odpovídal však úplně koruně, podržuje nejen zbarvení její, ale i strukturu chloupků na skvrnách temně červených. Nový cyklus koruny vzniklý z její duplikatury dle svého původu nemůže se tedy střídati s korunními plátky, nýbrž staví se těsně za plátky korunní a mezi tyčinky, s nimiž pravidelně alternuje.

Jiným důkazem, že nové petaloidní útvary nepatří k tyčinkám, jest jejich výzkyt i mezi hořeními plátky kolem abortované tyčinky. Vyvinují se pravidelně i tam, kde tyčinka zpravidla se nevyskytuje.

Význam nových korunních lístků z hlediska srovnávací morfologie byl již v předu vyložen, zbývá ještě zmíniti se krátce o jejich biologickém významu.

Biologický účel této paracorolly nebo stipulárních emergencí, jež vyplňují celou prostoru vnitřní trubky korunní, je snadno pochopitelný. Zbarvené plátky nové, obrácené k trubce korunní, s kterou mají také úplně shodnou strukturu zvláštní (tmavočervené skvrny na žlutém podkladě s dlouhými chlupy), slouží očividně k zvýšení funkce trubky koruní.

Koruna chrání všeobecně rozmnožovací ústroje proti vnějším vlivům; zvláštní pak zbarvení její má účel jednak vedle lákání hmyzu i ukazování cesty k rozmnožovacím ústrojům. Proto skvrny tmavočervené jsou zvláště tu vyvinuty na plátcích, zejména na určitých místech jejich, směřujících hlavně k prášníkům tyčinek. Dlouhé chloupky právě vynikající z červených skvrn však ukazují, že přístup do květů se jimi zabraňuje hmyzu, který nemůže spolupůsobiti na opylení květu. Proto tyto nové útvary korunovité zřejmě zvyšují funkci koruny při opylení hmyzem. Tyčinky v těchto plnokvětých *Mimulech* jsou skryty mezi novými korunními plátky a hmyz (včely)*) musí je hledati, kdežto čnělka s bliznami vyniká trochu z květu nad ústí trubky a nad nové plátky. Jest tedy čnělka s bliznou více odloučena od přímého styku s prašníky tyčinek a tím autogamii v květu tohoto plemene *Mimulus* se zabraňuje.

U *Mimulus* byla již dříve známa všeobecně polyphilie květní.**) Jako zvláštnost zahradnického umění vypěstována rasa s kalichem petaloidním, korunovitě zbarveným,***) takže rostlina měla také na pohled zdánlivě dvojitou korunu. I tento zjev má biologicky dosti podobný význam jako u našeho případu, ač morfologicky obě přeměny v květech Mimulus jsou zcela rozdílné.

Za poskytnutí materiálu k této práci i za orig. fotografické snímky vzdávám p. kol. doc. dru A. Brožkovi vřelý dík.

Výklad vyobrazení v textu.

Obr. 1. Pohled shora na květ, uvnitř trubky korunní paracorollní plátky. Fotogr. doc. Brožek.

Obr. 2. Týž květ. Roztrhnutá trubka korunní; vnitřní strana s tyčinkami a paracorollními plátky; dole roztrhnutý kalich, se semeníkem, čnělkou a bliznami. Fotogr. doc. Brožek.

Obr. 3. Část roztržené trubky korunní s tyčinkami a paracorollou.

Obr. 4. Diagram květu.

---

*) Paul Knuth: *Handbuch der Blütenbiologie.* II. Bd., 2. Teil. Leipzig 1899. str. 155.

**) Masters-Dammer: *Pflanzenteratologie.* 1886., str. 420.

***) Bull. Acad. Belg. XIX. part. 2. str. 93.

Stratigrafické příspěvky z jihozápadního cípu listu Praha.

Podává

Odolen Kodym v Praze.

(Předloženo dne 19. listopadu 1920.)

Tyto řádky jsou doplňkem ke zprávám, týkajícím se hlavně tektoniky z území *údolí Prokopského* a *Přídolí,* jež jsem podal v Rozpravách. Ve své tektonické studii z údolí *Prokopského*[1]) podal jsem sice výčet jednotlivých útvarů a krátkou jejich charakteristiku, avšak omezil jsem se pro nedostatek místa na míru nejmenší. Ve své zprávě o okolí Slivence[2]) byl jsem nucen pominouti i tyto stručné poznámky stratigrafické a omeziti se ve svém pojednání toliko na tektoniku. Ač jsem část svých pozorování stratigrafických z tohoto území již publikoval, stalo se tak jen v pracích širšího rámce a spíše příležitostně, kdežto detailního popisu, třeba stručného, jsem nepodal. Bohužel i rozsah této zprávy nutí mě k stručnosti.

Geologickou mapu území, o němž pojednávám, podal jsem v obou svrchu citovaných pracích.

* * *

Starší paleozoikum.

Zvrásněné starší paleozoikum uloženo jest do brachysynklinály, jejíž osa probíhá ve směru *h* 4 (vsv-zjz) přes *Holín* a *Hlubočepy* na levém břehu Vltavy. V této práci budu se zabývati *jižním křídlem* Barrandienu na levém břehu vltavském v rozsahu listu „*Praha*“ vojenských map v měřítku 1 : 75.000. Jelikož starší paleozoikum jest z velké části přikryto útvary pokryvnými (křídou, štěrky a hlínou) a vystupuje hlavně v příkrých stráních údolních, budeme se zabývati výhradně Přídolím a levým bokem vltavského údolí od Hlubočep až na jih od Velké Chuchle.

---

[1]) O. Kodym: Tektonická studie v údolí Prokopském a jeho okolí u Prahy. Rozpravy Č. Ak. XXVII. č. 6, Praha 1919.

[2]) O. Kodym: Tektonika staršího paleozoika v okolí Slivence, zejména v Přídolí, jižně od Prahy. (S mapou a 2 profily). Rozpravy č. Ak. XXIX. č. 25.

Nejstarším pásmem vystupujícím v této krajině je *d* ζ, *vrstvy zdické*[3]), jež budují valnou část úbočí v údolí vltavském jižně od *M. Chuchle* a asi jižní třetinu odkrytého staršího paleozoika v *Přídolí*. Spodní část vrstev zdických, *břidlice králodvorské d* ζ_1 jsou jílovité, velmi často slídnaté, měkké, rozpadají se obyčejně v tenké lupénky velikosti 1—2 *cm*², rovné a hladké. Drobových vložek v nich není. Barva těchto břidlic je temná, černá neb tmavo-hnědá, při větrání hnědnou. Svrchní *křemence kosovské d* ζ_2 skládají se z lavic křemencových, mocnosti od ½ *dm* do ½ *m*, mezi nimiž bývají různě mocné proplástky břidličné. Tyto břidlice z křemenů kosovských jsou oproti břidlicím kralodvorským *d* ζ_1 vždy tvrdší, v této krajině málo slídnaté, pevnější; rozpadají se často kulovitě, jevíce odlučnost podle pecek, tak jako tomu bývá u břidlic dalejských *g* β. Barva těchto břidlic bývá vždy šedo- nebo olivově zelená, pukliny bývají zbarveny tmavohnědě. Křemence v nich uložené přecházívají do pískovců, jejich barva jest buď světlá, šedobílá nebo žlutá, a nebo tmavší, šedozelená. Nejpěknější odkryv ve vrstvách zdických jest jižně od V. Chuchle u záp. dráhy. Králodvorské břidlice vystupují na severovýchod od koty 232 u *Velké Chuchle*, odkryty jsouce podél cesty z Chuchle k Waltrově zahradě. Postupujeme-li směrem k jihu, uvidíme zcela zřetelně ve stráni zlom, za nímž jsou vyvinuty vých. od 232 kosovské křemence v pěkných lavicích. *Králodvorské břidlice* jsou kromě toho odkryty sev. od 232 ve vesnici *Velké Chuchli* při začátku cesty do *Lochkova*.

Hranice pásma d ζ *oproti vrstvám zahořanským d* ε jsou velmi nezřetelné a nebyly nikdy ani paleontologicky ani petrograficky určitěji stanoveny. Vésti určitou mez petrografickou jest velmi těžko, jelikož drobové vložky ve svrchní části nučických vrstev *d* ε_2 vymizí, břidlice stanou se slídnaté, tmavé až černé, měkké, tak že přecházejí do *d* ζ_1 zcela povlovně. Vápencové lavice, které na přechodu mezi oběma pásmy jsou vyvinuty na pravém břehu vltavském, opakují se v několika polohách nad sebou a byly určeny jednou za *d* ε, jednou za *d* ζ. Proto je mapující geolog vždy na rozpacích, má-li obě pásma oproti sobě ohraničiti. Hranice paleontologické jsou však právě tak nezřetelné, neboť pozná-li paleontolog svrchnější polohy vrstev zdických od spodních poloh vrstev zahořanských, jest na přechodu obou pásem rovněž v nejistotě, ke kterému z nich má tu neb onu zonu přičísti. Tato nejistota při paleontologickém určování hranic mezi *d* ε a *d* ζ jest zaviněna ve značné míře též tím, že většina paleontologických nalezišť pásma zahořanského náleží spodnímu oddělení vrstvám chrustenickým *d* ε_1 (Trubín, Vinice) neb spodním vrstvám nučickým (Zahořany, Nučice atd.), kdežto ve vrstvách zdických bylo sbíráno v polohách středních a nejvyšších.

---

³) Užívám nového označování vrstev v Barrandienu. Srovnej: R. Kettner-O. Kodym, Nová stratigrafie Barrandienu. Čas. Mus. 1919. Praha.

Z přechodních zon mezi $d\,\varepsilon$ a $d\,\zeta$ máme toliko seznamy zkamenělin z Bohdalce, z Pernikářsky a j. z okolí Prahy, jež však jsou rázu výminečného, útesového. — Ve spodním oddělení vrstev králodvorských sbíral v našem území Želízko[4]), jenž uvádí z *V. Chuchle,* patrně z místa sev. od koty 232 celkem 31 druhů zkamenělin a soudí na základě tohoto seznamu, že tyto vrstvy náleží pásmu zahořanskému. Nepřiklonil jsem se k tomuto názoru, poněvadž jednak mám určité pochybnosti o seznamu fauny Želízkem uváděné, (zejména pokud se týká graptolitů (Diplograptus), jež jsem na tom místě našel), jednak pokládám za správnější zrevidovat seznam druhů vystkytujících se ve vrstvách zahořanských a zdických podle seznamu Želízkova a čítati naleziště Chuchelské dále k $d\,\zeta$. Neboť důvody tektonické i petrografické mluví pro vrstvy zdické (srovnej mapu pojednání l. c. 2.), a kromě toho břidlice z Velké Chuchle byly vždy za $d\,\zeta$ pokládány a hranice oproti $d\,\varepsilon$ byly vedeny níže. Téhož názoru jsou i jiní odborníci geologové.

Svrchní silur začíná ostře od podloží oddělenými *vrstvami liteňskými* $e\,\alpha$. O stratigrafii těchto vrstev bylo pojednáno již dříve[5]), rozšíření těchto vrstev je patrno z map v obou pojednáních [l. c. 1. a 2)]. Zmiňuji se toliko o některých mnou opětně vykořistěných nalezištích zkamenělin, výhradně graptolitů.

„*Kolonie Haidinger*“ nad zahradami Walterovými jest nejspodnějším oddílem vrstev liteňských a náleží k břidlicím želkovickým $e\,\alpha_1$. Vyvinuty jsou tu zony s *Rastrites peregrinus Barr.* s *Rastrites linnei Barr.* a s *Monograptus Turriculatus Barr.*, břidlice jsou tu tmavošedé, slídnaté, v zoně druhé a třetí tmavší, téměř černé. Graptolity jsou světlejší, tuhově lesklé. Velmi hojné druhy graptolitů z této „kolonie“ uvádí Perner ve svém díle.[6])

Kolonie Krejčí jižně od *V. Chuchle* jest vyvinuta v podobě hnědých jílovitých měkkých břidlic motolských $e\,\alpha_2$, které chovají veliké koule vápencové. Přesmyk Krejčího jest nyní právě ve stráni odkryt, tak že jest možno změřiti tam jeho směr *h* 4; motolské vrstvy kolonie Krejčí náleží zoně s *Cyrtograptus murchisoni Carr.* a zoně s *Monograptus riccartonensis* Lapworth, čemuž svědčí nalezené graptolity, zejména

Monograptus priodon Bronn.
Monograptus vomerinus Nich.
Cyrtograptus murchisoni Carr. pro zonu prvou a
Monograptus dubius Suess. pro zonu druhou.

---

[4]) J. V. Želízko: Spodní silur v okolí Radotína a Velké Chuchle. Věstník Kr. Č. Společn. Nauk 1906, Praha.

[5]) Srovnej: J. Perner-O. Kodym: Rozčlenění svrchního siluru v Čechách. Čas. Musea 1919, Praha.

[6]) J. Perner: Studie o českých graptolitech IIIa. Paleontographica Bohemiae IIIc. Praha 1897.

Odkryv v *e α* za *nádražím v Chuchli*, vklíněný do vrstev zdických, náleží zoně *Cyrtograptus murchisoni Carr.* Břidlice jsou tam poněkud, ač nepatrně kontaktně změněny, mají barvu tmavohnědou až černou a chovají četné graptolity, zejména: *Monograptus priodon* Bronn, *Monograptus vomerinus* Nich, *Monograptus latus* M'Coy, *Monograptus kettneri* n. sp., *Cyrtograptus murchisoni* Carr, *Cyrtograptus purkyněi* n. sp., *Retiolites geinitzianus* Barr. a j.[7])

Na známém nalezišti *Vyskočilce* u Chuchle jsou vyvinuty a přístupny téměř všechny zony pásma *e α*, zejména však zona s *Cyrtograptus murchisoni* Carr. a *Monograptus riccartonensis* Lapw. Seznam druhů z této lokality uvedu zvláště při jiné příležitosti.

Vápence budňanské e β jsou v Přídolí vyvinuty abnormálně v podobě dolomitu. Ačkoliv dolomitické vápence jsou v tomto pásmu známy i odjinud, přece je Přídolí jediným místem, kde v *e β* jsou čisté dolomity, celistvé, barvy žluté lomu tříštnatého se zbytky zkamenělin, zejména orthocerů, a hojnými dutinami vyplněnými látkami živičnými a uhelnými. O tomto thematu psali Katzer, Jahn, Petrascheck a Slavík, k jejichž pracem odkazuji. — Dolomit přídolský jest těžen po hornicku Pražskoželezářskou společností. Vystupuje v několika tektonických pruzích na severním křídle brachysynklinály v Přídolí severozáp. od koty 299 a pak u vržení bránického v témže údolí v sousedství *g α* u Slivence. Mocnost tohoto pásma odhaduji asi na 30—40 *m*.

Vápence budňanské *e β* přecházejí pozvolna do *vápenců lochkovských e γ*, jež se vyznačují rohovcovými konkrecemi. Pásmo *e γ* vystupuje na dvou místech. *U Barrandeovy skály* a pak v *Přídolí* v brachysynklinále u koty 299. Na místě prvém jsou tyto vápence zvrásněny do známých vrás, tak že nelze tam konati pozorování stratigrafická, zejména proto, že není odkryto ani podloží těchto vápenců, jsouc porušeno poklesem *bránickým*[8]) a petrograficky neliší se tyto vápence z Barrandeovy skály podstatně od vápenců v lokalitě druhé. Na druhém ze jmenovaných míst jsou však vápence lochkovské velmi pěkně vyvinuty a odkryty u silnice z *V. Chuchle* do *Slivence* proti vápence. Tam můžeme sledovat celý sled vrstvami od *e γ* do *g α* asi takto:

Vápence lochkovské *e γ* jsou tmavošedé v lavicích asi 2 *dm* mocných, někdy silnějších, někdy slabších, jemně krystalické. S těmito vápenci střídají se vložky břidlic a břidličných vápenců barvy hnědé až černé; břidlice jsou jílovité neb slinité. Časté střídání břidlic a vápenců v tomto pásmu a poměrně malá mocnost lavic vápencových způsobuje, že vrstvy lochkovské jsou snadno vrásnitelny, jevíce zřetelné stopy vrásnění odlučného, diskordantního. Vápence bývají pak často rozpukány v jednotlivé hranoly. Rohovce tohoto pásma tvořívají vložky, u nichž dva rozměry převládají, tedy jakési vrstvy, a to tak, že některá lavice vápencová je rohovcovou vložkou prostoupena, několik jiných lavic rohovců nechová. Tím liší se rohovce tohoto pásma dosti značně od rohovců vápenců zlíchovských $g\,\alpha_3$. Barva rohovců pásma $e\,\gamma$ v Přídolí je černá. Mocnost vápenců lochkovských odhaduji na 50 *m*.

---

[7]) Nové druhy graptolitů hodlám v nejbližší době popsat.

[8]) Srovnej l. c. 1. a l. c. 2.

Směrem k nadloží stávají se v Přídolí vápence lochkovské krystaličtější, světlejší, rohovce i břidličné vložky vymizejí a přecházejí do vápenců kosořských. Vápence kosořské f jsou ekvivalentem vápenců koněpruských,9) představujíce jejich neútesovou facii. Lavice těchto vápenců jsou poněkud silnější (průměrně 2—4 *dm*), barva světle šedá, jsou zrnité, chovají však vložky hruběji krystalické. Jejich trhliny jsou vyplněny hojným sekundárním vápencem. Směrem do nadloží stávají se celistvější, tak že ve svrchní třetině jejich nelze již mluvit o jejich zřetelné zrnitosti. Konečně objevují se mezi jednotlivými lavicemi vápencovými vložky břidlic slinitých, mocné 1—3 *cm*, lavice vápencové jsou tam pak mocné jen asi 1 *dm*, lom stává se tříštnatý a barva modrošedá. Touto petrografickou změnou dán jest pozvolný přechod pásma f do vápenců bránických $g\,\alpha$.

Z vápenců bránických jsou v Přídolí vyvinuty toliko nejstarší vápence dvorecké $g\,\alpha_1$. Z pásma předešlého vyvíjejí se zcela pozvolna tím, že břidličné vložky stávají se hojnější, lavice kompaktního vápence naopak slábnou; barva těchto vápenců jest modrošedá, jsou úplně celistvé, lomu tříštnatého, při větrání šedozelené. Pro vápence dvorecké jest význačný jejich uzlovitý sloh, vznikší tím, že velmi četné břidličné vložky oddělují od sebe partie celistvého vápence.

Jak patrno z popsaného sledu vrstevního, není v Přídolí stratigrafického hiatu mezi vápenci lochkovskými $e\,\gamma$ a devonem, jenž začíná vrstvami kosořskými, neboť vrstvy všude do sebe zcela pozvolna přecházejí. Jest tedy nesporno, že mezi vápenci lochkovskými a bránickými jest ekvivalent pásma f vyvinutého v podobě útesových vápenců koněpruských, a ekvivalent mramorů sliveneckých, jež náleží ke spodu etaže $g\,\alpha$.10) Vápence kosořské (tímto jmenem označuji svrchu popsané vápence, jež pokládám za ekvivalent vápenců koněpruských) nepřítomností rohovců a svou petrografickou povahou nejvíce se blíží vápencům koněpruským,

---

9) Srovnej: l. c. 5., l. c. 3. a O. Kodym: Slivenecké mramory a jejich poměr k vápencům bránickým (G-g_1). Rozpravy Čes. Ak. 1919. Praha.

10) Slivenecké mramory kladl Katzer do středu etaže $g\,\alpha$ (Geologie von Böhmen, Praha 1892 a j.). Kettner zjistil, že leží pod hlíznatými vápenci bránickými a přičetl je k etaži f (R. Kettner: Příspěvek ku stratigrafii bránických vápenců ($G\,g_1$) atd. Rozpravy Čes. Ak. 1917, Praha). O Kodym zjistil, že mramory slivenecké jsou totožné s vápenci měňanskými a označil je za $f_2\,\beta$ proti vápencům koněpruským, jež označoval za $f_2\,\alpha$ (l. c. 1.) a O. Kodym, Pásmo $F f_2$ na pravém břehu Berounky. Rozpravy Čes. Ak. 1918, Praha. Konečně Týž označil je za ekvivalent vápenců dvoreckých (O. Kodym: Slivenecké mramory a jejich poměr k vápencům bránickým (G-g_1). Rozpravy Čes. Ak. 1919, Praha.

a vápence dvorecké odpovídají pak mramorům sliveneckým. Je tedy z uvedeného sledu vrstevního patrno, že i stratigrafické poměry v Přídolí svědčí mému názoru o útesových a neútesových faciích v českém devonu, proslovenému v práci o sliveneckých mramorech (l. c. 9). *Přídolí* jest podle toho lokalitou, kde *vertikální rozšíření útesů v devonu* jest *nepatrné*, neboť vrstvy tamní náleží *neútesové facii i v těch horizontech, kde na jiných místech jsou vyvinuty útesy.* Přes to ovšem nejlepším důkazem mého názoru zůstává zjištěný horizontální přechod z mramorů sliveneckých do vrstev dvoreckých a z vápenců kosořských do koněpruských v nedalekém údolí radotínském a podobnost určitého na facii méně vázaného dílu fauny mezi korespondujícími faciemi a pásmy.

Pokud se týče pásma $g\,\alpha$, je v Přídolí pozoruhodno, že chovají vápence dvorecké jedinou vložku rohovcovou a to u koty 323 u silnice. Je to jediný dosud známý příklad, kde rohovce vyskytují se v $g\,\alpha_1$. Na tento zjev upozornil již Kettner.[11])

Profil mezi *Barrandeovou skálou a Zlíchovem* byl popsán Kettnerem [(l. c. 11.)], doplňuji jej toliko pokud se týče *pásma f* a *mramorů sliveneckých.* Nad svrchními hranicemi rohovců pásma $e\,\gamma$ vyvinuty jsou vápence zvolna se vyvíjející z podloží, jež je těžko označiti, neboť leží asi mezi vápenci *koněpruskými* a *kosořskými*, jsouce zvláště v polohách vyšších zrnitější, nežli tyto, avšak ne tak, jak bývají normální vápence koněpruské. Jsou tedy tyto vápence *přechodní útesovou facií pásma f k vápencům kosořským.* V nadloží těchto vápenců jsou vyvinuty *mramory slivenecké* v nepatrné mocnosti, přecházející do *vápenců dvoreckých.* Z toho patrno, že místo u Barrandeovy skály bylo na kraji spodnodevonských útesů, neboť tam facies útesová vyvinuta jest, ovšem jen v mocnosti nepatrné a ne v typické formě.

O pásmu $g\,\beta$, $g\,\gamma$ a *h* netřeba se zvláště zmiňovati.

* * *

Útvar křídový.

Útvar křídový *transgreduje diskordantně přes zvrásněné starší paleozoikum, jest nezvrásněný a jeho transgresní plocha pohybuje* se většinou málo *nad vrstevnicí 300.* V této práci jde o křídu na pláni slivenecké mezi údolími Prokopským a radotínským. Stratigrafi tohoto útvaru v okolí pražském v západním Povltaví zabýval se Břetislav Zahálka[12]), k jehož práci odkazuji. Zároveň podotýkám, že se přidržuji rozdělení české křídy podle Č. Zahálky na 10 pásem, jelikož jsem je shledal dosud správnými.[13])

---

[11]) R. Kettner: Příspěvek ku stratigrafii bránických vápenců (G-g_1) nejbližšího okolí pražského. Rozpravy Čes. Ak. 1917.

[12]) Břetislav Zahálka: Křídový útvar v záp. Povltaví. Věstník čes. spol. Nauk 1911, XXIII., II. třída, Praha.

I. pásmo křídového útvaru je vyvinuto v podobě pískovců a slepenců jemno- i hrubozrnných, skládajících se výhradně z valounů křemenných, s tmelem *kaolinickým* (pak jsou šedobílé) nebo *železitým* (jsou-li hnědé). Tyto pískovce se střídají s vložkami *jílů* a lupků v polohách nižších. Jíly jsou světle šedé nebo téměř bílé a chovají v sobě hojné *zbytky suchozemských rostlin.* Jíly jsou ohnivzdorné a dobývají se k účelům technickým. K I. pásmu křídy náleží patrně též štěrky u koty 335 na silnici ze *Slivence* do *Prahy* a na hřbetu *Habrová,* jež jsem patrně chybně pokládal za říční štěrky třetihorní. Nejpěknější odkryvy v tomto pásmu jsou jámy na jíl a lupky perucké, vých. od *Slivence* sev. od koty 299 a zašlá jáma na kraji lesa mezi kostelem sv. Jana a kotou 331 jihozáp. od *M. Chuchle.* Jiné odkryvy jsou na horním konci *Hergetovy rokle* jižně od Hlubočep, kdež je rovněž dobýván jíl. Tyto odkryvy poskytly hojnou floru křídovou.

II. pásmo jesť nepatrně mocné a nebylo proto v terénu nalezeno, neboť se ztratilo při špatných odkryvech v rozrušených píscích z pásma I.

Zajímavé jest však zjištění zbytku *III. pásma* na silnici ze *Slivence* do *Prahy,* vých. od koty 350. Jsou to semické slíny, odkryté v příkopu silničním, jež mají svou důležitost jakožto *nejjižnější zjištěný zbytek mořské transgresse křídové* v okolí Prahy.

Křídový útvar uložen je vodorovně, avšak jeho transgresní plocha je velmi nerovná. Tyto nerovnosti jsou nejlépe patrny u Slivence v *Přídolí*[1]) severozápadně od koty 328, kde dobývají perucké lupky v údolí, jehož stráň je budována vápenci bránickými *g α*. Jelikož každá porucha tektonická v tom místě je vyloučena, jest nám přičísti tyto nerovnosti morfologickému *utváření paroviny,* do jejichž *depressí vnikly sladkovodní usazeniny křídové.*

Ostatní útvary pokryvné.

Na své mapě značím rozsáhlé uloženiny *štěrků třetihorních,* jež přičítám dvěma stadiím, *klineckému* a *zdibskému.*[15]) Stadium prvé vyvinuto je u *Slivence* na kotách 351 a 350, stadium druhé u *Lochkova* a mezi *Velkou* a *Malou Chuchlí.* O těchto štěrcích netroufám si však tvrditi s plnou určitostí, že náleží útvaru třetihornímu a zvláště jejich omezení nelze provésti přesně, neboť se neliší svou petrografickou povahou od sedimentů křídových, které v samé blízkosti vystupují; část těchto štěrků snad vznikla splavením a rozrušením peruckých vrstev. Přesto pokládám třetihorní stáří těchto štěrků za pravdě nejpodobnější.

---

[13]) O Zahálkově parallelisaci české křídy s cizí se nevyslovuji.

[14]) Na toto místo upozornil již R. Kettner. Srovnej l. c. 11.

[15]) Srovnej O. Kodyma A. Matějka: Geologicko-morfologický příspěvek k poznání štěrků a vývoje říčních toků ve středních Čechách. Sborník Čes. spol. zeměvědné 1920, Praha.

Diluviální terasy, pokud jsou v tomto území vyvinuty, jsou v normálních výškách a odpovídají zcela terasám Purkyňovým. Rozsáhlé ssuti a hlíny tvoří se hlavně *zvětráváním a rozpadem hornin útvaru křídového*, toliko z nepatrné části též rozrušením staršího *paleozoika*.

* * *

Účelem této práce bylo podati stratigrafické poznámky k mé tektonické studii z okolí Slivence a popsati sled vrstevní staršího paleozoika, hlavně v *Přídolí*, neboť jsem se již několikráte dovolával stratigrafických poměrů na této lokalitě, ač nebyla popsána detailněji. Svému účelu tato práce doufám vyhoví.

Geologický ústav
českého vysokého učení technického v Praze.

ROČNÍK XXX. TŘIDA II. ČÍSLO 3.

O nových vzorcích z theorie pfaffianů.

Napsal
Dr. **Václav Hruška,**
soukr. docent čes. vys. učení technického v Praze.

(Předloženo dne 19. listopadu 1920.)

1. Mějme pseudosymmetrickou matici

$$\| a_{i\,k} \| \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2\,n)$$

$$a_{i,\,k} = -\,a_{k,\,i}, \quad a_{i,\,i} = 0$$

a buď $i_1\,i_2\ldots i_{2n}$ nějaká permutace prvků 1, 2, ... $2\,n$. Součin

$$a_{i_1\,i_2}\,a_{i_3\,i_4}\ldots a_{i_{2n-1}\,i_{2n}}$$

se nemění, zaměníme-li v něm činitele, a změní pouze znamení, zaměníme-li oba indexy téhož činitele. Utvoříme-li tedy všech $(2\,n)!$ součinů odpovídajících všem $(2\,n)!$ možným permutacím prvků 1, 2, 3, ... $2\,n$, seznáme, že vždy $2^n\,.\,n!$ součinů bude stejných, nebo stejných opačně znamenaných. Všechny ony permutace, pro něž má součin $a_{i_1\,i_2}\,a_{i_3\,i_4}\ldots a_{i_{2n-1}\,i_{2n}}$ tutéž hodnotu nebo tutéž hodnotu s opačným znaménkem, nazýváme equivalentními. S libovolnou permutací jest vždy $2^n\,n!$ permutací equivalentních, permutaci danou v to čítajíc. Celkem pak jest

$$N = \frac{(2\,n)!}{2^n\,.\,n!} = 1\,.\,3\,.\,5\ldots(2\,n-1)$$

neequivalentních permutací.

Výraz

$$P = (1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2\,n) = \sum_N\,(-1)^J\,a_{i_1\,i_2}\,a_{i_3\,i_4}\ldots a_{i_{2n-1}\,i_{2n}}$$

kde J značí počet inversí v permutaci i_1, i_2, ... i_{2n} a součet se vztahuje na všech N neequivalentních permutací, sluje pfaffianem o $2\,n$ indexech.

Platí pak[1])

$$P^2 = |\,a_{i,\,k}\,| \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 2\,n).$$

Jsou-li $j_1, j_2, \ldots j_{2n}$ libovolná čísla, tu symbolem $(j_1\,j_2\ldots j_{2n})$ rozumíme výraz, který vznikne z $(1, 2, \ldots 2\,n)$, píšeme-li místo k j_k.

---

[1]) E. von Weber, Vorles. ü. das Pfaffsche Problem, str. 20.

2. O pfaffianech platí následující poučky:

a) Pfaffian $(1, 2, 3, \ldots 2n)$ jest lineární homogenní funkcí elementu kterékoliv řádky (sloupce) matice $\| a_{ik} \|$ $(i, k = 1, 2, \ldots 2n)$.

b) Záměnnou dvou indexů mění pfaffian znaménko. Neboť záměnou dvou indexů $i_1, i_2, \ldots i_{2n}$ mění se parita J.

Jsou-li dva z indexů $j_1, j_2, \ldots j_{2n}$ rovny, jest tedy hodnota pfaffianu rovna nule.

Odtud pak vychází, je-li $k_1, k_2, \ldots k_{2n}$ libovolná permutace prvků $1, 2, 3, \ldots 2n$ a K počet inversí v ní, že jest

$$(k_1\, k_2 \ldots k_{2n}) = (-1)^K (1, 2, \ldots 2n).$$

c) Jelikož pro všechny eqvivalentní permutace má součin

$$(-1)^J a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} \ldots a_{i_{2n-1} i_{2n}}$$

stejnou hodnotu, můžeme též psáti, že

$$P = (1, 2, \ldots 2n) = \frac{1}{2^n . n!}, \sum_{(2n)!} (-1)^J a_{i_1 i_2} a_{i_5 i_4} \ldots a_{i_{2n-1} i_{2n}} \ldots \ldots (1)$$

kde součet se vztahuje na všech $(2n)!$ možných permutací indexů $1, 2, 3, \ldots 2n$.

3. Buďte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\nu}$ libovolných $2\nu < 2n$ indexů vzatých z $1, 2, 3, \ldots 2n$ v libovolném pořádku. Označme $2\lambda = 2n - 2\nu$ a $\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_{2\lambda}$, buďte ostatní z indexů $1, 2, \ldots 2n$, a $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2\lambda}$ buď libovolná permutace prvků $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{2\lambda}$. Pak koeficient při $a_{\alpha_1 \alpha_2} a_{\alpha_3 \alpha_4} \ldots a_{\alpha_{2\nu-1} \alpha_{2\nu}}$ v rozvoji $P = (1, 2, \ldots 2n)$ rovná se

$$\sum_{N'} (-1)^J a_{\beta_1 \beta_2} a_{\beta_3 \beta_4} \ldots a_{\varrho_{2\lambda-1} \beta_{2\lambda}}$$

kde J značí počet inversí v permutaci

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu}\, \beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_{2\lambda}$$

a součet se vztahuje na všech $N' = 1 . 3 . 5 \ldots (2\lambda - 1)$ neequivalentních permutací $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_{2\nu}$ prvků $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{2\lambda}$.

Je-li A počet inversí v permutaci $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu}$, B počet inversí v permutaci $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_{2\lambda}$, tu jest

$$J = A + B + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2\nu} - \frac{2\nu(2\nu + 1)}{2}$$

V rozvoji $P = (1, 2, \ldots 2n)$ rovná se tedy koeficient při $a_{\alpha_1 \alpha_2} a_{\alpha_3 \nu_4} \ldots a_{\alpha_{2\nu-1} \alpha_{2\nu}}$

$$(-1)^{A + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2\nu} - \nu} \sum_{N'} (-1)^B a_{\beta_1 \beta_2} a_{\beta_3 \beta_4} \ldots a_{\beta_{2\lambda-1} \beta_{2\lambda}} =$$
$$= (-1)^{A + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2\nu} - \nu} (\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{2\lambda}).$$

III.

Označme tento výraz stručně $P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu}}$. Patrně se tento výraz rovná

$$\frac{\partial^\nu P}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2} \partial a_{\alpha_3 \alpha_4} \ldots \partial a_{2\nu-1, 2\nu}}.$$

Výraz tento můžeme nazvati subpfaffianem a dostaneme ho z $P = (1, 2, 3, \ldots 2n)$, vypustíme-li indexy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\nu}$ a výsledek opatříme znamením

$$(-1)^{A + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2\nu} - \nu}.$$

Patrně jest

$$P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu}} = \frac{\partial^\nu P}{\partial a_{\alpha_1 \alpha_2} \ldots \partial a_{\alpha_{2\nu-1} \alpha_{2\nu}}} = 0,$$

když dva z indexů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\nu}$ jsou vespolek rovny; jde to z odst. 2. a).

$P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu}}$ změní znamení, zaměníme-li dva indexy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\nu}$.

Evidentně jest

$$\sum_{\alpha_k = 1}^{2n} P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu}} a_{\alpha_i \alpha_k} = P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \ldots \alpha_{k-1} \alpha_{k+1} \ldots \alpha_{2\nu}},$$

a tedy obecně

$$\sum_{\alpha_2, \alpha_4, \ldots \alpha_{2\nu} = 1}^{2n} a_{\alpha_1 \alpha_2} a_{\alpha_3 \alpha_4} \ldots a_{\alpha_{2\nu-1} \alpha_{2\nu}} P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu}} = P.$$

Specielně pak jest

$$\sum_{k=1}^{2n} a_{i,k} P_{i,k} = P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

4. Jinak lze rozvinouti pfaffian následovně: Buď $\pi_1 < \pi_2 < \ldots < \pi_{2\nu}$ nějaká z $\binom{2n}{2\nu}$ kombinací bez opakování třídy 2ν z prvků $1, 2, \ldots 2n$ a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\nu}$ libovolná permutace $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_{2\nu}$ a A počet inversí v ní Buď $2\lambda = 2n - 2\nu$ a $\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_{2\lambda}$ buďte indexy zbývající z $1, 2, 3, \ldots 2n$ po vypuštění $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_{2\nu}$; $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2\lambda}$ buď libovolná permutace prvku $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{2\nu}$ a B počet inversí v ní. Počet inversí v permutaci $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu} \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{2\lambda}$ rovná se pak

$$J = A + B + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2\nu} - \frac{2\nu(2\nu + 1)}{2},$$

takže jest

$$P = (1, 2, 3, \ldots 2n) =$$

$$= \frac{1}{2^n \cdot n!} \sum_{(2n)!} (-1)^J a_{\alpha_1 \alpha_2} \ldots a_{\alpha_{2\nu-1} \alpha_{2\nu}} a_{\beta_1 \beta_2} \ldots a_{\beta_{2\lambda-1} \beta_{2\lambda}} =$$

$$= \frac{1}{2^n \cdot n!} \sum_{\binom{2n}{2\nu}} (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2\nu} - \nu} \left(\sum_{(2\nu)!} (-1)^A a_{\alpha_1 \alpha_2} \ldots a_{\alpha_{2\nu-1, 2\nu}} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{(2\lambda)!} (-1)^B a_{\beta_1 \beta_2} \ldots a_{\beta_{2\lambda-1, 2\lambda}} \right),$$

kde $\sum\limits_{\binom{2n}{2\nu}}$ se vztahuje na všech $\binom{2n}{2\nu}$ kombinací bez opakování třídy 2ν z prvků $1, 2, \dots 2n$, $\sum\limits_{(2\nu)!}$ se vztahuje na všech $(2\nu)!$ permutací prvků $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{2\nu}$ a $\sum\limits_{(2\lambda)!}$ se vztahuje na všech $(2\lambda)!$ permutací prvků $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{2\lambda}$. Jest však

$$\sum_{(2\nu)!} (-1)^A a_{\alpha_1\alpha_2} \dots a_{\alpha_{2\nu-1}\alpha_{2\nu}} = 2^\nu . \nu! (\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{2\nu})$$

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{2\nu}-\nu} \sum_{(2\lambda)!} (-1)^B a_{\beta_1\beta_2} \dots a_{\beta_{2\lambda-1}\beta_{2\lambda}} =$$

$$= 2^\lambda . \lambda! (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{2\nu}-\nu} (\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{2\lambda}) = P_{\pi_1\pi_2\dots\pi_{2\nu}} . 2^\lambda \lambda!$$

Jest tedy konečně

$$P = (1, 2, 3, \dots 2n) = \frac{1}{\binom{n}{\nu}} \sum_{\binom{2n}{2\nu}} (\pi_1 \pi_2 \dots \pi_{2\nu}) P_{\pi_1\pi_2\dots\pi_{2\nu}} \quad \dots\dots(3)$$

Jelikož záměnou dvou indexů $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{2\nu}$ mění své znamení jak $(\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{2\nu})$ tak $P_{\pi_1\pi_2\dots\pi_{2\nu}}$, lze podmínku $\pi_1 < \pi_2 < \dots < \pi_{2\nu}$ vypustiti. Součet $\sum\limits_{\binom{2n}{2\nu}}$ se vztahuje na všech $\binom{2n}{2\nu}$ kombinací bez opakování $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{2\nu}$ třídy 2ν z prvků $1, 2, \dots 2n$.

Horní vzorec nebyl dosud uveřejněn a možno ho považovati za obdobu věty Laplaceovy o rozkladu determinantů.

5. Obdoba subpfaffianů se subdeterminanty jde však ještě dále. Jak známo jest

$$P^2 = | a_{i,k} | = A \quad (i, k = 1, 2, \dots 2n).$$

Minor $A_{i,k}$ patřičný k elementu $a_{i,k}$ v determinantu A rovná se[2])

$$A_{i,k} = P . P_{i,k}; \; A_{i,k} = -A_{k,i}, \; A_{i,i} = 0.$$

Rovná se tedy pseudosymmetrický determinant

$$| A_{i,k} | \quad (i, k = i_1, i_2, \dots i_{2\nu}, i_1 < i_2 < \dots < i_{2\nu})$$

jednak $P^{2\nu} \; | P_{i,k} | \; (i, k = i_1, i_2, \dots i_{2\nu})$, což se rovná dále $P^{2\nu} [i_1, i_2, \dots i_{2\nu}]^2$, kde $[i_1, i_2, \dots i_{2\nu}]$ značí pfaffian o 2ν indexech utvořený z elementů $P_{i,k}$ právě tak, jako byl utvořen $(i_1, i_2, \dots i_{2\nu})$ z elementů $a_{i,k}$.

Jinak se rovná horní determinant

$$A^{2\nu-1} . \text{alg. kompl.} \; | a_{i,k} | \quad (i, k = i_1, i_2, \dots i_{2\nu}),$$

což se dále rovná

$$P^{4\nu-2} \; | a_{i,k} | \quad (i, k = k_1, k_2, \dots k_{2\lambda}),$$

---

2) E. von Weber, Vorles. ü. das Pfaffsche Problem, str. 24.

kde $k_1 < k_2 < \ldots < k_{2\lambda}$ jsou indexy zbývající z $1, 2, \ldots 2n$ po vypuštění $i_1, i_2, \ldots i_{2\nu}$. Avšak poslední výraz se rovná

$$P^{4\nu-2}(k_1 k_2 \ldots k_{2\lambda})^2.$$

Máme tedy po srovnání obou výrazu, odmocnění a krácení P^ν za supposice $P \neq 0$:

$$[i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}] = \pm P^{\nu-1}(k_1 k_2 \ldots k_{2\lambda}).$$

Co se týče znamení, jest rovno $(-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_{2\nu}-\nu}$.

Jest tedy konečně

$$[i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}] = P^{\nu-1}\,.\,P_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}}.$$

Jelikož záměnou dvou indexů mění obě strany znamení, lze vypustiti podmínku $i_1 < i_2 < \ldots < i_{2\nu}$.

Že znamení jest správné, vidíme následovně: Dle vzorce (2) jest

$$[i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}] = P_{i_1 i_2}[i_3 i_1 \ldots i_{2\nu}] - P_{i_1 i_3}[i_2 i_1 \ldots i_{2\nu}] + \ldots + \\ + P_{i_1 i_{2\nu}}[i_2 i_3 \ldots i_{2\nu-1}] = P^{\nu-1}.\,P_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}}.$$

Znásobme obě stray $a_{i_1 i_2}$ a sečtěme pro $i_1 = 1, 2, \ldots 2n$.

Jelikož jest

$$\sum_{i_1=1}^{2n} a_{i_1 i_2} P_{i_1 i_2} = P$$

$$\sum_{i_1=1}^{2n} a_{i_1 i_2} P_{i_1 i_r} = 0 \text{ při } r \neq 2,$$

neboť jest to pfaffian o dvou stejných indexech (odst. 2. b), jest též

$$[i_3 i_4 \ldots i_{2\nu}] = P^{\nu-2} P_{\nu_3 \nu_4 \ldots \nu_{2\nu}}.$$

Pokračujíce takto dále přijdeme konečně k identitě

$$1 = 1$$

ukazující, že znaménko bylo správné.

Jelikož vzorec

$$[i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}] = P^{\;-1} P_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2\nu}}$$

jest identita, platí i pro $P = 0$. Vzorec tento nebyl dosud uveřejněn. Pouze E. von Weber, Vorles. ü. das Pfaffsche Problem a Vivanti, Rendic. del Circolo math. di Palermo, t. 12 (1898) p. 1—20, uveřejnili specielní případ tohoto vzorce pro $\nu = 2$.

V Praze dne 17. listopadu 1920.

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 4.

O druhé indikatrix plochy v obyčejném bodě.

Napsal

J. Sobotka.

(Předloženo dne 14. ledna 1921.)

1. Budiž x tečna plochy dané S v obyčejném jejím bodě P, a budiž naší úlohou vytknouti si takové plochy 2. stupně, jež jsou rovinami svazku x proťaty v kuželosečkách majících s plochou S v bodě P styk řádu třetího. Je-li y tečna plochy kolmá k x, můžeme tu rovnici její v soustavě $P\,(x, y, z)$ nahraditi rovnicí

$$2\,z = m\,x^2 + 2\,n\,x\,y + p\,y^2 + a\,x^3 + \dots.$$

Kuželosečka v rovině $y = \alpha\,z$ mající s plochou v P styk řádu třetího promítá se do roviny $(x\,z)$ v křivku 1)

$$2\,z = m\,x^2 + 2\left(n\,\alpha + \frac{a}{m}\right)x\,z + p_1\,z^2, \tag{1}$$

kde p_1 může míti libovolnou hodnotu. Zvolme v každé rovině svazku x jednu takovou kuželosečku tak, aby všecky ležely na ploše 2. stupně P^2. Abychom to docílili, jest nutno a postačí, abychom p_1 volili jakožto funkci druhého stupně v α, kladouce $p_1 = g\,\alpha^2 + 2\,h\,\alpha + l$, kde g, h, l značí libovolné konstanty. Následkem toho bude rovnice obecné plochy P^2 míti tvar

$$2\,z = m\,x^2 + 2\left(n\,y + \frac{a}{m}\,z\right)x + g\,y^2 + 2\,h\,y\,z + l\,z^2. \tag{2}$$

Plocha P^2 seče rovinu $x = 0$ v kuželosečce

$$2\,z = g\,y^2 + 2\,h\,y\,z + l\,z^2. \tag{3}$$

Z toho soudíme, že můžeme pro žádanou plochu 2. stupně zvoliti za průsek s rovinou $(y\,z)$ libovolnou kuželosečku (3), která se v P dotýká přímky y, čímž plocha ta jest úplně stanovena. Ona protíná normálu z ještě v bodě $N\left(o, o, \frac{2}{l}\right)$, v němž její rovina tečná má rovnici

---

1) Cf. Ke křivosti druhého řádu ... v Rozpravách Č. Akademie r. XXIX. č. 27.

$$z + \frac{2}{l}\left(\frac{a}{m}x + h\,y - 1\right) = o,$$

protínajíc rovinu $(x\,y)$ v poláře q přímky z. Jest tedy v rovině $(x\,y)$

$$\frac{a}{m}x + h\,y - 1 = o \tag{4}$$

rovnicí přímky q, jež stanoví na osách x, y úseky $P\,R = \frac{m}{a}$, $P\,H = \frac{1}{h}$.

Bod H jest též průsečíkem tečny v N ke kuželosečce (3) s osou y. Kuželosečka ta má v P poloměr křivosti $r_0 = \frac{1}{g}$.

Střed plochy $\mathbf{P}^2$ jest průsečíkem rovin

$$m\,x + n\,y + \frac{a}{m}z = 0,$$

$$n\,x + g\,y + h\,z = 0,$$

$$\frac{a}{m}x + h\,y + l\,z = 1, \tag{3'}$$

z nichž první jest rovinou os deviačních příslušných řezům svazku x, jest to zároveň polární rovina vzhledem k P^2 nekonečně vzdáleného bodu na x, druhá nekonečně vzdáleného bodu na y a třetí nekonečně vzdáleného bodu na z.

2. Otáčí-li se x v rovině $(x\,y)$ kolem P, popíše bod R křivku k^3, jejíž polární rovnice jest $\varrho = \frac{m}{a}$; vztahujeme-li ji k soustavě souřadné pravoúhlé, pro niž jsou osami X a Y tečny hlavních řezů normálních bodem P vedených, při čemž jest plocha S v této soustavě vyjádřena rovnicí

$$2\,z = P + Q + \ldots,$$

kde

$$P = \frac{X^2}{r_1} + \frac{Y^2}{r_2}, \quad Q = A\,X^3 + 3\,B\,X^2\,Y + 3\,C\,X\,Y^2 + D\,Y^3 + \ldots,$$

pak jest křivka k^3 dána rovnicí $P - Q = 0$. Nazvali jsme ji druhou indikatrix bodu P.

Z úvah právě provedených plyne sestrojení kuželoseček v rovinách svazku x, jež mají s plochou S v bodě P styk řádu třetího, když jest bod R dán, v němž x křivku k^3 ještě protíná a naopak sestrojení bodu R na x, když jest dána v libovolné rovině svazku x kuželosečka, mající s plochou S v bodě P styk řádu třetího.

Za tím účelem sestrojme nejprv přímku $\bar{y}$ sdruženou k tečně y vzhledem ke ploše P^2. Z (3′) plyne její rovnice $n\,x + g\,y = 0$. Abychom přímku tu sestrojili, naneseme na x délky $P\,G_1 = \frac{1}{m} = r$, $P\,G_2 = -\frac{1}{g} = -r_0$, vedeme bodem G_1 rovnoběžku k přímce $\bar{x}$, sdružené k tečně x vzhledem k ploše dané S; protíná-li rovnoběžka ta y v bodě G_3, pak jest $\bar{y}$ kolmice s P na $(G_2 G_3)$ spuštěná.

Neboť přímka $\bar{x}$ má rovnici $m x + n y = 0$, a tedy přímka $(G_1 G_3)$ rovnici $m x + n y = 1$ a přímka $(G_3 G_2)$ rovnici $-g x + n y = 1$, takže kolmice ku $G_3 G_2$ s bodu P jest $n x + g y = 0$, tedy přímka $\bar{y}$. Přímka tato protne přímku HR v bodě V, jenž jest vrcholem kužele ploše P^2 podél křivky (3) opsaného. Když tedy libovolná rovina R svazku x seče kuželosečku (3) ještě v bodě M a když tečna k ní v bodě tomto seče y v bodě M_1, pak jest $(M_1 V)$ stopa do roviny $(x y)$ roviny tečné plochy P^2 v bodě M. Je-li M_2 průsečík přímky $(M_1 V)$ s osou x, jest $(M_2 M)$ tečna v M ke kuželosečce, v níž rovina R seče plochu P^2.

Sestrojíme-li tudíž v rovině R kuželosečku, která plochu S v bodě P oskuluje a v bodě M se přímky $M M_2$ dotýká, pak kuželosečka ta má v P s plochou S styk řádu třetího.

Je-li naopak dána kuželosečka e, jež má s plochou v bodě P styk řádu třetího a je-li x tečna její v bodě P, sestrojíme pro ni pol M_2 přímky f, v níž její rovina seče rovinu $(y z)$ normálnou k x. Víme, že pro všecky kuželosečky v rovině $(x f)$, které mají v P styk řádu třetího, jest pol přímky f týž bod M_2. Zvolíme-li tudíž kuželosečku (3) v rovině $(y z)$ a sestrojíme-li jednak průsečík její N se z, jednak průsečík její M s přímkou f, dále její tečny v bodech těch, jež protneme přímkou y v bodech H a M_1, pak jest $(M_1 M_2)$ stopa roviny tečné plochy P^2 v bodě M do roviny $(x y)$. Stopa ta protíná přímku $\bar{y}$ ve vrcholu V kužele ploše P^2 podél křivky (3) opsaného. Tudíž jest přímka $H V$ stopou roviny tečné v bodě N, protne tedy x v bodě R na křivce k^3.

Tím jest dána opět konstrukce křivky 2. stupně mající v P s plochou S styk řádu třetího a obsažené v libovolné rovině bodem P, když známe čtyři takové křivky mající v P různé tečny.

3. Volme pro plochu P^2 za kuželosečku (3) kružnici mající svůj střed ve středu křivosti P_1 řezu s rovinou $(x z)$ příslušném bodu P. Tu jest $l = g = m$, $h = 0$; rovnice plochy P^2 přechází v

$$2 z = 2 \left(n y + \frac{a}{m} z\right) x + m (x^2 + y^2 + z^2) \qquad (2)'.$$

a přímka $\bar{y}$ přechází v přímku $n x + m y = 0$. Sestrojíme-li tečnu $\bar{x}$ plochy S sdruženou k x a pak přímku $\bar{x}'$ k $\bar{x}$ souměrně položenou vzhledem k x, jest v tomto případě přímka $\bar{y}$ kolmá k $\bar{x}'$. Přímka $R H$ přechází tu v rovnoběžku k y bodem R vedenou, čímž jest bod V jednoduše stanoven.

Máme-li v pravoúhlé soustavě $O(\xi, \eta)$ kuželosečku dotýkající se v počátku O osy ξ a protínající osu η ještě v bodě L náležejícím její kružnici křivosti pro bod O, a značí-li O_1 střed této kružnice, a L_1 bod, v němž seče tečna v L ke kuželosečce přímku ξ, pak parabola dotýkající se přímky ξ v L_1, přímky η v O_1, jest t. zv. parabolou Steinerovou bodu O vzhledem k této kuželosečce; kolmice k_1 s O na $O_1\,L_1$ má patu v ohnisku paraboly a přímka řídící k_2 paraboly jest průměrem kuželosečky uvedené procházejícím bodem O. Protínají-li tudíž přímky k_1, k_2 rovnoběžku bodem O_1 k ξ vedenou v bodech K_1, K_2, jest pro druhý střed křivosti O_2 kuželosečky, bodu O příslušný, $O_1\,O_2 = 3\,K_2\,O_1 = 3\,O_1\,K_1$. Této souvislosti můžeme výhodně pro další konstrukci použiti.

Je-li bod R na druhé indikatrix dán, a chceme-li sestrojiti druhý střed křivosti P_2 pro řez plochy S s rovinou R procházející přímkou $x = P\,R$, sestrojíme tu bod V, spustíme ze středu křivosti P_1 v rovině $(x\,z)$ kolmici k rovině R a protneme kolmici tu rovinou $(x\,y)$ v bodě M_1 ležícím na y. Přímka $M_1\,V$ jest stopou do $(x\,y)$ roviny tečné k P^2 v bodě M, v němž R protíná ještě kružnici (3). Stopa ta protne x v bodě M_2 náležejícím tečně $M_2\,M$ v bodě M pro kuželosečku v R mající kružnici nad průměrem $\overline{M\,P}$ za kružnici křivosti v bodě P. Protneme-li tudíž rovnoběžku bodem P^*, v němž seče $P_1\,M_1$ rovinu R, k přímce x vedenou rovinou bodem P normálně položenou k přímce $P^*\,M_2$ v bodě K a učiníme-li $\overline{P^*P_2} = 3\,\overline{P^*K}$, obdržíme v P_2 hledaný druhý střed křivosti.

Naopak, je-li bod P_2 v rovině R dán, můžeme sestrojiti body K a M_1; pak kolmice v R spuštěná s P^* na přímku $P\,K$ protne x v bodě M_2, a přímka $M_1\,M_2$ protne přímku $\overline{y}$ v bodě V. Rovnoběžka bodem tím k y protne pak x v bodě R náležejícím druhé indikatrix.

4. Polární rovina nekonečně vzdáleného bodu na ose x jest všem plochám P^2 příslušným této ose společná, jest to rovina os deviačních, mající rovnici

$$m\,x + n\,y + \frac{a}{m}\,z = 0. \tag{3''}$$

Rovina ta seče rovinu $(x\,z)$ v hlavní ose deviační $m\,x + \frac{a}{m}\,z = 0$.

Je-li bod P_1' k středu křivosti P_1 řezu plochy v rovině $(x\,z)$ obsaženého souměrně položený vzhledem k bodu P plyne z poslední rovnice, že kolmice v rovině této s P_1' na zmíněnou hlavní osu deviační seče x v bodě R druhé indikatrix k^3 bodu P. K této souvislosti jsme dospěli již dříve jinou cestou.[1]

Rovinu $(y\,z)$ seče rovina $(3'')$ v přímce h dané rovnicí

$$n\,y + \frac{a}{m}\,z = 0. \tag{4}$$

Řez roviny $(x\,h)$ s plochou S má tu vlastnost, že pro bod P jeho 2. střed křivosti splývá s prvým. Kružnice křivosti příslušná má tudíž s plochou S styk řádu třetího. Vzhledem k soustavě $P\,(X,\,Y)$, v níž jsou X a Y tečny k hlavním řezům normálním, obdržíme pro souřadnice $(X,\,Y)$ libovolného bodu na h, klademe-li $\sphericalangle\,(X, x) = \varphi$

$$X = -\,y \sin\varphi, \quad Y = y\cos\varphi;$$

---

[1] Poznámka na str. 1.

z (4) vyplývá

$$\frac{r_1-r_2}{r_1\,r_2}\,y\cos\varphi\sin\varphi+\frac{A\cos^3\varphi+3\,B\cos^2\varphi\sin\varphi+3\,C\cos\varphi\sin^2\varphi+D\sin^3\varphi}{\dfrac{\cos^2\varphi}{r_1}+\dfrac{\sin^2\varphi}{r_2}}\,z=0.$$

Měníme-li φ, dospějeme k rovnici

$$-\frac{r_1-r_2}{r_1^2\,r_2^2}\,X\,Y\,(r_2\,Y^2+r_1X^2)+(A\,Y^3-3\,B\,Y^2X+3\,C\,Y\,X^2-D\,X^3)\,z=0.$$

Vytvořují tudíž všecky přímky h pro bod P kužel 4. řádu, který má osu z za přímku trojnou.

Kolmice h_1 ze středu křivosti řezu plochy S s $(x\,z)$ příslušného bodu P v rovině $(y\,z)$ na h spuštěná má rovnici

$$-\frac{a}{m}\,y+n\,z=\frac{n}{m};$$

ona seče y v bodě G, pro nějž jest $y=-\dfrac{n}{a}$. Otáčí-li se x kolem P v rovině $(x\,y)$, popisuje tedy bod G křivku

$$A\,Y^3-3\,B\,Y^2X+3\,C\,Y\,X^2-D\,X^3=\frac{r_1-r_2}{r_1\,r_2}\,X\,Y. \qquad (5)$$

Pro konstrukci může křivka (5) nahraditi druhou indikatrix.

Známe-li bod G na ní, spojíme jej se středem křivosti P_1 řezu v rovině $(x\,z)$; kolmice s P na $P_1\,G$ náleží rovině os deviačních pro roviny svazku x; naopak je-li tato rovina známá, protneme ji rovinou $(y\,z)$ a k průsečnici h spustíme v rovině této kolmici s P_1, která protne y v bodě G křivky (5). Jistou výhodu poskytuje (5) tím, že tečny její v dvojném bodě $X=0$, $Y=0$ jsou reálné, takže pro redukční kuželosečku můžeme bezprostředně odvoditi pět tečen reálných.

5. Mezi uvažovanými plochami 2. stupně P^2 vyskytují se též plochy oskulační H^2 dané plochy S, pro něž jest $g=p$, jež vyžadují zvláštní pozornosti.

Za tím účelem zaveďme opět soustavu souřadnou pravoúhlou, v níž osy x a y jsou tečny hlavních řezů normálních v bodu P, tak že rovnici plochy S lze předpokládati ve tvaru

$$2\,z=\frac{x^2}{r_1}+\frac{y^2}{r_2}+A\,x^3+3\,B\,x^2\,y^2+3\,C\,x\,y^2+D\,y^3+\ldots \qquad (6)$$

neb krátce

$$2\,z=P+Q+\ldots$$

a rovnici ploch oskulačních H^2 ve tvaru

$$2\,z=\frac{x^2}{r_1}+\frac{y^2}{r_2}+2\,g\,x\,z+2\,h\,y\,z+l\,z^2, \qquad (7)$$

kde g, h, l znamenají libovolné konstanty.

Veďme bodem P libovolnou rovinu R a klaďme si otázku, jak nutno plochu H² voliti, aby ji rovina R protínala v kuželosečce mající s plochou S v bodě P styk řádu třetího.

Seče-li rovina R rovinu $(x\,y)$ v přímce $\bar{x}$ a je-li $\bar{y}$ přímka v P k $\bar{x}$ kolmo vztýčená, přejděme k soustavě souřadné $P\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ pomocí vzorů transformačních

$$x = \bar{x}\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y = \bar{x}\sin\varphi + \bar{y}\cos\varphi, \quad z = \bar{z}, \quad \text{kde } \varphi = \sphericalangle\,(x, \bar{x}).$$

Rovnici roviny R lze pak psáti $\bar{y} = \alpha\, z$. Rovina ta seče plochu S v křivce (s). Pro křivku tu obdržíme v bodě P, značíce r poloměr křivosti v P pro řez plochy s rovinou $(\bar{x}\,z)$,

$$z' = 0,\ z'' = \frac{1}{r},\ z''' = 3\left[\frac{\alpha}{r}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\sin\varphi\cos\varphi + A\cos^3\varphi + \right.$$
$$\left. + 3\,B\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\,C\cos\varphi\sin^2\varphi + D\sin^3\varphi)\right].$$

Pro řez (r) roviny R s H² obdržíme v bodě P

$$z' = 0,\ z'' = \frac{1}{r},\ z''' = 3\left[\frac{\alpha}{r}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{r}(g\cos\varphi + h\sin\varphi)\right].$$

Pro styk řádu třetího křivek (s) a (r) jest nutno a postačí, aby

$$A\cos^3\varphi + 3\,B\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\,C\cos\varphi\sin^2\varphi + D\sin^3\varphi = \frac{1}{r}(g\cos\varphi + h\sin\varphi). \quad (8'')$$

Podmínka tato jest nezávislá na α, z čehož jest opět patrno, že křivky, v nichž libovolná rovina přímkou $\bar{x}$ položena seče plochy S a H², mají v P styk řádu třetího, když tento vztah se vyskytuje v jedné takové rovině R. Rovnici (8'') lze uvésti se zřetelem k tomu, že

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2},$$

na tvar

$$(D\,tg^3\varphi + 3\,C\,tg^2\varphi + 3\,B\,tg\,\varphi + A) -$$
$$- \left(\frac{tg^3\varphi}{r_2} + \frac{tg\,\varphi}{r_1}\right)h - \left(\frac{tg^2\varphi}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right)g = 0. \quad (8')$$

Z rovnice této jest patrno, že libovolná plocha oskulační H² má v bodě P tři tečny $\bar{x}$, $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ té vlastnosti, že každá rovina sečná každou z těchto tečen seče H² v kuželosečce mající s plochou S v bodě P styk řádu třetího. K těmže přímkám $\bar{x}$, $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ a k téže vlastnosti vede každá plocha, která jest k H² centricky kollineární pro P jakožto střed a $(x\,y)$ jakožto rovinu kollineace.

V bodě $N\left(o, o, \frac{2}{l}\right)$, v němž seče z plochu H², má tato rovinu tečnou

$$l\,z = 2\,(1 - g\,x - h\,y),$$

protínající rovinu tečnou $(x\,y)$ v přímce q

$$- g\,x - h\,y + 1 = 0. \tag{9}$$

Přímky z a q jsou tudíž vzájemnými polárami vzhledem ku ploše H^2, jakož i vzhledem ke každé ploše jí příslušné centrickými kollineacemi majícími P za střed a $(x\,y)$ za rovinu kollineační, a naopak představují tyto plochy 2. stupně souhrn oskulačních ploch 2. stupně plochy S v P, pro něž jsou z a q vzájemnými polárami.

Souřadnice u, v přímky (9) v rovině $(x\,y)$ jsou $u = -g$, $v = -h$; ony vyhovují, jak z rovnice (8′) patrno, rovnici

$$(u + v\,tg\,\varphi)\left(\frac{tg^2\,\varphi}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) + D\,tg^3\,\varphi + 3\,C\,tg^2\,\varphi + 3\,B\,tg\,\varphi + A = 0. \tag{8}$$

Rovnice tato vyjadřuje bod R, jehož souřadnice x, y jsou

$$x = \frac{\dfrac{tg^2\,\varphi}{r_2} + \dfrac{1}{r_1}}{D\,tg^3\,\varphi + 3\,C\,tg^2\,\varphi + 3\,B\,tg\,\varphi + A}, \quad y = x\,tg.$$

Místem geometrickým těchto bodů pro všecky hodnoty φ jest tudíž křivka $P - Q = 0$; jest to tedy druhá indikatrix k^3 plochy S pro bod P. Zvolíme-li na křivce té libovolný bod R a vedeme-li bodem tím v rovině $(x\,y)$ libovolnou přímku q, bude v důsledku právě provedené úvahy každá plocha oskulační 2. stupně H^2, pro niž jsou z a q dvě vzájemné poláry protínající libovolnou rovinu přímkou $(P\,R)$ položenou v kuželosečce mající v P s plochou S styk řádu třetího. Ovšem platí totéž také pro kuželosečky v rovinách položených přímkami $P\,R_1$, $P\,R_2$, znamenáme-li R_1, R_2 další dva průsečíky přímky q s křivkou k^3. Zvolíme-li za q tečnu inflekční, pak tečny $\overline{x}$, $\overline{x'}$, $\overline{x''}$ stávají se nekonečně blízkými.

Tím jest vztah oskulačních ploch H^2 k elementu plošnému 3. řádu úplně vyjádřen.

6. Ukažme způsob, jak lze ploch H^2 použiti k sestrojení druhého středu křivosti R' křivky, v níž libovolná rovina R bodem P položená seče plochu S, když jsou druhé středy křivosti R_1', . . R_4' pro čtyři takové roviny R_1, . . R_4 dány, při čemž opět předpokládáme, že stopy l, l_1, . . , l_4 rovin R, R_1 . . . R_4 do $(x\,y)$ jsou vesměs od sebe různé. Dále chceme obecně předpokládati, že roviny ty neobsahují normálu z.

Všecky kuželosečky v rovině, které mají mezi sebou v bodě P styk řádu třetího, mají pro bod ten společnou parabolu Steinerovu (p), t. j. parabolu obalenou přímkami normálně sdruženými vzhledem k těmto kuželosečkám k přímkám svazku P. Parabola ta dotýká se společné normály kuželoseček bodu P v příslušném společném středu křivosti P_1. Protíná-li spojnice bodu P_1 a druhého středu křivosti P_2 společný průměr $P\,Q$ kuželoseček v bodě Q a je-li $P_1\,Q' = Q\,P_1$, pak seče kolmice s bodu P_1

na přímku $P\,Q'$ společnou tečnu kuželoseček pro bod P v bodě V, v němž se tečna ta paraboly (p) dotýká, jak z věty Brianchonovy patrno.

Je-li tedy r první poloměr křivosti $P\,P_1$ a R druhý poloměr křivosti $P_1\,P_2$, jest

$$P\,V = \frac{3\,r^2}{R}\,. \tag{9}$$

Nyní použijme na př. plochy H^2, pro niž kuželosečky v rovinách svazků l_1, l_2 mají s plochou S styk řádu 3.; sestrojme průsečnici r_{12} rovin R_1, R_2. Steinerova parabola (p) v rovině R_1 pro křivku proniku (r_1) roviny této s H^2 jest dána tečnou l_1, tečnou, která jest zároveň normálou v P ku křivce (r_1), jejím bodem dotyku jakožto středem křivosti křivky (r_1) pro bod P a směrem osy, který jest kolmý k ose deviační křivky (r_1) pro bod P; můžeme tedy pomocí věty Brianchonovy sestrojiti bod L_1', v němž tečna paraboly (p) kolmá k r_{12} seče přímku l_1. Stejným postupem sestrojíme bod L_2', v němž tečna kolmá k r_{12} paraboly Steinerovy pro bod P vzhledem ke kuželosečkám v rovině R_2 majícím v P styk řádu třetího seče přímku l_2. Z toho plyne, že $L_1'\,L_2'$ jest stopou do $(x\,y)$ pro rovinu tečnou plochy H^2 v bodě R_{12}, v kterém ji ještě protíná přímka r_{12}. Tečna t'_{12} dané plochy v P sdružená k tečně její t_{12}, v níž rovina $(z\,r_{12})$ seče $(x\,y)$, protne přímku $(L_1'\,L_2')$ v polu U roviny $(z\,r_{12})$ vzhledem k H^2. Parabola Steinerova bodu P pro kuželosečku (u), v níž $(z\,r_{12})$ seče H_2, jest rovněž stanovena; ona se dotýká přímky z ve středu křivosti řezu s $(z\,r_{12})$ příslušném bodu P, dále přímky t_{12}. Tečna této kuželosečky v R_{12} seče t_{12} v bodě L_{12} na přímce $(L_1'\,L_2')$; proto jest kolmice s L_{12} na r_{12} další tečnou právě uvedené paraboly Steinerovy. Můžeme tedy pomocí věty Brianchonovy snadno sestrojiti její bod dotyku U_{12} s přímkou t_{12}. Bod U_{12} náleží tečně kuželosečky (u) v bodě na z. Z toho plyne, že přímka $(U_{12}\,U)$ jest polárou přímky z vzhledem ku ploše H^2; ona protíná tedy přímky $P\,L_1'$, $P\,L_2'$ v bodech L_1, L_2 náležejících indikatrix k^3.

Obdobně sestrojíme body L_3, L_4, v nichž protínají l_3 a l_4 křivku k^3, čímž ona jest stanovena. Můžeme tedy sestrojiti její průsečík L s přímkou l.

Protněme dále rovinu R na př. rovinou $(z\,r_{12})$ v přímce g a zvolme pro $P\,L$ některou plochu oskulační H_1^2, která má $L\,U_{12}$ za poláru přímky z. Tečna Steinerovy paraboly uvažované v rovině $(z\,r_{12})$ kolmá ku g, již zase pomocí věty Brianchonovy sestrojíme, nechť protne t_{12} v bodě G a tečna t'_{12} nechť protne $L\,U_{12}$ v bodě U^*. Patrně jest U^* pól roviny $(z\,r_{12})$ vzhledem k H_1^2 a tudíž přímka $(U^*\,G)$ jest polárou přímky g vzhledem k H_1^2; bod L', v němž $(U^*\,G)$ seče l, jest pólem přímky g vzhledem ke kuželosečce, v níž protíná R plochu H_1^2. Parabola Steinerova bodu P pro tuto kuželosečku dotýká se její normály náležející bodu P v příslušném středu křivosti, dotýká se kolmice v R s L' na g spuštěné a přímky l, jest tudíž úplně stanovena, její přímka řídící jest osou deviační pro rovinu R, pomocí níž obdržíme bod R'.

7. Z rovnice (9) plyne vztah mezi průvodiči $\varrho = PV$ bodů V na druhé indikatrix a mezi prvními a druhými poloměry křivosti r, resp. R normálných řezů (r) v rovinách (zV). Jest tedy $\varrho = \frac{3\,r^2}{R}$.

Otočme rovinu (zV) do polohy R o úhel ε kolem přímky (PV), již považujeme nyní za osu souřadnou x, ponechávajíce rovinu tečnou v P k ploše S za rovinu (xy) a normálu v P k ní za osu z, takže rovnici plochy S lze psáti opět ve tvaru

$$2\,z = m\,x^2 + 2\,n\,x\,y + p\,y^2 + a\,x^3 + \dots \tag{10}$$

Poloměr křivosti r' v bodě P pro řez (r') rovinou R jest $r' = r\cos\varepsilon$; střed jeho křivosti P_1' má souřadnice $(o,\ r\cos\varepsilon\sin\varepsilon,\ r\cos^2\varepsilon)$; rovnoběžka bodem P_1' k x vedená seče rovinu os deviačních

$$m\,x + n\,y + \frac{a}{m}\,z = 0$$

v bodě Q, tak že pro $P_1'\,Q = x_0$ obdržíme rovnici

$$m\,x_0 + n\,r\cos\varepsilon\sin\varepsilon + \frac{a}{m}\,r\cos^2\varepsilon = 0,$$

z níž plyne

$$-\,x_0 = r^2\cos\varepsilon\left(n\sin\varepsilon + \frac{a}{m}\cos\varepsilon\right).$$

Značme R' druhý poloměr křivosti pro řez (r') příslušný bodu P. Klaďme

$$\xi = \frac{3\,r^2}{R}, \quad \xi_{(\varepsilon)} = \frac{3\,r'^2}{R'} = \frac{3\,r^2\cos^2\varepsilon}{R'} = \frac{r^2\cos^2\varepsilon}{-\,x_0},$$

čímž obdržíme vztah

$$\frac{1}{\xi_{(\varepsilon)}} = \frac{tg\,\varepsilon}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{\xi}.$$

Naneseme-li v rovině (xy) na přímku $x = PV$ úsečku $PI = -\,r$, vedeme-li pak bodem I rovnoběžku k y, bodem P rovnoběžku k tečně plochy v P sdružené k x, protnou se tyto dvě rovnoběžky v bodě II tak, že $\overline{I\,II} = \frac{1}{n}$. Bodem P veďme přímku h uzavírající s x úhel ε. Rovnoběžka k x bodem II nechť protne h v bodě II' a rovnoběžka bodem II' k y nechť protne x v bodě I'. Pak jest $\mu = PI' = \frac{1}{n}\cot\varepsilon$, takže poslední relace nabude tvaru

$$\frac{1}{\xi_{(\varepsilon)}} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\xi}. \tag{11}$$

Soustavu souřadnou předpokládáme určitě orientovanou, čímž poloměry r, r', R, R' nabývají určitého znaménka a úhel ε jest rovněž určitě orientován, tak že poslední rovnice má jednoznačný význam geometrický. Změníme-li na př. smysl na x i y, při čemž se orientace soustavy souřadné nemění, tu přejde sice bod I na opačnou stranu od bodu P, ale jelikož úhel ε mění své znamení vzhledem k tomu, že orientace v rovině $(y\,z)$ se mění, proto se μ a bod I' nemění. Jest proto lhostejno, který směr na ose x volíme za kladný. Je-li tedy dán bod V a úhel ε, sestrojíme bod I' a pak bod V_ε' harmonický k P vzhledem k bodum I' a V. Je-li V_ε střed úsečky $P\,V_\varepsilon'$, jest $\xi_{(\varepsilon)} = P\,V_\varepsilon$. Stanovíme-li v dusledku této souvislosti bod V_0 na x tak, že $P\,V_0 = \frac{1}{6} P\,V_\varepsilon'$, pak kolmice na $P_1'\,V_0$ s bodu P v R spuštěná prochází hledaným bodem P_2'.

Opačným pochodem odvodíme $\xi = P\,V$, když jest $\xi_{(\varepsilon)}$ dáno. Je-li P_0 libovolný bod na y a klademe-li $P\,P_0 = d$, mužeme též vyjádřiti délky $\bar{\xi}_{(\varepsilon)} = \dfrac{d^2}{\xi_{(\varepsilon)}}$, $\mu = \dfrac{d^2}{\mu}$, $\bar{\xi} = \dfrac{d^2}{\xi}$ na x, čímž obdržíme relaci $\bar{\xi}_{(\varepsilon)} = \mu + \bar{\xi}$, pomocí níž lze snadno sestrojiti V_ε, je-li bod V dán a naopak.

Označíme-li $\xi'_{(\varepsilon)}$ délku $P\,V_\varepsilon$ pro řez s rovinou k R souměrně položenou vzhledem k rovině $(x\,z)$ řezu normálního, obdržíme z rovnice (11) vztah

$$\frac{1}{\xi_{(\varepsilon)}} + \frac{1}{\xi'_{(\varepsilon)}} = \frac{2}{\xi}.$$

Tvoří proto dvojice bodů V_ε příslušných rovinám svazku x souměrně položeným vzhledem k $(z\,x)$ involuci mající body dvojné P a V.

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 5.

Oxydace siřičitanů v koncentrovaných roztocích.

Podávají

Dr. Jaroslav Milbauer a inž. Jan Pazourek.

Předloženo dne 5. listopadu 1920.

Zjev okysličování siřičitanů vzduchem byl v literatuře fysikálně chemické studován pouze v roztocích zředěných (Dumington a Russe, Bachmann, Rössler, Binnecker, Kessler a Harcout, Krutwig a Demoncourt, Bery, Bigelow, Titoff, Brown, Thiel, Howard a Davey) a byl nalezen význačný vliv katalytický na rychlost reakční solemi mědi a poměrně jen nepatrný účinek ostatních solí kovů, schopných tvořiti několik stupňů oxydačních. V literatuře fotografické najdeme studii Lumièrea a Seywetze, kteří nechávali stát na vzduchu roztoky siřičitanů v otevřených lahvích a zjistili, že roztoky pouze zředěné se rychle okysličují, 20%ní prakticky jsou stálé.

Technická praxe všimla si oxydace siřičitanů ihned, když síran amonný počal nabývati důležitosti jako dusikaté hnojivo a snažila se siřičitan amonný okysličovati vzduchem a tak obcházeti výrobu kyseliny sírové. V příslušné patentové literatuře najdeme zprávy o strojním zařízení, jež umožňuje práci pod tlakem (Stutzer, Höchstská továrna), za vyšší teploty (Chem. Ind. A. G. a Wolf), o dělení siřičitanu a síranu amonného sublimací (Burgheiser). Kromě toho chrání Badische Anilin- und Sodafabrik v Ludvigshafenu přeměnu bisulfitů pod tlakem v síran a některé patenty radí k výrobě síranu amonného nepřímo oxydací siřičitanu hlinitého.

Scházejí dosud data o postupu okysličování v roztocích koncentrovaných, jež s malým nákladem bylo by lze zahustiti tak, že přímo by krystalovaný síran amonný z nich vypadl. V práci, podniknuté v laboratoři chemické technologie anorganických látek na české vysoké škole chemicko-technologického inženýrství byl vzduch jednak protřepáváním uváděn ve styk s roztoky siřičitanů, jednak jimi proháněn. Po důkladné revisi dosavadních údajů bylo zjištěno, že význačným katalysátorem reakce v prostředí neutrálném jsou při všech koncentracích soli *kobaltnaté*, kdežto soli měďnaté, dosud platící za speciální urychlovače této oxydace, působí pouze ve velmi zředěných a čistých roztocích. Stačí nečistoty ve vzduchu obsažené, aby jejich účinek se poškodil. Velikou řadou pokusu bylo ukázáno, že rychlost oxydace zvětšuje se zředěním a že soli kobaltnaté vždy fungují. Při zřeďování přibývá rychlosti menší měrou než by vyžadovala přímá úměrnost. Z veliké řady látek, jež byly zkoumány v ohledu katalytickém, projevují vedle solí kobaltu značnější účinek ještě soli ceru a železa. Velmi mocně na snížení nejen rychlostí reakce, ale i katalytické účinnosti solí kobaltu působí přítomnost rozpuštěného kysličníku uhličitého a siřičitého, za to u solí ceru pozoruje se při kyselé reakci zvýšený účinek. Roztoky siřičitanů, jimž mírně přidáno alkalických tekutin, okysličují se rychleji nežli neutrálné, silnou reakcí alkalickou se však zmenšuje jak rychlost reakce tak i účinek všech katalysátorů. U koncentrovaných roztoků siřičitanu sodného, draselného i amonného děje se oxydace prakticky stejně rychle; jsou-li roztoky čisté, jsou katalytické vlivy u všech stejné. Zejména u siřičitanu amonného jest patrný negativní vliv příměsí; bylo nutno vyráběti jej z amoniaku, který byl vydestilován chemicky čistým louhem ze síranu amonného překrystalovaného dvakrát z koncentrované kyseliny dusičné a vody a z kysličníku siřičitého uvolněného z kyselého siřičitanu sodného a chemicky čisté kyseliny sírové. Na zmenšení rychlosti reakční účinkují také látky v roztoku nasuspendované i během práce napadaný prach brzdí rychlost reakce neobyčejnou měrou, takže bylo nutno vedle vlastního pokusu vždy dělat souběžný pokus „na slepo“. Zjevy ty patrny jsou zejména v roztocích velmi zředěných a vedly k pojmu „negativních katalysatorů“, u koncentrovaných se tou měrou neuplatňují.

O nahrazování skupiny diazoniové nitroskupinou.

Napsali

Dr. **Vítězslav Veselý** a Ing. **Karel Dvořák.**

(Předloženo dne 22. října 1920.)

Nahrazování diazoniové skupiny nitroskupinou podařilo se nejdříve T. Sandmeyerovi (B. B. 20, 1494), jenž nechal působiti přebytečnou kyselinu dusitou v roztoky diazoniumsulfátů nebo nitrátů za přítomnosti jemně práškovitého kysličníku měděného. Původní způsob Sandmeyerův poskytuje však, jak autor sám doznává, velmi špatných výtěžků, toliko při přípravě nitrobenzolu z anilinu získá se výtěžek uspokojující (asi 42%).

A. Hantsch a J. W. Blagden (B. B. 33, 2544) kteří se zabývali studiem nahrazování skupiny diazoniové různými skupinami jinými, tvrdí, že uvedenou methodu Sandmeyerovu značně zlepšili tím, že použili k rozkladu solí diazoniových směsi siřičitanu mědnato-měděného (připraveného dle Chevreula) s roztokem přebytečného dusitanu draselného nebo sodného. Směsi této použili místo dosud neznámého dusitanu měděného, kterýžto nutno považovati zde za působící činidlo.

Hantsch a Blagden shledali také, že reakce probíhá s výtěžkem při přeměně anilinu v nitrobenzol téměř kvantitativním, působí-li se v roztok podvojné sloučeniny benzoldiazonium-nitrátu s dusitanem rtuťnatým $2\,[C_6H_5N_2\,(NO_3)]\,Hg\,(NO_2)_2$ Gattermannovou molekulární mědí.

Nahrazování aminoskupiny nitroskupinou má praktický význam jen v oněch řídkých případech, kde lze do aromatického jádra zavésti přímo aminoskupinu snáze nežli nitroskupinu, jak jest tomu na př. při substituci naftalinu v poloze β, i bylo tudíž popsaných zde method autory v první řadě použito ku přípravě β-nitronaftalinu z β-naftylaminu.

Kdežto způsobem Sandmeyerovým získává se z β-naftylaminu pouze 7% β-nitronaftalinu, dosáhli Hantsch a Blagden vlastním způsobem výtěžku 25%ního. J. Meissenheimerovi a R. Witte-mu (B. B. 36. 4154) podařilo se však při přípravě téže látky dosíci i methodou Sandmeyerovou výtěžku 30 až 35%ního a sice prostě tím, že použili „většího přebytku kyseliny při diazotaci a nechali směs reakční s dusitanem delší dobu státi".

Z této poznámky plyne, že lepší výtěžky získané Hantschem a Blagdenem oproti způsobu Sandmeyerovu nezáleží v principu jejich methody samé t. j. použití k rokladu diazoniových solí vedle roztoku dusitanu alkalií siřičitanu mědnato-měděného místo kysličníku měděného, nýbrž v tom, že tito autoři vystihli správněji poměr reagujících látek, zejména že použili většího množství dusitanu nežli Sandmeyer. Podrobivše obě methody srovnávacím pokusům, shledali jsme skutečně, že použije-li se stejného množství na reakci súčastněných látek, skytají obě methody výtěžku téměř stejných.

Při té příležitosti podařilo se nám také nalézti nový způsob, jímž lze nahrazovati diazoniové skupiny nitroskupinami a to působením kyselého roztoku diazoniumsulfátu nebo nitrátu ve směs Gattermannovy molekulární mědi s přebytečným roztokem dusitanu alkalií a to bez přítomnosti dusitanu rtuťnatého. Místo mědi Gattermannovy lze ovšem se stejným výsledkem použíti i prodejné měděné bronze. Srovnávajíce na různých příkladech všechny tři methody, shledali jsme, že poskytují výtěžky skoro stejné, a jeví se tudíž dosud za nejvýhodnější považovaný způsob Hantsch-Blagdenův dle pokusů našich nejméně praktickým, protože vyžaduje při stejných výtěžcích dosti složitou přípravu siřičitanu mědnato-měděného, jenž při methodě Sandmeyerově nahrazen jest snáze přístupným kysličníkem měďným a při methodě naši dokonce prodejnou měděnou bronzí.

Část pokusná.

Příprava *p*-bromnitrobenzolu z *p*-bromanilinu.

Methoda Sandmeyerova: 5 *g* *p*-bromanilinu rozpuštěno v 10 *g* vroucí ledové kyseliny octové, k roztoku přidáno 5 *g* konc. kyseliny sírové, roztok zředěn za pilného míchání vodou a vyloučená velmi jemně krystalovaná látka diazotována 5 *g* dusitanu sodného, rozpuštěného v 20 *g* vody. Vzniklý čirý roztok diazoniové soli vlit zvolna do ledem ochlazené směsi 10 *g* Cu_2O (připraveného dle Sandmeyera) a vodného roztoku 24 *g* dusitanu sodného. Nastává prudká reakce, jež za obyčejné teploty asi po 1 hod. jest úplně skončena. Z kyselého roztoku získáno předestilováním s vodní parou 3·5 *g*, t. j. 59·6% theor. surové nitrolátky, jež jednou překrystalována ze zředěného lihu tála při 125°.

Methoda Hantsch-Blagdenova: 5 *g* *p*-bromanilinu zdiazotováno úplně stejným způsobem a roztok diazoniové soli rozložen 8 *g* $Cu_2SO_3 . CuSO_3$

a 24 *g* dusitanu sodného. Z kyselého roztoku získáno předestilováním s vodní parou 4·15 *g* surové nitrolátky, t. j. 70·6% theor.

Methoda s molekulárnou mědí: 5 *g* *p*-bromanilinu stejně zdiazotováno a roztok diazolátky rozložen 8 *g* mol. mědi Gattermannovy a 24 *g* dusitanu sodného. Získáno 3·6 *g* surového *p*-nitrobenzolu, t. j. 61·4% theor.

Příprava nitrobenzolu z anilinu.

10 *g* anilinu rozpuštěno za tepla v 12 *g* konc. H_2SO_4 zředěné 10 *g* vody; při ochlazení vyloučí se síran anilinu v jemných krystalických vločkách. Směs tato diazotována za chlazení ledem vodným roztokem dusitanu sodného. Čirý roztok diazoniové soli vlit do 1 litrové baňky, v níž dříve připravena směs měďné soli příp. mol. mědi s vodným roztokem dusitanu sodného. Reakce nastává již za chladu. Směs ostavena 2 hod. při obyčejné teplotě, pak zalkalisována NaOH a nitrobenzol přehnán vodní parou. Olejovitý destilát vytřepán étherem, étherický roztok nitrobenzolu vysušen $CaCl_2$ a éther oddestilován.

Operace tato provedena byla za úplně stejných podmínek všemi třemi svrchu uvedenými methodami, při čemž použito různého množství jak dusitanu, tak i měďné soli příp. mol. mědi.

Na 10 *g* anilinu použito:

	Na NO_2 k diazotaci	Na NO_2 k rozkladu soli diazoniové	Katalysátoru k rozkl. diaz. soli	výtěžek nitrobenzolu v % theor.
1.	9 *g*	30 *g*	16 *g* Cu_2O	30·3%
2.	9 *g*	30 *g*	16 *g* $Cu_2SO_3 . CuSO_3$	40·8%
3.	9 *g*	30 *g*	32 *g* $Cu_2SO_3 . CuSO_3$	44·6%
4.	9 *g*	30 *g*	10 *g* Cu	42·5%
5.	9 *g*	11 *g*	10 *g* Cu	33·8%
6.	9 *g*	30 *g*	3 *g* Cu	9·2%

Jak ze srovnání příkladu 4. a 5. vyplývá, jest třeba k docílení uspokojujících výtěžků dostatečného množství dusitanu, kdežto příklad 3. a 6. ukazuje, že výtěžek jest značně závislý na použitém množství katalysátoru, zejména asi na velikosti jeho povrchu.

Příprava β-nitronaftalinu z β-naftylaminu.

7 *g* β-naftylaminu rozpuštěno za horka v 15 *cm*³ HNO_3 (sp. v. 1·40) zředěné 250 *cm*³ vody, roztok rychle ochlazen, při čemž se vyloučí nitrát naftylaminu v jemných krystalech. Směs rychle diazotována za silného chlazení ledem a solí 12 *g* $NaNO_2$ rozp. ve 24 *cm*³ vody a téměř čirý diazoroztok vlit do 2 litr. baňky, v níž smíseno předem 24 *g* mol. mědi s roztokem 44 *g* dusitanu sodného ve 175 *cm*³ vody. Rozklad nastal již při nízké

teplotě. Po 3 hod. směs zahřáta a destilováno přehřátou vodní parou. V destilátu vyloučený nitronaftalin odsát, a z filtrátu získáno vytřepáním étherem ještě něco látky. Výtěžek 1·6 *g* t. j. 18·9% theorie.

Protože nebylo nám možno opatřiti si čistou měděnou bronz, byly všechny pokusy provedeny pouze s Gattermannovou molekulární mědí. Hodláme pokusy naše opakovati s přírodní bronzí C firmy Ullmann, i lze očekávati, že se tak výtěžky methody naší ještě zvýší.

Z ústavu chemie organické
na čes. vys. škole technické v Brně.

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 7.

O nových invariantech kaskádní transformace.

Napsal

Dr. Frant. Rádl.

Předloženo dne 14. ledna 1921.

1. K řešení problému, nalézti všechny rovnice diff. lin. integrovatelné nejjednodušší kaskádní transformací, ukazuje se nutným definovati jisté *invarianty* $M\,N$ o vlastnostech invariantních analogických jako u invariantů h, k, což v následujícím vyloženo. Analogicky rozšířena ku konci pojednání theorie invariantu P.

Diff. rovnice lin. obyč. řádu $n > 2$

$$f(y) = y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_n y = 0, \tag{1}$$

transformována jsouc na základě systému

$$f(y) = y_1' + a\,y_1 + h\,y = 0, \quad y_1 = y^{n-1} + q_1 y^{n-2} + \ldots + q_{n-1} y \tag{2}$$

dává rovnici $f_1(y_1)$, kterou můžeme podle (2) psát

$$f_1(y_1) = h\left[\left(\frac{y}{h}\right)^{n-1} + q_1\left(\frac{y}{h}\right)^{n-2} + \ldots + q_{n-1}\frac{y}{h}\right] + h\,y_1 = 0, \quad y = y_1' + a\,y_1.$$

Provedeme-li naznačené derivace, můžeme tento systém psát ve tvaru

$$\begin{aligned} f_1(y_1) = y^{n-1} &+ \left(q_1 - \overline{n-1}_1 \frac{d\,l\,h}{d\,x}\right) y^{n-2} + \left(q_2 - \overline{n-1}_2 \frac{d\,l\,h}{d\,x^2} - M_1\right) y^{n-3} + \ldots \\ &+ \left(q_{s+1} - \overline{n-1}_{s+1} \frac{d^{s+1}\,l\,h}{d\,x^{s+1}} - M_s\right) y^{n-s-2} + \ldots \\ &+ \left(q_{n-1} - \frac{d^{n-1}\,l\,h}{d\,x^{n-1}} - M_{n-2}\right) y + h\,y_1 = 0, \quad y = y_1' + a\,y_1, \end{aligned} \tag{3}$$

kde jest všeobecně

$$\begin{aligned} M_s = -h\left[\overline{n-s-1}_1\, q_s \left(\frac{1}{h}\right)' + \overline{n-s}_2 \left(\frac{1}{h}\right)'' + \ldots + \overline{n-1}_{s+1} \left(\frac{1}{h}\right)^{s+1}\right] - \\ - \overline{n-1}_{s+1} \frac{d^{s+1}\,l\,h}{d\,x^{s+1}}, \quad s = 1, 2 \ldots, n-2. \end{aligned} \tag{4}$$

Tím jsou definovány první invarianty M, jichž je co do počtu $n-2$ a jež možná při dané rovnici f hned napsati, proto považujme je za příslušné k rovnici f.

2. Možná však udati druhou řadu $n-2$ invariantů N příslušných k téče rovnici f. Pišme totiž rovnici f ve tvaru systému

$$f(y) = Y^{n-1} + r_1 Y^{n-2} + \ldots + r_{n-1} Y + k y = 0, \quad Y = y' + a y, \tag{5}$$

z něhož eliminací y obdržíme jistou rovnici $F(Y)$; tuto možná psát obrácením pořádku obou rovnic systému (5) ve tvaru

$$F(Y) = y' + a y + Y = 0, \quad y = \frac{1}{k}(Y^{n-1} + r_1 Y^{n-2} + \ldots + r_{n-1} Y). \tag{6}$$

Nechť značí nyní $f_{-1}(y_{-1})$ rovnici, jež souvisí s $f(y)$ týmž způsobem jako f s f_1, pak platí*)

$$y' + a y + k y_{-1} = 0;$$

vzhledem k druhé rovnici systému (5) jest tudíž (až na znamení, jež jest zde lhostejné)

$$Y = k y_{-1}.$$

Provedeme-li tuto substituci v systému (6), obdržíme rovnici f_{-1} vyjádřenu systémem

$$\begin{aligned} f_{-1}(y_{-1}) = y' + a y + k y_{-1} = 0, \quad y = y_{-1}^{n-1} + \left(r_1 + \overline{n-1}_1 \frac{k'}{k}\right) y_{-1}^{n-2} + \\ + \left(r_2 + \overline{n-2}_1 r_1 \frac{k'}{k} + \overline{n-1}_2 \frac{k''}{k}\right) y_{-1}^{n-3} + \ldots \\ + \left(r_{n-1} + r_{n-2} \frac{k'}{k} + \ldots + \frac{k^{n-1}}{k}\right) y_{-1}, \end{aligned}$$

který možná též psáti ve tvaru analogickém systému (3)

$$\begin{aligned} f_1(y_{-1}) = y' + a y + k y_{-1} = 0, \quad y = y_{-1}^{n-1} + \left(r_1 + \overline{n-1}_1 \frac{d\,l k}{d x}\right) y_{-1}^{n-2} + \\ + \left(r_2 + \overline{n-1}_2 \frac{d^2 l k}{d x^2} + N_1\right) y_{-1}^{n-3} + \ldots \\ + \left(r_{s+1} + \overline{n-1}_{s+1} \frac{d^{s+1} l k}{d x^{s+1}} + N_s\right) y_{-1}^{n-s-2} + \ldots + \left(r_{n-1} + \frac{d^{n-1} l k}{d x^{n-1}} + N_{n-2}\right) y_{-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

položíme-li všeobecně

$$\begin{aligned} N_s = \frac{1}{k} (\overline{n-s-1}_1 r_s k' + \overline{n-s}_2 r_{s-1} k'' + \ldots + \overline{n-1}_{s+1} k^{s+1}) - \\ - \overline{n-1}_{s+1} \frac{d^{s+1} l k}{d x^{s+1}}, \quad s = 1, 2, \ldots, n-2, \end{aligned} \tag{8}$$

čímž druhá řada invariantů N, též co do počtu $n-2$, jest pro rovnici f též definována.

---

*) R. Č. A. XXII. č. 32 (6).

V následujících dvou §§ odvozeny vlastnosti opravňující název „invariantů“.

3. Označme invarianty M, N rovnice f_1 znaky M_{s1}, N_{s1} a k vůli symmetričnosti pišme též M_{s0}, N_{s0} místo M_s, N_s u rovnice f. Pak platí, že *invariant N_{s1} rovnice transformované jest týž jako invariant M_{s0} rovnice původní.*

Neboť odvodíme-li z rovnice f_1 psané systémem (3) rovnici f podle systému (7), obdržíme

$$f(y) = y_1' + a\,y_1 + h\,y = 0, \quad y_1 = y^{n-1} + \ldots$$
$$+ \left(q_{s+1} - \overline{n-1}_{s+1}\frac{d^{s+1}l\,h}{d\,x^{s+1}} - M_{s0} + \overline{n-1}_{s+1}\frac{d^{s+1}l\,k_1}{d\,x^{s+1}} + N_{s1}\right) y^{n-s-2} + \ldots,$$

odkudž podle (2) soudíme na relaci

$$N_{s1} = M_{s0}, \tag{9}$$

čímž tvrzení dokázáno.

4. Invarianty rovnice g adjungované k f značme M'_{s0}, N'_{s0}. Dokážeme, že *jeden druh invariantů (n. př. M_{s0}) jedné z obou rovnic adjungovaných (n. př. f) lze vyjádřit invarianty druhého druhu (N'_{s0}) příslušnými k druhé z obou rovnic (g).*

K důkazu užijme reciprocitního theorému*), dle něhož, značí-li g_{-1} rovnici adjungovanou k f_1, obdržíme rovnici g z g_{-1} podobnou transformací jako f_1 z f. Rovnice g_{-1} vznikne ze systému (3), jestliže diff. výrazy nahradíme adjungovanými a v opáčném pořádku vzatými, tedy

$$g_{-1}(z) = -z' + a\,z + h\,z_{-1} = 0,$$
$$z = (-1)^{n-1}\Big\{z_{-1}^{n-1} - \left[\left(q_1 - \overline{n-1}_1\frac{d\,l\,k}{d\,x}\right)z_{-1}\right]^{n-2} + \ldots$$
$$+ (-1)^{s+1}\left[\left(q_{s+1} - \overline{n-1}_{s+1}\frac{d^{s+1}l\,h}{d\,x^{s+1}} - M_{s0}\right)z_{-1}\right]^{n-s-2} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1}\left(q_{n-1} - \frac{d^{n-1}l\,h}{d\,x^{n-1}} - M_{n-2,0}\right)z_{-1}\Big\}$$

čili provedeme-li v druhé rovnici naznačené derivace,

$$z = (-1)^{n-1}\Big\{z_{-1}^{n-1} - \left(q_1 - \overline{n-1}_1\frac{d\,l\,h}{d\,x}\right)z_{-1}^{n-2} + \ldots$$
$$+ \Big[-\overline{n-2}\left(q_1 - \overline{n-1}_1\frac{d^{s+1}l\,h}{d\,x^{s+1}}\right) + \overline{n-3}_{s-1}\left(q_2^{s-1} - \overline{n-1}_2\frac{d^{s+1}l\,h}{d\,x^{s+1}} - M_{s0}^{s-1}\right)$$
$$- \ldots + (-1)^{s+1}\left(q_{s+1} - \overline{n-1}_{s+1}\frac{d^{s+1}l\,h}{d\,x^{s+1}} - M_{s0}\right)\Big]\,z_{-1}^{n\,s-2} + \ldots\Big\}.$$

Transformujme nyní rovnici g_{-1} na rovnici g, obdržíme podle (3)

---

*) R. Č. A. XXII. č. 32 § 4.

$$\left.\begin{array}{c} g(z) = (-1)^{n-1}\Big\{ z_{-1}^{n-1} + \left(-q_1 + \overline{n-1}_1 \dfrac{d\,l h}{d x} - \overline{n-1}_1 \dfrac{d\,l h'_{-1}}{d x}\right) z_{-1}^{n-2} + \ldots \\ + \Big[-\overline{n-2}_s \left(q_1{}^s - \overline{n-1}_1 \dfrac{d^{s+1} l h}{d x^{s+1}} \right) + \overline{n-3}_{s-1} \left(q_2 - \overline{n-1}_2 \dfrac{d^{s+1} l h}{d x^{s+1}} - M_{s0}^{s-1} \right) \\ - \ldots + (-1)^{s+1} \left(q_{s+1} - \overline{n-1}_{s+1} \dfrac{d^{s+1} l h}{d x^{s+1}} - M_{s0} \right) - \\ - \overline{n-1}_{s+1} \dfrac{d^{s+1} l h'_{-1}}{d x^{s+1}} - M'_{s-1} \Big] z_{-1}^{n-s-2} + \ldots \Big\} = 0, \\ z_1 = -z' + a z, \end{array}\right\} \qquad (10)$$

značí-li h'_{-1}, $M'_{s,-1}$ podobné výrazy rovnice g_{-1} jako h, M_{s0} u rovnice f.

Následkem relace*)

$$h'_{-1} = h$$

ruší se ve všeobecném koefficientu v hranatých závorkách obsaženém členy obsahující

$$\frac{d^{s+1} l h}{d x^{s+1}},$$

poněvadž platí

$$\overline{n-2}_s \,.\, \overline{n-1}_1 - \overline{n-3}_{s-1} \,.\, \overline{n-1}_2 + \ldots + (-1)^{s-1}\, \overline{n-s-1}_1 \,.\, \overline{n-1}_s + \\ + (-1)^s\, \overline{n-1}_{s+1} = \overline{n-1}_{s+1}.$$

Aby tedy koefficient tento měl jako u rovnice k f adjungované tvar

$$-\overline{n-2}_s\, q_1{}^s + \overline{n-3}_{s-1}\, q_2{}^{s-1} - \ldots + (-1)^{s+1} q^{s+1},$$

jest nutná relace

$$M'_{s,-1} = -\overline{n-3}_{s-1} M_{10}^{s-1} + \overline{n-4}_{s-2} M_{20}^{s-2} - \ldots + (-1)^s M_{s0}, \\ s = 1, 2, \ldots, n-2, \qquad (11)$$

dle níž lze vyjádřit invarianty M rovnice g_{-1} pomocí invariantů téhož druhu rovnice f.

Utvořme dále k rovnici f_{-1} dané systémem (7) dle právě uvedeného způsobu adjungovanou rovnici g_1 a transformujme tuto rovnici na g dle § 2., obdržíme týmž postupem

$$N'_{s1} = -\overline{n-3}_{s-1} N_{10}^{s-1} + \overline{n-4}_{s-2} N_{20}^{s-2} - \ldots + (-1)^s N_{s0}, \\ s = 1, 2, \ldots, n-2, \qquad (12)$$

takže invarianty N rovnice g_1 lze vyjádřit pomocí invariantů téhož druhu rovnice f.

Nahraďme nyní podle (9) v relaci (11) M_{s0} invarianty N_{s1} a v relaci (12) N_{s0} invarianty $M_{s,-1}$, obdržíme tím vztahy mezi invarianty rovnic adjungovaných f_1, g_{-1} a f_{-1}, g_1, jež platí též patrně o rovnicích f, g, takže můžeme psáti, vynecháme-li opět druhý index,

---

*) R. Č. A. XXII. č. 39, (6), (8).

$$\left.\begin{aligned} M_s' &= -\overline{n-3}_{s-1} N_1^{s-1} + \overline{n-4}_{s-2} N_2^{s-2} - \ldots + (-1)^s N_s, \\ N_s' &= -\overline{n-3}_{s-1} M_1^{s-1} + \overline{n-4}_{s-2} M_2^{s-2} - \ldots + (-1)^s M_s; \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

samozřejmě platí reciproké relace vyjadřující M, N pomocí resp. M', N'. Tím věta stvrzena.

5. Analogie k předešlým úvahám vede k rozšíření theorie invariantu označeného dříve P.*) Píšeme-li totiž rovnici (1) ve tvaru

$$y_1^{i} + h_0 y^{i-1} + h_1 y^{i-2} + \ldots + h_{i-1} y = 0, \quad y_1 = y^{n-i} + q_1 y^{n-i-1} + \ldots + q_{n-i}\, y, \quad (14)$$

dokázáno o determinantech $D(y)$, $D(y_1)$ základního systému n partik. integrálů rovnic resp. f, f_1 relace

$$D(y_1) = \Delta\, D(y),$$

kde Δ jest jistý determinant příslušný k rovnici f. O rovnicích adjungovaných g, g_{-1} platí podobně

$$D(z) = \Delta'_{-1}\, D(z_{-1}),$$

odkudž odvozeno, že

$$\Delta = \Delta'_{-1}.$$

Značí-li f_{-1} rovnici, z níž transformací dle (14) vzniká rovnice f, pišme vztah

$$D(y) = \Lambda\, D(y_{-1}),$$

kde Λ jest jistý výraz příslušný k f, tudíž též

$$D(z_{-1}) = \Lambda'_{-1}\, D(z),$$

takže

$$\Lambda = \Lambda'_{-1};$$

týmž způsobem jako v §§ 3., 4. soudíme na invariantní vztahy

$$\Lambda_1 = \Delta, \quad \Delta = \Lambda', \quad \Lambda = \Delta'. \quad (15)$$

Pro $n = 3$, $i = 2$, $h_0 = h$, $h_1 = H$ obdrželi jsme

$$\Delta = h^{n-2} P, \quad P = p_1 - \frac{H}{h},$$

takže jest

$$\Lambda = k^{n-2} Q, \quad Q = -p_1 + \frac{K - k'}{k}. \quad (16)$$

K rovnici (1) pro $n = 3$ zní rovnice f_1, f_{-1}

$$\left.\begin{aligned} f_1(y_1) &= y_1''' + (p_1 - D\,l\,\overline{hP})\, y_1'' + h\, y_1' + (H - h\,D\,l\,P)\, y_1 = 0 \\ f_{-1}(y_{-1}) &= y_{-1}''' + (p_1 + D\,l\,\overline{kQ})\, y_{-1}'' + (2\,p_1' + p_2 + 2\,D^2\,l\,\overline{kQ})\, y_{-1}' + \\ &\quad + (p_3 + p_1'' + D^2\,l\,\overline{kQ} + k\,D\,l\,Q)\, y_{-1} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

---

*) R. Č. A. XXVI. č. 5. (22), XXVIII. č. 18.

O barevných membránách mechů z rodu Mnium.

Píše

E. Senft.

(Se 6 obr. v textu.)

Předloženo dne 14. ledna 1921.

Při drobnohledném ohledání lístků různých Mnií setkáváme se téměř u všech evropských specií (nejméně u M. hornum) s týmž zjevem, že jednotlivé buničky anebo celé shluky těchto od ostatního pletiva ostře ohraničeny bývají a blány jejich barvou od pletiva ostatního ostře se odrážejí.

Příčiny tohoto zabarvování blán zdají se býti — béřeme-li zřetel na změny v pletivu — velice různé. Tak nalézáme na př. buď jednotlivé buňky, jejichž obsah jest silně plasmolysován a chlorofyllová zrna úplně rozpuštěná (obr. 1), jindy zase buňky se silně zbotnalou blánou a zabarveným obsahem buněčným (obr. 3), někdy zase skupiny buněk nebo dokonce celé partie — nezřídka až polovici lístku zaujímající, jichž obsah buněčný již úplně odumřel. — Buňky takové jsou prázdné, blány jejich buď silně zbotnalé (zeslizovatělé) a to někdy tak důkladně, že pozorujeme pouze obrysy primérní blány a někdy ani ne tyto. (Obr. 4).

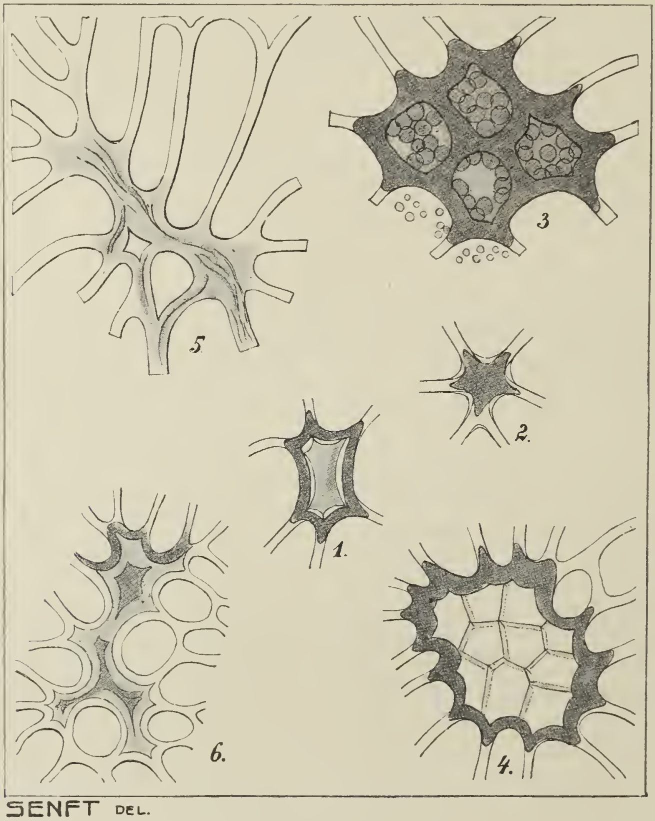
Každá taková, ať už jednotlivá buňka anebo celé partie buněk odděleny jsou od okolního zdravého pletiva blanami silně zduřelými, intensivně žlutě, do hněda anebo třešňově až karminově zabarvenými.

Také nalézáme nezřídka místa, která jeví velmi zřetelné zajizvení (obr. 2, 5, 6). I v těchto případech bývají zpravidla blány okolních bunic jakož i zeslizovatělá jizva vstřebaným barvivem intensivně zabarveny.

Jedná se, jak již na prvý pohled souditi lze, ve všech zmíněných případech o zjevy chorobné, které nejprvé plasmolysu a pak další až i úplný rozpad obsahu buněčného a posléze i zeslizovatění blán vyvolávají. Jest to proces, na kterém, podle velikého množství ohledaného materiálu soudě, zúčastňují se vlivy jak původu vnějšího tak i vlivy původu vnitrobuněčného. V případě prvém jsou to různá poranění, povstalá ohlodáním lístků plži, probodnutím a prokousáním hmyzem, natržením, rozšlápnutím a jiným poškozením — tedy vesměs poraněním způsobeným mechanicky. Vedle toho jedná se také o účast bakterií a plísní, které do buněk buď přímo anebo teprvé po předchozím poranění — tedy sekundárně — vnikly.

V mnoha případech pozorovány byly buňky, které hustě byly naplněny bakteriemi.

Na vlivy vnitrobuněčné konečně musíme usuzovati pozorujíce takové buňky, ve kterých jest obsah prostě plasmolysován a membrány bunic silně zduřelé a zabarvené, kde však při nejbedlivějším ohledání nenalézáme vně žádného poranění ani žádných mikrobů uvnitř buněk.



Obr. 1.—6.

Vložíme-lí lístek nějakého Mnia do roztoku ferrichloridu, pozorujeme, že se počne nejprvé zabarvovati base listová, kde zkoumadlo nejrychleji může prolínati. Vedle toho však tvoří se ostře ohraničené ostrůvky v pletivu, poněvadž se některá místa daleko rychleji zabarvují než pletivo ostatní. Sledujeme-li příčinu tohoto zjevu při silném zvětšení, shledáváme na místech takových zpravidla velejemné trhlinky ve stěnách buněčných, kterými zkoumadlo do vnitra rychleji pronikati může. Teprve když lístek delší dobu ve zkoumadle ležel, rozšiřuje se zbarvení od těchto míst po celém pletivu, které pak jest stejnoměrně zabarveno.

Vedlo by příliš daleko, kdybychom změnám dříve uvedeným chtěli věnovati podrobnou pozornost. Není to úkolem tohoto sdělení. Nás zajímá především, jakým způsobem se ono barvivo, které v blanách chorobného pletiva vstřebáno jest — vytváří, a do které asi skupiny látek možno je po stránce chemické zařaditi.

Nejprvé prohlédli jsme všecka evropská *Mnia* a mohli jsme zjistiti, že u *veškerých druhů, které mají žebro* (aspoň u starších exemplářů) *červené, zabarvují se blány chorobných buněk rovněž červeně, u druhů se žebrem zeleným žlutě anebo hnědě. Totéž platí o barvě zajizvených ran.*

Bylo tedy patrno, že v blanách Mnií dvě od sebe různící se látky přítomny jsou, z nichž každá určitým druhům jest vlastní.

Nejprvé jednalo se o to, zjistiti, zda poranění skutečně zabarvování membrán má v zápětí. Pěstovali jsme k tomu cíli mladé *Mnium affine* pod zvonem ve vlhké atmosféře. Uřezali jsme špičky lodyžek, probodali lístky jehlou, vytrhali pincetou kousky pletiva z obruby listové atd. Po dvou dnech prohlédli jsme rostliny, abychom zjistili změny. Pokud byly rostlinky dosti vlhké a turgescentní, nebylo pozorovati změn žádných. Při zavadnutí počaly se však blány buněčné na místě poranění velmi rychle hnědě zabarvovati.

Víme, že při poranění rostlin právě tak jako alkaloidy také i třísloviny a látky povahy fenolové ku místu poranění se stěhují, aby tam možné infekci zabraňovaly. Toto stěhování tříslovin děje se v odumírající buňce velmi rychle, ježto membrány třísloviny velmi dychtivě vstřebávají.

Mikrochemický důkaz, o jakou látku — lépe — o jaké látky se v našem případě jedná, jest nesnadný a zdálo by se nám také velice odvážným a nemístným mikrochemických reakcí ku nějakým dalekosáhlým závěrům použíti. Vztahy různých fenolů, látek to snadno štěpitelných, ku tříslovinám, těchto pak zase ku flobafénům a dokonce i ku anthokyanu jsou tak úzké, že lépe jest spokojiti se s pravděpodobností než chtíti za každou cenu provésti naprosto spolehlivý důkaz. Vždyť v takových obtížných případech nevedou ani řádně provedené chemické rozbory k cíli. Tak připomínáme zde v posledních létech od Baumgärtla*) provedenou práci o červeném barvivu v *Ricinus communis*, která ukázala, že toto barvivo s tříslovinou souvisí. Pokus obě látky odděliti se nepodařil; po sražení třísloviny vaječným bílkem se také anthokyan ztratil. Proto domnívá se Baumgärtel, že jedná se o červenou modifikaci nějaké třísloviny.

V našem případě můžeme s velkou pravděpodobností předpokládati přítomnost nějakých fenolů v nejširším slova smyslu, které se objevují

---

*) Baumgärtel O., Die Farbstoffzellen von *Ricinus communis L.* (Berichte deutsch. bot. Gesellschaft XXXV. p. 603—611, 1. F. 1917.

v blanách rodu *Mnium* ve dvou modifikacích a ferrichloridem barevné sloučeniny poskytují. Extrémní barvy ferrichloridovou reakcí vyvolané jsou jednak hnědá — jednak fialová. Mezi oběma nalézá se mnoho přechodních barev, ve kterých však vždy zase buď hnědý aneb fialový ton převládá.

Prvé, ferrichloridem hnědě se zabarvující látky jsou v blanách oněch *Mnií*, které mají žebro zelené, druhé pak fialově se zabarvující u *Mnií* se žebrem (aspoň ve stáří) červeným.

Přeměna těchto fenolů ve sloučeniny barevné děje se určitě nějakým enzymem, pravděpodobně nějakou oxydasou, která již v rostlině in vivo — je přítomna. Jinak by nemohlo býti žebro červeně zbarvené a také by se blána buněčná buněk neporušených nemohla červeně anebo hnědě zabarvovati.

Nicméně jest ale zřejmo, že plný a rychlý účin enzymů vyvoláván bývá teprvé poraněním. Nezdá se nám pravděpodobno, že by obě látky měly něco společného s kyselinou dikranotříslovou anebo se sphagnolem, které Czapek*) objevil, neboť se mikrochemickými reakcemi značně od těchto dvou látek různí. Nicméně jest velmi pravděpodobno, že obě naše látky v biologii mechů tutéž úlohu hrají, jako sphagnol, o kterém Czapek dokázal, že jest to také látka povahy fenolové, velice jedovatá a že je přítomna především v mechách, které buď ve vodě anebo na velice vlhkých místech rostou (*Sphagnum, Fontinalis* a mnohé *Hypnaceae*) Czapek připisuje sphagnolu rovněž úlohu ochranné látky.

Většina Mnií jsou hygrofyti ku vývoji velice mnoho vláhy vyžadující a jsou tedy vzhledem ku stanovišti různému poranění hmyzem, plži a j. a nikoliv naposled také infekci bakteriové vysazeny. Vedle chemické ochrany nalézáme u Mnií velmi účelná opatření proti poranění mechanickému. Jest to na příklad nápadně stlustlá obruba listová, velmi často ostnitými zuby opatřená. Tam kde bývá obruba hladká (*Mn. subglobosum, Mn. punctatum* a j.), jest tato rovněž červená anebo do hněda zabarvená.

Dokonce i u některých Mnií s ozubeným okrajem listovým, bývají místy obruba a zuby nezřídka intensivně červeně zabarveny (*Mn. spinosum* a *Mn. spinulosum*).

Nezřídka nalézáme i pod ústím tobolky u *Mnii* s červeným žebrem některé buňky intensivně červené (*Mn. spinosum — spinulosum*). Také archegonie a obalné lístky bývají červeně zabarvené.

Velmi zajímavým a poučným bylo srovnání nálezů jedné nebo druhé formy fenolů se znaky morfologickými. Ukázalo se opětně, že u rostlin příbuzných tytéž chemické látky se vyskytují:

Ve skupině *Mnia bisserata* (*Mn. hornum, orthorhynchum, lycopodioides,*

---

*) Czapek: Zur Chemie der Zellmembranen bei den Laub- und Lebermoosen. Flora 1899, LXXXVI. p. 361.

riparium, Blyttii, serratum spinulosum, spinosum), barví se membrány ferrichloridem více méně do fialova, žebra jsou červená a blány chorobných buněk vytváří barvivo červené.

Ve skupině *Mnia serrata* (*Mn. undulatum, rostratum, Drummondii, cuspidatum, medium, affine, Seligerii, rugicum*), barví se membrány ferrichloridem více méně do hněda, žebra bývají zpravidla zelená, pouze u *Mn. Drummondii* a *Mn. cuspidatum* ve stáří hnědá. Blány chorobných buněk vytváří barvivo hnědé.

Ve skupině *Mnia integerrima* (*stellare, hymenophylloides, cinclidividex punctatum, subglobosum*), barví se membrány ferrichloridem více méně do fialova, žebra jsou zpravidla červená (pouze u *Mn. cinclidioides* ve stáří také hnědá). Blány chorobných buněk vytváří barvivo červené.

* * *

Ke konci děkuji panu profesoru Dr. B. Němcovi za účast, kterou na práci této jevil.

Vysvětlivky obrázků.

Obr. 1. Plasmolysovaná buňka z pletiva lístku *Mnium spinosum.*
Obr. 3. Čtyři buňky se zduřelými stěnami a zbobtnalými zrny chlorofylovými u *Mnium Blyttii.*
Obr. 4. Partie odumřelých buněk u *Mnium spinosum.*
Obr. 2. a 6. Zajizvené rány u *Mnium spinosum.*
Obr. 5. Zajizvená rána u *Mnium Seligerii.*

Amfibolovec od Kojetína a horniny jej provázející.

Píše

Vojtěch Rosický v Praze.

(S obr. v textu.)

(Předloženo dne 14. ledna 1921.)

Ve středočeském massivu žulovém jest málo krajin, v nichž by byla magmatická diferenciace massivu tak typicky vyvinuta, jako tomu jest v okolí Milína u Příbramě. Na rozloze několika málo *km*² lze spatřiti v těsném sousedství horniny kyselé až nejkyselejší vedle basických až nejbasičtějších. V širším okolí milínském lze rozeznati dva typy hornin: *acidní typ granititový*, jenž dominuje na Z od Milína a na němž i město samo stojí, a *basický typ gabbrodioritický*, jenž převládá na V od Milína a táhne se na S k Palivu, na V na Radětice a ku mlýnu „na Luhu“.

Acidní typ granititový jest tvořen horninami světle šedými až načervenalými, zrna středního až drobného, složenými podstatně ze křemene, živce (orthoklasu a kyselého plagioklasu) a biotitu. Úbytkem slídy přechází granitit v aplit, jenž tvoří i větší komplexy uprostřed granititu i uprostřed odštěpeniny gabbrodioritické. Svojí genesí náleží aplit ku granititu, do něhož přechází. Nikde jsem však nepozoroval přechodů mezi granititem a basickými horninami gabbrodioritovými. Jedná se tu zajisté o horniny různého stáří, při čemž horniny basické nutno považovati za starší o něco než acidní — ač náležejí zajisté obojí jedné diferenciační epoše. Acidní horniny, aplity a pegmatity i granitity, vystupují v komplexu gabbro-dioritickém v podobě větších těles i drobných injekcí, dokazující jich menší stáří. Celkové rozložení obojích hornin zobrazuje mapka B. Stočesa[1]); následkem pronikání kyselých hornin basickými nelze arci ve všech místech hranici obou typů zcela přesně vésti.

Diferenciační proces vytvořil v komplexu gabbrodioritovém řadu typů, lišících se od sebe složením i slohem. Nalézáme tu horniny středně zrnité, bohaté amfibolem a gabbrovitého vzhledu, přecházející rychle v drobně až jemně zrnité diority, s větším či menším podílem křemene. Tak jest tomu blízko samého Kojetína na hřbetu cô 583 i na jejím jižním svahu, u Radětic, u Paliva a j. V některých typech převládá amfibol nad živcem, jenž tvoří skrovné výplně mezi černozelenými zrny amfibolovými; přibývá-li živce, nabývá hornina nápadně světlejšího tonu barvy. Místy (na př. Z. od Radětic) pozorován byl náběh ku porfyrické struktuře tím, že v drobnozrnné odrůdě dioritické vyskytají se živcová zrna, značně větší součástí ostatních. Diferenciační process vyvrcholil tím, že vytvořil se hrubozrnný, živců prostý *pyroxen-olivinický amfibolovec,* jenž jest nejbasičtější známou horninou středočeského massivu žulového.

---

[1]) V práci „Problémy středočeského massivu žulového“, Sbor. Č. Spol. Zeměvědné XXIV., 1918, str. 13 a n.

Amfibolovec vystupuje po obou stranách silnice, vedoucí z Kojetína (JV od Milína) na V ku mlýnu Kotalíkovu a otevřen jest dvěma velikými lomy; jeden z nich nalézá se při kraji lesa u samé silnice (asi kde je písmeno *n* ve slově „Kojetín“ na mapě 1 : 75.000), druhý jest založen v jižním svahu cô 583 na levém břehu potůčku. Svojí černozelenou barvou i nedostatkem bílých součástí liší se amfibolovec od okolních typů. Směrem na Z ku hranici granititu, jenž vystupuje nejblíže v okolí Kojetína, přibývá v hornině živce, čímž přechází v typ gabbrovitý. Podobný nalézá se též v nejtěsnějším sousedství amfibolovce ve zmíněných lomech pospolu s drobnozrnnými až jemnozrnnými dioritickými odštěpeninami, odrážejícími se od amfibolovce nejen daleko menším zrnem, leč i bledší barvou. Rovněž nápadně od amfibolovce odrážejí se hrubozrnné vyloučeniny v něm uzavřené, dosahující velikosti pěsti i větší a lišící se hlavně značným množstvím živce. Hranice vyloučenin těch s amfibolovcem jest zřetelná z povzdálí. Z blízka stává se nejasnou, an živec pozvolna ustupuje a amfibolu přibývá. Amfibolovcem prostupují aplitické i granititové žíly, kteréžto poslednější obsahují v sobě temné, hlízovité uzavřeniny basické, snadno od granititu úderem se oddělující.

Žilných hornin, hlubinnými massivy prostupujících, jest v okolí Milínu nemnoho; dle Stočesa jest právě okolí milínské typickým příkladem silně diferencované, leč žilnými vyvřelinami chudé krajiny žulového massivu středočeského. Ze žilovin možno nalézti v nedalekém okolí amfibolovce vedle zmíněných injekcí aplitických a granititových: *kersantit pyroxenický,* tvořící žílu (nyní již skoro vylámanou) v granititovém lomu u samého Kojetína při silnici k Luhu. *Porfyritové žíly* vystupují na jižním svahu hřbetu, mezi Milínem a Rtišovicemi; táhnou se k SZ až na vrchol cô 583 u Milína, kdež skalky porfyritu vystupují pospolu s aplitem. Zcela podobnou horninu nalézáme též dále k jihovýchodu blíže Luhu; obsažena jest hojně u polí z rozrušených žil i buduje hřbet Seletinu, táhnoucí se na jih podél silnice Luh-Pečičky. U mlýna „na Luhu“, v kamení s polí vyházeném sebrány byly vzorky jemnozrnného, dosti čerstvého *spessartitu.* Ve skále hornina tato nalezena nebyla.

Popis jednotlivých druhů hornin.

Amfibolovec,

Hornina jest středně zrnitá, až drobnozrnná, s velikými (až přes 1 *cm*) zrny amfibolu barvy černozelené. Prostým okem i lupou lze rozeznati hlavně jen zrna amfibolu makroskopicky černého s tónem do hněda až zelenava a bledě zelená zrna pyroxenu. Řídké jsou slabé bělavé proužky, vinoucí se mezi temnými součástmi, tvořené živci. Z práškované horniny separuje slabý již magnet dosti magnetovce. $H = 3{\cdot}15$ (hydrostaticky).

Mikroskopicky skládá se hornina podstatně hlavně z amfibolu, jenž převládá daleko nade všemi součástmi ostatními; vedle něho lze nalézti z nerostů původních diopsidický pyroxen, hypersten, olivín, magnetovec, v malém množství živec a biotit. Druhotně vzniká jemně šupinatý nerost, podobný mastku, sericit, hadec, chlorit, vápenec. Stavba horniny jest všesměrná, sloh pak hypidiomorfně zrnitý. Veliká zrna amfibolová činí náběh ke slohu porfyrovitému; vrostlice amfibolové jsou omezení allotriomorfního, základní hmota pak jest vždy oku prostému rozlučitelnou.

Amfibol tvoří jednak isometrická, až 1 *cm* veliká černozelená zrna vtroušená, jednak zrnka drobná ve hmotě základní. Laločnaté obrysy vtroušenin i okrouhlé otvory v nich dokazují intensivní resorpci. Ojedinčle zastiženy byly dvojčatné lamely dle {100}. Barva zrn ve světle obyčejném ve výbruse je žlutozelená, modrozelená, hnědozelená až světle kaštanově hnědá; místy bývá amfibolový průřez skoro čirý. Různé tyto tóny barevné možno pozorovati též na jednom individuu, při čemž rozdělení barev jest místy zonární, místy však zcela nepravidelné. Ve štěpných lupéncích zháší amfibol šikmo; u některých lupénků $c : \gamma = 18^0$, u jiných kolem 14^0. Pleochroismus jest zřetelný až i dosti silný. U amfibolů hnědých tónů jest paprsek dle α bledě žlutohnědý, β žlutohnědý s tónem do červenava, γ červenohnědý U amfibolů tónů zelených jest paprsek dle α bledě žlutavý až skoro čirý, β žlutavě zelený, γ modrozelený. V obou případech největší absorpce jest dle γ, nejmenší dle α.

V zrnech vícebarvých jsou hnědé tóny omezeny spíše na střed zrn, zelené a velmi bledé na okraje. Omezení vzájemné partií různě zbarvených jest často ostré, často však přecházejí tóny v sebe velmi pozvolna, bez zřejmé hranice. Kde jsou hranice ostře vyvinuty, jsou místy přímočaré, krystalonomické, častěji však zcela nepravidelné, laločnaté; v tomto případě nabývají průřezy vzhledu skvrnitého. V jednom průřezu zonárně zbarveném bylo pozorováno jádro v bastit změněné, obklíčené zelenavou až skoro čirou zonou amfibolu nezměněného; železo amfibolu při proměně se vyloučilo v podobě zrnek černé rudy. Dvojlom partií bledě zelených až čirých jest zřetelně *vyšší* nežli partií hnědých a hnědozelených u téhož průřezu (rozdíl v barvách interferenčních až $450 \frac{mm}{10^6}$). Mezi tóny

1*

hnědými a hnědozelenými není rozdíl v dvojlomu tak nápadný, ač i zde lze zhusta zjistiti vyšší dvojlom tónů zelených. Zhášení však průřezů i vícebarevných jest vždy *jednotné.*

Lom hnědě zbarveného amfibolu jest větší nežli 1·6426 (acetylentetrabromid) ve všech polohách ve štěpných lupéncích i ve výbruse; náleží tudíž amfibol ten k odrůdě *amfibolu obecného,* obsahujícího sesquioxydy. Čirý amfibol okrajních zon náleží *tremolitu,* maje lom nižší nežli acetylentetrabromid; amfibol zelený blíží se povahou svojí aktinolithu, maje lom z části o něco větší, většinou však o něco nižší nežli acetylentetrabromid.

Děje se tedy proměna amfibolu hnědého v zelený až čirý extrakcí sesquioxydů; železo vyloučilo se v podobě zrnek magnetovcových, čímž nastalo vyblednutí amfibolu, hliníku pak bylo asi použito ku tvoření drobnějších zrn amfibolu základní hmoty, snad i z části pyroxenu a řídkých zrn živcových. Lze souditi z toho, že vyblednutí amfibolu a vznik čirých tremolitových okrajů dlužno klásti ještě do doby tuhnutí, jež následovala po vývinu velikých amfibolových vrostlic před vznikem drobnozrnější hmoty základní. Že se magma během tuhnutí podstatně změnilo, nejlépe lze poznati z resorpcí velikých zrn amfibolových, jakož i z té okolnosti, že mezi drobnějšími zrny amfibolu nenalézáme již individuí tak hnědých tónů, jaké jsou vlastní jádrům velikých zrn. Mezi drobnějšími, mladšími amfiboly nalézáme zrna tónů zelených a hnědozelených, omezená často ve vertikální zoně idiomorfně, jakož i drobné, všemi směry uložené agregáty lupenitě stébelnatého, čirého amfibolu, náležejícího jednak tremolitu, jednak rovnoběžně zhášejícímu anthofylitu. Sekundární povahy jsou žilky tremolitu, amfibolovými zrny prostupující.

Na několika místech zastižena byla druhotná proměna amfibolu jednak v nízce dvojlomný, lupenitý bastit, jednak v mastek jemně šupinatý, vysoce dvojlomný; v jedné ze pseudomorfos mastkových nalezeny byly ještě zřetelné zbytky původního amfibolu.

Ostatní součásti: hypersthen, diopsidický pyroxen, olivín, živec, nejsou v hornině rozděleny stejnoměrně; místy převládá z nich na př. olivín, místy pyroxen nebo živec.

Hypersthen tvoří allotriomorfní zrna místy až přes 1 *mm* veliká, jejichž obrys zdá se též poukazovati na magmatickou resorpci. Lom zrn je značně vysoký, o něco vyšší ve všech polohách nežli 1·6796 (směs methylenjodidu a α monobromnaftalinu); dvojlom jest nízký, pleochroismus zřetelný mezi modravě zelenou ($\parallel \gamma$) a růžovou ($\parallel \alpha$). Optický ráz jest —. Kolem mnohých zrn hypersthenových bývá vyvinuta nepravidelná zona, utvořená nerostem jemně šupinatým, vysoce dvojlomým, nejspíše mastkem, jenž místy vyplňuje i prostory mezi zrny amfibolovými.

Diopsidický pyroxen tvoří čiré až slabě zelenavé sloupce, dosahující velikosti až 1·2 × 0·36 *mm.* Omezení jeho bývá nedokonale idiomorfní, toliko na zrnech, vrostlých do nejmladšího živce, bývá svislé pásmo idiomorfně vyvinuto. Ojediněle možno pozorovati zdvojčatění dle {100}. Štěpné trhliny, hojné a ostré, sledují toliko {110}. Diopsid mění se v amfibol, jenž jím proniká jako síť, zanechávaje v pokročilejším stadiu proměny již jen skrovné zbytky pyroxenu. Takovouto proměnou — zajisté že magmatickou — vzniklý amfibol jest slabě pleochroický mezi barvou hnědavou a zelenavou.

Hojnější diopsidického pyroxenu jest *olivín*; tento činí čirá, až ca ½ *mm* veliká zrna, idiomorfně omezená i zakulacená, isometrická, nepravidelně rozpukaná. Na puklinách bývají vyloučena hojná zrnka černé rudy. Od puklin mění se zrna často v hadec, jenž místy je celá pseudomorfuje. Vůči amfibolu a živci bývají obrysy olivínu často idiomorfní, vůči hypersthenu allotriomorfní. Hojně bývají uzavírána zrna olivínová amfibolem; kde sousedí olivín se živcem, vytváří se na styku zona kelyfitická podobně jako v gabbrech. Kelyfit jest tvořen věncem modrozeleného, stébelnatě lupenitého amfibolu, jehož individua stojí zpravidla kolmo ku povrchu zrna.¹) Mezi amfibolovou zonu a zrno olivínové vsunuje se místy bledě zelená zona z části zrnité povahy, z části lupenitě stébelnaté; v prvějším případě skládá ji asi pyroxen, v druhém tremolitu blízký amfibol, jak lze souditi dle malé úchylky zhášení jednotlivých stébel. Šířka kelyfitické zony jest od 0·02 až přes 0·15 *mm*. Kde jsou obě zony vyvinuty, jest vnější, intensivněji zbarvená zona širší. Průřezy olivínu, vedené kolmo k ose optické, ukazují v konoskopu isogyru skoro rovnou, takže nelze na nich určiti s bezpečností optický ráz; dle vlastnosti té lze zařaditi olivín tento na hranici mezi olivín a fayalit.

Živec přítomen jest toliko v některých partiích horniny jakožto nejmladší součást, tmelící obyčejně starší a hojnější součásti barevné. Obrysy zrn jsou z největší části allotriomorfní; výminečně nalezeno zrno živcové, jež, dle idiomorfního obrysu oproti amfibolu, jest starší tohoto. O menším stáří velké většiny zrn živcových svědčí uzavřené v nich idiomorfní krystaly amfibolu a pyroxenu. Lom živců (v isolované partii výbrusu) jest z části o málo vyšší, z části o málo nižší, nežli 1·5758; hodnota tato shoduje se tudíž přibližně s β živce, což poukazuje na živec velmi basický, náležející řadě bytownit-anorthitové; s určením tímto jest v souhlase záporný ráz optický, zjištěný na řezech kolmých k ostré středné. Dvojčatné lamely jsou sporé, dosti široké. Druhotně mění se živec v jemně šupinatý muskovit. Průměrná velikost živcových zrn obnáší kolem 0·3 až 0·7 *mm*; ojediněle vyskýtají se zrna až 2 *mm* dlouhá.

Biotit tvoří velmi vzácné, drobné, allotriomorfní lupénky barvy bledě hnědé, s pleochroismem na příčných řezech mezi barvou žlutohnědou s tónem do červenava a velmi světle žlutou. Lupénky biotitu bývají uzavřeny zpravidla v zrnech amfibolu, řidčeji nalézají se mezi těmito, obkličujíce je svými laločnatými okraji. Lze z toho souditi na delší,

---

¹) Výjimečně větší sloupek amfibolový leží tangenciálně ku povrchu zrna.

snad též opětovný vývin biotitu, jenž tvořil se z části před amfibolem, z části ještě po něm. Lupénky dosahují délky ca 0·25 *mm.*

Rudou jest hlavně magnetovec, vedle něho něco pyritu. Ruda tvoří zrna nepravidelných obrysů, drobná hnízda i proužky. Původní rudy jest málo; drobná a ojedinělá zrnka její uzavřena jsou hlavně v amfibolech, řidčeji v diopsidu a hypersthenu. Hojnější rudou jest sekundární magnetovec, vznikající při proměně amfibolu a olivínu.

Z nerostů druhotných zvláště rozšířen jest *chlorit*, tvořící lupenitě vějířovité agregáty, s lupénky až 0·66 *mm* dlouhými a 0·08 *mm* širokými. Barvy jest chlorit velmi bledě žlutozelené, se slabým pleochroismem na příčných řezech: ∥ {001} paprsek modrozelený, ⊥ ku {001} bledě žlutavý. Lom na příčných řezech jest ve všech polohách vyšší nežli 1·5836; interferenční barvy jsou poměrně dosti vysoké (v normálním výbruse až žlutohnědá a žlutá I. řádu), anomálních barev interferenčních není. Charakter délky příčných řezů jest vždy záporný. Dle znaků těchto náleží chlorit tento *klinochloru.* V malém množství nalézá se v hornině druhotný vápenec.

Hrubozrnné, živcem bohaté vyloučeniny v amfibolovci z lomu na jižním svahu cô 583 skládají se z bělavého až běložlutého, hrubozrnného živce, v němž vrostly jsou hypidiomorfní sloupky a zrna amfibolu, shodného s amfibolem amfibolovce. Hranice vyloučenin těchto oproti hlavní hornině jsou, jak bylo již výše vzpomenuto, zřetelné z větší vzdálenosti; z blízka jejich ostrost mizí, ježto obě horniny na rozhraní do sebe přecházejí.

Amfibol vyloučenin tvoří až 7 *mm* veliké, isometrické až krátce sloupcovité jedince, uložené v hojném, značně rozloženém živci. Živce obsahují basická, úplně sericitovaná jádra, idiomorfně oproti okrajní, čerstvější zoně omezená. Lom zachovalejších partií živcových z okrajních zon jest velmi sblížený hodnotě 1·5595, což poukazuje na řadu labradoritovou; určení tomu nasvědčuje i úhel zhášení štěpných lamel, zdvojčatěných dle zákona albitového, 10°. Mezi štěpnými lupénky lze však nalézti i příslušníky kyselejších členů řady plagioklasové, blízké andesinu až oligoklasu. Na rozdíl od amfibolovce neobsahují hrubozrnné vyloučeniny ani pyroxenů ani olivínu.

Dioritické odštěpeniny amfibolovce.

Horniny tyto jsou z dálky barvy tmavošedé, zrna drobného až jemného, velikosti prosa až máku; pouhým okem lze ještě rozeznati zřetelně hlavní složivo hornin těch, černozelený amfibol a bílý živec. Mikroskopicky lze zjistiti vedle amfibolu biotit, plagioklas, křemen, apatit a druhotný chlorit. Horniny tyto nutno proto čítati ku *křemitým dioritům.* H určena hydrostaticky na 2·82—2·87.

Amfibol tvoří zrna hypidiomorfní, silně pleochroická; paprsek α = žlutohnědý, β = temně hnědozelený, γ = modrozelený. Amfibol jest zřejmě starší biotitu, jenž místy obrysy svými řídí se i dle zrn živcových.

Biotit jest velmi temný, pleochroický mezi žlutou a temně hnědou barvou; hojné jest zelenání biotitu a přeměna ve chlorit. Též amfibol, větraje, mění se ve chlorit. *Živce* jsou idiomorfní až hypidiomorfní; obsahují v sobě výše lomná i výše dvojlomná jádra povahy basičtější, s obrysy zhusta dokonale krystalovými. Hojná jest přeměna jader těch v agregát jemně šupinaté slídy. Kyselejší okrajní zony živců, vždy čerstvější jader, mají střední hodnotu lomu blízkou lomu křemene (zrnka mizejí v oleji o lomu = = 1·5523), náležejí tudíž řadě andesinové. Basičtější jádra živcová mají lom o málo vyšší nežli 1·5687, nižší však nežli 1·5745 (ve všech polohách); náležejí tudíž basickému bytownitu, blízkému již anorthitu. Živec jest mladší amfibolu, současný však asi s biotitem. *Křemen* jest dosti hojný; vyplňuje mezery mezi součástmi jakožto nejmladší nerost.

Ještě možno zmíniti se o pseudomorfosách, tvořených zrnitým agregátem amfibolovým, nejspíše po pyroxenu. Nalezeny byly v jemnozrnné facii křemitého dioritu.

Dioritické odštěpeniny kojetínského amfibolovce makroskopicky upomínají velmi značně na bohutínský křemitý diorit.¹) Ve výbruse liší se obě horniny poněkud v povaze amfibolu (bohutínský křemitý diorit má amfiboly značně bledší) i v množství biotitu (bohutínský křemitý diorit jest biotitem bohatší).

Gabbrovité a dioritické typy z okolí amfibolovce.

Horniny, do nichž kojetínský amfibolovec přechází, jsou jednak hrubozrnné, gabbrům dosti podobné typy, jednak středně zrnité až drobnozrnné, diority připomínající.

Podstatným složivem všech těchto hornin jest temně zelený amfibol a plagioklas; křemen jest rozšířenou součástí vedlejší, místy však se stává i součástí hlavní, na př. v hrubozrnné hornině V od Paliva. Středně zrnité typy byly blíže studovány ze skalek mezi Kojetínem a lomem na amfibolovec při silnici z Kojetína ku Smolotelům, o něco drobnozrnnější pak z jižního svahu hřbetu, táhnoucího se od cô 587 k V (jižně od silnice Kojetín-Smolotely).

Amfibol a součásti bledé jsou místy v rovnováze, místy buď jedna nebo druhá součást převládá. Hustota dle toho kolísá mezi 2·80—2·90.

Amfibol jest podobný povahou svojí amfibolu dioritických odštěpenin amfibolovce. V některých vzorcích byly nalezeny agregáty amfibolových zrn, jež svým obrysem upomínají na pseudomorfosy po pyroxenech; zachovalých zbytků pyroxenu jakéhokoli však nikde nebylo nalezeno.

Živce mají silně rozložená, basická jádra, náležející řadě bytownit-anorthitové (lom ve všech polohách větší nežli 1·571). Vnější zony kol jader basických jsou kyselejší (bytownit-labradorit až oligoklas) a daleko

---

¹) B. Stočes: Rozpr. Č. Akad. 1917. *22.* č. 12.

méně rozloženy, nežli jádra. Živce bývají lamelovány dle albitového, často současně i dle periklinového zákona. Zrna plagioklasová jsou z části hypidiomorfní až allotriomorfní, z části však idiomorfní, tabulkovitá dle (010). Řídký jest dvojčatný srůst dle zákona bavenského.

Křemen tvoří nejmladší vyloučeninu magmatickou; jakožto vedlejší součást vyplňuje mezery mezi ostatními nerosty. V některých těchto horninách vyskytají se zrna křemenná až přes 2 *mm* veliká, obsahující velké množství poru s kapalinou, po případě i s plynem.

Temné uzavřeniny granititu.

Granititové intruse v kojetínském amfibolovci jsou horniny středního zrna s bělavým až načervenalým živcem, šedými až 2 *mm* velikými zrny křemene a nečetnými lupénky biotitovými. Petrograficky podobají se intruse tyto granititu, vystupujícímu všude v okolí Kojetína a Milína.

V granititu kojetínském nalézají se temné uzavřeniny skládající se ve své části vnitřní makroskopicky hlavně z amfibolu temně zeleného, mezi nímž prosvítá malé množství živců. K okrajům uzavřeniny přibývá živce a křemene, na místo pak amfibolu nastupuje biotit. Tím způsobem přechází uzavřenina pozvolna v granitit. Zrno temných uzavřenin jest drobné (1—1½ *mm*).

Ve výbruse převládá *amfibol* hypidiomorfního vývinu; jest silně pleochroický. Paprsek α = hnědavě žlutý (místy se zelenavým tónem), β = temně šedozelený až hnědozelený, γ = modrozelený. Na řezech dle (010) pozorováno zhášení $c : \gamma = 19^0$. Řídký jest ve středních partiích *biotit* v temně hnědých, pleochroických lupéncích; dle base chvějící paprsek jest temně zelenavě hnědý, kolmo k basi světle hnědavě žlutý. Z nehojných bezbarvých součástí, tvořících výplně mezi převládajícími zrny amfibolu, jest tu *kyselý plagioklas* v allotriomorfních zrnech, sblížených lomem křemeni. Na řezech kolmých k ose resp. středné lze zjistiti optický ráz záporný, náleží živec ten tudíž oligoklasu. *Křemen* tvoří allotriomorfní zrna, tmelící starší součásti, zvláště zrna amfibolová; obsahuje hojnost porů s kapalinou, sestavených do šmouh a řádek. Z vedlejších součástí *apatit* tvoří sloupečky až dlouhé jehlice, jež dosahují až přes 1 *mm* délky, šířky pak sotva 0·01 *mm*.

Zajímavo jest, srovnati právě popsané temné uzavřeniny amfibolické s temnými vyloučeninami a šmouhami, objevujícími se v granititovém massivu dále na západ, v okolí milínského nádraží. Tyto šmouhy jsou toliko biotitem bohatší partie granititu, nelišící se povahou součástí od hlavní horniny matečné. Jest možno, že jedná se u amfibolických uzavřenin granititových intrusí kojetínských vlastně o assimilované úlomky amfibolovce, uzavřené do granititových žil.

Porfyrit křemito-dioritický z jižního svahu hřbetu mezi Milínem a Rtišovicemi.

Hornina tato jest z dálky barvy šedé; ve hmotě základní, okem ztěží rozlučitelné a barvy dosti temně šedé, vrostla jsou četná, 1—3 *mm* veliká zrna bílého živce a sporé lupénky černého biotitu. $H = 2{\cdot}70$.

Ve výbruse má hornina barvu šedožlutou; v základní hmotě obsažen jest hlavně živec, biotit a něco křemene.

Vtroušené *živce*, veliké obyčejně kolem 1 *mm*, jsou plagioklasy obyčejně zonárně stavěné. Ve mnohých jest možno sledovati bezpočetné množství jemných zon, jichž basicity od středu k okraji ubývá; zhášení zon děje se postupně od centra k okraji. U některých průřezů nalézáme jádro silně zakalené a rozložené, kdežto okrajní zona jest zcela čistá; časem též bývá okraj a střed čistý a čerstvý, zona mezi nimi však jest silně zakalená. Plagioklasy basičtějších (středu bližších) zon náležejí *andesinu* (lom světelný jest o něco málo nižší nežli 1·5567, optický ráz je positivní). Vnější zony, kyselejší, mají lom vyšší nežli 1·5431, nižší však nežli 1·5567, optický charakter jich pak jest negativní; dle toho náležejí *oligoklasu*, blížícímu se již ku andesinu. Mezi vtroušeninami nebyl orthoklas nalezen. Dvojčatění plagioklasů nastává dle zákona albitového i karlovarského; vnější omezení vrostlic jest z části idiomorfní, z části však, asi následkem resorpce, laločnaté.

Biotit tvoří nečetné lupénky, měřící asi 1 *mm* v průměru. Jest (s base pohlíženo) barvy černohnědé do zelenava, silně pleochroický na řezech příčných (∥ k basi černohnědý, ⊥ k basi žlutohnědý). Obrysy lupénků biotitických jsou dosti dokonale idiomorfní. V konoskopu jest biotit skoro jednoosý.

Ve *hmotě základní* nalézáme allotriomorfně omezená, isometrická zrna až úzké lišty kyselého plagioklasu, blízkého kyselému oligoklasu (s lomem nižším nežli 1·5431); zřídka se blíží basičtějším členům oligoklasové řady (lomem o něco vyšším nežli 1·5431). Malá množství živců náležejí orthoklasu. Velikost živců základní hmoty jest 0·03—0·1 *mm*. Biotit v základní hmotě tvoří allotriomorfní lupénky a mázdřičky barvy hnědozelené; oproti barvě vtroušeného biotitu převládá tón zelený. Drobounké šupinky jeho jsou jednak roztroušeny v základní hmotě, jednak se seskupují do hnízd a skupin, rozbíhajících se v proužcích do okolí. Druhotně mění se biotit v modrozelený chlorit.

Křemen tvoří čirá, allotriomorfní zrnka, roztroušená mezi živci základní hmoty, dosahující od několika tisícin až 0·1 *m* velikosti. Množství jeho i rozložení ve výbruse bezpečně lze postřehnouti teprve leptáním *HF* a barvením methylenovou modří; tím způsobem se ukáže, že nelze křemen považovati sice za součást podstatnou, leč množství jeho že jest dosti značné.

Apatit tvoří tenké jehličky, vedle něho obsahuje pak hornina malé množství černé rudy v drobounkých zrnéčkách.

S popsaným porfyritem od Rtišovic shoduje se v podstatě i porfyrit z cô 583 u Milína, od mlýna na ,,Luhu" i ze Seletiny. V porfyritu od mlýna ,,na Luhu" vyskytají se zajímavé pseudomorfosy po sloupkovitém nerostu, dosahující průměrné délky 1 *mm*, šířky kol 0·2—0·4 *mm*. Tvořeny jsou křemenem a šupinkami modrozeleného chloritu. V jednom případě pseudomorfosa vykazuje kolenovitý srůst dvou jedinců, jenž nasvědčuje pyroxenu jakožto nerostu původnímu. Ve křemenných zrnkách pseudomorfos těch lze místy nalézti jemné jehlice zelenavého amfibolu, jež většinou jsou orientovány rovnoběžně mezi sebou i s protažením sloupků.

Pyroxenický kersantit od Kojetína.

Hornina ta jest barvy temně šedé s tónem do červenava, slohu porfyrického. Makroskopicky jest zřetelný biotit v černohnědých lupéncích až asi 2 *mm* velikých, zarostlých v základní hmotě velmi jemně zrnité; lupou (ztěží pouhým okem) lze v ní rozeznati jemná zrnka červenavě zakalená a černozelená dokonale se mísící. $H = 2{\cdot}71$.

V drobnohledu lze spatřiti jako vtroušeniny: biotit a diopsid, v základní hmotě pak živec, diopsid, biotit, rudu, apatit a něco křemene. Druhotné součásti jsou: chlorit, vápenec, epidot. Následkem pokročilého rozkladu jsou skorem všechny součásti porušeny.

Biotit tvoří tenké, idiomorfní tabulky, zbarvené s plochy spodové žlutohnědě až černohnědozeleně. Příčné řezy vyznačují se pleochroismem mezi žlutohnědou (|| k basi) a velmi bledě žlutou ($\perp$ ku basi). Na příčných řezech lze spatřiti, že při okrajích mají lupénky úzkou zonu barvy černohnědé až temně hnědozelené, silněji pleochroickou nežli jest vnitřek lupénku (mezi temně hnědozelenou a žlutavou barvou). Řezy dle base jsou částečně bledší, částečně temnější dle toho, kterou částí krystalu řez prochází. Některé lupénky mají obrysy více méně laločnaté, z čehož lze zajisté právem souditi na magmatickou resoprci. Snad i zmíněné temnější, silněji pleochroické okraje mají svůj původ v účinku magmatu na vyloučené již krystaly biotitové. Tloušťka lupénků biotitových obnáší 0·06—0·2 *mm*. Druhotně zelená biotit od krajů i v rozleptaných chobotech a mění se ve chlorit. V pseudomorfosách chloritových bývají vrostlá velmi drobná zrnka, světlo silně lámající, náležející asi titanitu, jenž vznikl z Ti biotitů.

Diopsid tvoří čiré, protáhlé jedince v pásmu svislém zhusta dokonale idiomorfní, po případě sloupky zřejmě magmaticky korrodované a zakulacená zrna. Často seskupují se krystaly do aggregatů hvězdovitých. Rozměry sloupků diopsidových bývají průměrně 0·4 × 0·2 *mm*, místy až 0·84 × 0·12 *mm*. Štěpnost prozrazuje jen dle {110}, nikoli dle pinakoidů. Delší a tenčí sloupky mívají příčné trhliny upomínajíce tím na salit.

Tu a tam lze spatřiti lamelární dvojčatný srůst dle {100} nebo prorostlice dle {101}.

Četná zrna jeví počínající rozklad tím, že zelenají, měníce se od puklin i s povrchu ve chlorit modrozelené barvy, velmi nízce dvojlomný, bez barev anomálních. Též celé, dokonalé pseudomorfosy chloritové lze nalézti, promíšené jemně zrnitým vápencem; z obrysů možno souditi, že původním nerostem pseudomorfos těch byl pyroxen.

Biotit i diopsid ve hmotě základní tvoří drobné jedince, onen šupinky, tento zrnéčka i krystalově nedokonale omezené sloupečky, jež přecházejí do vtroušenin. Lupénky biotitu, zhusta dokonale idiomorfní, šestiboké, měřívají asi 0·12 *mm* v průměru, na řezech příčných mívají 0·02 *mm* tloušťky. Nelze u nich spatřiti temných, ostře odlišných, silně pleochroických okrajů, jakými se vyznačují vrostlice biotitické; kde okraje jsou temnější, tam přecházejí pozvolna do světlejších středů. Zrnka pyroxenů dosahují velikosti 0·02—0·05 *mm*; větší zrnka pyroxenová, tvořící již přechod do vrostlic, kupí se často do shluků.

Živce jsou velkou většinou kyselé plagioklasy, náležející řadě oligoklas-albitové. Jejich lom jest vesměs nižší nežli lom kanadského balsamu i nežli hodnota 1·5444, vyšší však, nežli 1·5313. Toliko ojediněle klesá lom pod hodnotu posléze jmenovanou; živce takové náležejí orthoklasu. Zrnka živců jsou hypidiomorfní, krátce lištovitá až allotriomorfní, isometrická, průměrně 0·05—0·1 *mm* veliká. Živce nejsou lamelované, vždy pak silně zakalené hojným jemným práškem krevelovym, dodávajícím celé hornině červenavého zabarvení.

Křemen jest z části původní součástí, tvořící velmi sporé čiré allotriomorfní výplně mezi živci. Vedle toho jest tu i křemen sekundarní, vyplňující vedle vápence jemné, horninou prostupující puklinky v podobě úzkých žilek. Od křemenů těchto liší se veliká, zakulacená zrna křemene cizího, obklopená úzkým věnečkem zelenavých, velmi drobných zrnéček a sloupečků, náležejících, jak se zdá, amfibolu a pyroxenu. Do jednoho ze zrn těch vniká z jedné strany zrno živce obrysu obdélníkového; jedná se tu asi o zjev korrose, při níž do změklého zrna křemeného vytvořil se idiomorfní jedinec živcový (podobně též sloupky amfibolu resp. pyroxenu v zelené zoně kolem cizích křemenných zrn vnikají do těchto).

Apatit tvoří četné, jemné sloupečky, dosahující rozměrů 0·17 × × 0·005 *mm*. Sloupky bývají zhusta napříč rozpukány. *Rudami* jsou jednak drobná zrna pyritu, jednak magnetovce. Průměrná velikost zrnek rudních jest asi 0·05—0·07 *mm*.

Ku druhotným nerostům náleží *pistacit*, tvořící allotriomorfní, zřetelně pleochroická nažloutlá zrnka, sdružená obyčejně s lupénky biotitu. Na příčných řezech tohoto lze tu a tam ojediněle spatřiti protáhlá zrnka až stébla pistacitu, těsně s biotitem srůstající a dosahující až ca 0·14 *mm* × × 0·01 *mm* velikosti.

Miarolitické dutinky bývají vyplněny hlavně vápencem, tvořícím ostře skalenoedrické krystaly, dále též chloritem a křemenem. Posledně jmenovaný nerost bývá vyvinut ve sloupečkách dokonale idiomorfních zvláště v pásmu svislém. Též i pyroxen a živec zasahují z okolí do dutinek těch svými idiomorfně omezenými konci.

Spessartit od mlýna „na Luhu“.

Hornina tato jest jemnozrnná, barvy dosti temně šedé, nápadně drsná přečetnými miarolitickými dutinkami. Některé jsou patrny již pouhým okem, dosahujíce 1 až 2 *mm* v průměru. Lupou lze viděti, kterak součásti horniny do dutinek těch zasahují krystalově omezenými konci svými; zvláště orthoklas bývá v nich druzově vyvinut.[1]) Z veliké části vyplněny jsou dutinky druhotným vápencem a chloritem. Při otáčení vzorku proti světlu lze pozorovati již pouhým okem zvláštní třpyt plsťnatý, pocházející od jemně jehličkovitého vývinu amfibolu. Hydrostaticky určena $h = 2{\cdot}87$.

Ve výbruse jest hornina šedá, s tónem do zelenava. Složena jest podstatně z amfibolu a plagioklasu; obě součásti jsou celkem v rovnováze.

Amfibol tvoří štíhlé sloupce, dlouhé asi 0·5—1 *mm*, široké kolem 0·05—0·1 *mm*. Barvy jest v obyčejném světle kaštanově hnědé, na okrajích — následkem počínajícího rozkladu — zelenavě hnědé. Jest zřetelně pleochroický: paprsek α je hnědavě žlutý, $\beta = \gamma$ kaštanově hnědý.

V partiích sezelenalých jest α žlutavý s tónem do zelenava, $\beta = \gamma$ modrozelený až hnědozelený. Ve svém svislém pásmu jest amfibol omezen idiomorfně tvary $\{110\}$, $\{010\}$, čímž příčné průřezy bývají šestiboké. V ukončení bývají sloupečky amfibolu ostře zahroceny, bez idiomorfního omezení. Štěpné trhliny dle $\{110\}$ bývají sice nečetné, leč velmi nápadné. Zhášení amfibolů na $\{010\}$ $c : \gamma = 20^0$, ve štěpných lupéncích dle $\{110\} = 17^0$. Hojné jest dvojčatění dle $\{100\}$, kontaktní i lamelární. Světelný lom amfibolu jest ve všech polohách větší nežli 1·6410 (lom acetylentetrabromidu) na řezech podélných i příčných; obsahuje tudíž amfibol tento sesquioxydy. Sezelenalý amfibol na okrajích má lom zřetelně nižší, nežli čerstvý, hnědý; u sloupků, isolovaných z výbrusů, jest lom γ sezelenalých částí zřetelně vyšší nežli 1·641, ve směru k němu kolmém pak nižší. Děje se tudíž přeměna amfibolu za extrakce sesquioxydů.

Velmi zajímavá jest povaha amfibolu, kdekoli vniká do některé z četných miarolitických, chloritem vyplněných dutinek; pokud totiž sloupek amfibolový jest zarostlý v hornině, jest normální hnědé barvy, část však, zasahující již do chloritové výplně miarolitické dutiny, jest odbarvená, zcela čirá. Odbarvené části stébel s částmi hnědými však chovají se opticky jednotně, zhášejíce s nimi současně. Lom odbarvených amfibolů jest zřetelně nižší, nežli hnědých: γ jest o poznání nižší nežli 1·6410, α zřetelně nižší; dvojlom však částí čirých jest vyšší nežli dvojlom částí hnědých. Děje se tudíž v amfibolu odbarvování za stejných okolností, jaké jsme pozorovali u amfibolovce.

---

[1]) Štěpné lupénky jeho, z části zhášející rovnoběžně, mají lom nižší nežli 1·5326; pospolu s orthoklasem nalezen v dutinkách miarolitických též plagioklas a amfibol, leč oba v množství malém.

Ojediněle byla nalezena zrna čirého až slabě narůžovělého *pyroxenu*, jenž tvoří hypidiomorfní sloupky, dosahující až 1 × 0·5 *mm* velikosti.

Živec tvoří isometrická zrna až krátké lišty hypidiomorfních obrysů. Zrna bývají průměrně 0·26 *mm* veliká, lišty kol 0·3—0·5 *mm* dlouhé a 0·06 až 0·15 *mm* široké. Lamely živcové bývají jednoduché i dvojčatěny dle zákona albitového. V zrnech i v lamelách lze často spatřiti basičtější, zhusta silně rozložené jádro. Živce náležejí řadě kyselých plagioklasů; lom u zrn i lišt jeho jest vyšší, nežli 1·5325, velkou většinou pak menší, nežli 1·5545. Ojediněle toliko jest lom živců o něco vyšší, nežli hodnota posledně uvedená; oproti lomu 1·5454 mají živcové lamely lom z části vyšší, z části nižší. V řezech, kolmých k optické ose či ostré středné lze zjistiti optický ráz positivní. Dle uvedených vlastností lze určiti živec jakožto oligoklas-albit až oligoklas. Orthoklas, nalezený v miarolách, nepodařilo se mi v hornině samé nalézti. Je-li přítomen, pak jistě jenom v množství zcela podružném.

Mezi zrny živcovými jest něco málo *křemene* v podobě čirých allotriomorfních zrn, vyplňujících mezery mezi živci, dosahujících průměrně asi 0·13 *mm*. *Apatit* tvoří jemné, čiré jehličky, dosahující až $^1/_4$ *mm* délky, sotva však 0·005 *mm* šířky.

Rudních zrnek, náležejících asi magnetitu, jest velice málo. Jsou železně černá, čtvercových průřezů, měřících nejvýše 0·05 *mm* v průměru.

Dutiny miarolitické mívají podobu hranatou, často větvenou; výplní jich jest hlavně *chlorit*. Barva jeho ve výbruse jest žlutavě až modravě zelená, pleochroismus slabý mezi slabě žlutou a bledě modrozelenou. Lom chloritu jest menší nežli 1·5836, dvojlom nízký, bez barev anomálních. Ráz délky příčných řezů jest vždy záporný; dle znaků těch jest chlorit penninu blízký. Jím prostupují zmíněné odbarvené jehlice amfibolové všemi směry, v něm jsou též uložena dosti hojná zrnéčka černé rudy (magnetovce?) i agregáty velmi drobných zrnéček silně lomného i dvojlomného titanitu. Agregáty tyto dosahují velikosti až 0·2 × 0·08 *mm*, jednotlivá zrnka pak 0·005 až 0·01 *mm*. V několika případech byly pozorovány kolem agregatů titanitu v chloritu pleochroické dvůrky.

Ať již považujeme chloritickou výplň v miarolách za výsledek obyčejného větrání či za usazeninu pramenů posteruptivních, jisto jest, že vznikl alespoň z části na útraty amfibolu; tomu nasvědčuje vyblednutí jehlic amfibolových, kde tyto vnikají do miarol chloritem vyplněných, a vyloučená zrnka rudní i titanitová.

Chemická povaha amfibolovce.

Analysa amfibolovce, již provedl laskavě p. prof. techniky v Praze J. Hanuš, poskytla tento výsledek uvedený sub I.; II. jest přepočet analysy po odečtení vody na součet 100; III. molekulární kvocienty; IV. tytéž stem násobené a na součet 100 přepočítané (Fe_2O_3 počítáno zvláště od FeO); V. molekulární kvocienty přepočtené na součet 100 (všechno železo převedeno na FeO). VI. Počet atomů kovových, přepočtený na součet 100.

	I.	II.	III.	IV.	V.		VI.
SiO_2	44.16	45·37	0·7562	43·81	43·14	Si	40·06
TiO_2	0·08	0·08	0·0010				
Al_2O_3	9·52	9·78	0·0959	5·55	5·46	Al	10·15
Fe_2O_3	4·05	4·16	0·0260	1·56	—		
Cr_2O_3	0·13	0·13	0·0009				
FeO	5·03	5·17	0·0718	4·15	7·16	Fe	6·64
MnO	stopy	—	—	—			
CaO	9·12	9·37	0·1673	9·68	9·53	Ca	8·85
MgO	22·02	22·81	0·5702	32·99	32·49	Mg	30·16
K_2O	2·02	2·07	0·0220	1·27	1·25	K	2·33
Na_2O	1·03	1·06	0·0171	0·99	0·97	Na	1·81
H_2O hygr.	0·18	—	—	—			
H_2O chem.	2·33	—	—	—	—		
	99·85	100·00	1·7284	100·00	100·00		100·00

Analysou získané hodnoty dokazují svým nízkým podílem SiO_2, Al_2O_3 i alkalií, na druhé straně svým vysokým podílem dvojmocných prvků, zvláště MgO, že hornina náleží ku skupině nejbasičtějších eruptiv. Značný podíl vody chemicky vázané má svoji příčinu zajisté jednak v přítomnosti sekundárních nerostů (chloritu, hadce), z části však náleží též jakožto původní součást amfibolu. Basický ráz horniny vyplývá zvláště dobře z rozpočtů dle různých systémů. Pro jádra *Rosenbuschova* platí:

$NaKAlSi_2$	16·6%
$CaAl_2Si_4$	21·0%
$R_2''Si$	59·3%
R''	3·1%
	100·0%.

V číslech těchto jest nápadná vysoká hodnota jádra orthosilikátového, ač dle složení mineralogického bychom očekávali převahu jádra metasilikátového. Z příkladu tohoto jest zřejmo, že rozpočet na kovová jádra Rosenbuschova poskytuje sice dobrou pomůcku při posouzení basicity horniny, nepraví však nic bližšího o skutečném minerálném složení jejím. V našem případě lze — jak zde bylo učiněno — zbytek po odečtení alkalického a vápenatého jádra: 19·76% Si a 42·60% R″ přepočísti jako orthosilikát (59·3) a něco rudy (3·1), jest možno však též předpokládati podíl metasilikátu vedle orthosilikátu a většího množství rudy, na př.

$R''Si \ldots 34\%$, $R_2''Si \ldots 8{\cdot}3\%$, $R'' \ldots 20{\cdot}1\%$.

Schází tu ovšem kriterion vzájemného poměru těchto tří jader.

Dle rozpočtu Loevinson-Lessingova[1]) platí pro naši horninu vzorec:

$$6{\cdot}9\ R\bar{O}\ .\ 1\ R_2O_3\ .\ 6{\cdot}2\ SiO_2;\ R_2'O : R''O = 1 : 20{\cdot}7;\ \beta = 127{\cdot}4,\ \alpha = 1{\cdot}2.$$

Náleží tudíž kojetínský amfibolovec mezi „ultrabasity", stoje uprostřed mezi peridotity ($12{\cdot}1\ R\bar{O}\ .\ R_2O_3\ .\ 8\ SiO_2$; $\alpha = 1{\cdot}17$) a mezi pyroxenity a rudným gabbrem ($3{\cdot}5\ R\bar{O}\ .\ R_2O_3\ .\ 3{\cdot}6\ SiO_2$; $\alpha = 1{\cdot}26$, $R_2O : RO = 1 : 21$).

Osannův vzorec horninový zní:

$$s_{43\cdot14}\, A_{2\cdot22}\, C_{3\,24}\, F_{45\cdot94};\ a_1\, c_1\, f_{18};\ n_{4\cdot4},\ \varkappa_{0\cdot66}.$$

Projekční hodnoty Osannovy jsou:

SAlF = 13·2, 1·7, 15·1. AlCAlk = 9·5, 16·6, 3·9; NK = 4·4, MC = 7·7.

Taktéž čísla rozpočtu Osannova dokazují příslušnost amfibolovce od Kojetína mezi magmata nejbasičtější. Lze srovnati její projekční hodnoty s hodnotami wehrlitu z Red Bluff Mont.[2]), jež jsou:

SAlF = 14, 1, 15, AlC Alk = 9, 15·5, 5·5, NK = 7·5, MC = 8·6.

Hlavní rozdíl mezi oběma horninami spočívá v tom, že wehrlit má více alkalií, z nichž má převahu Na. Dosti dobrá shoda jest též ve vzorcích kojetínského amfibolovce a olivinického gabbra od Big Timber Creeku v Montaně, pro nějž platí[3]) $s_{44\cdot32},\ a_{0\cdot5}\, C_2\, f_{17\cdot5};\ n = 7{\cdot}6$. Přes shodu ve vzorcích nejsou však horniny ty si chemicky tak podobny. Gabbro od Timber Creeku jest značně bohatší železem a poněkud i vápníkem, chudší pak zvláště aluminiem, magnesiem a alkaliemi. V těchto převládá Na nad K. Též projekční hodnoty jiné analysy gabbra z Timber Creek[4]) shodují se celkem dobře s amfibolovcem kojetínským, ač opět obě analysy vykazují značné rozdíly: SAlF = 13·5, 2, 14·5, AlCAlk = 9·5, 18, 2·5. NK = 7·6, MC = 6·0. Analysa gabbra vykazuje s amfibolovcem kojetínským shodu v Al_2O_3 a CaO, méně však má SiO_2, alkalií a zvláště MgO (11·56%), více pak Fe_2O_3 i FeO.

Ve státě našem popsán byl amfibolovec E. Suessem a C. Johnem od Žilošic u Brna.[5]) Jest to hornina složená skoro výhradně z amfibolu

---

[1]) Петрограф. Табльци С. Петерсбург г. 1905.

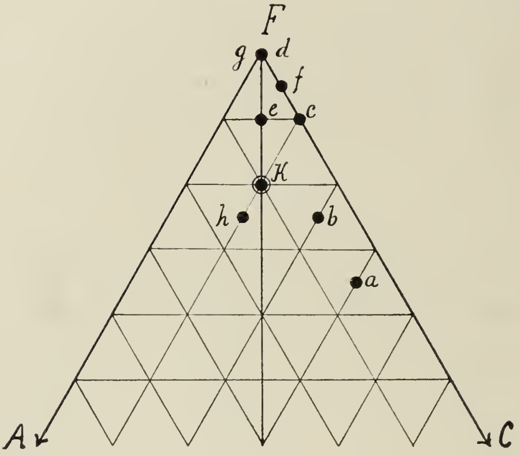
[2]) Osann, Petrochemische Untersuchungen I. 1913, analysa 423.

[3]) Osann, Tsch. M. p. M. *19.* 422, 460, analysa 153.

[4]) Osann, Petrochemische Untersuchungen I. 1913, anal. 311. Viz též Osann, Beitr. z. chem. Petrogr. II. 1905, anal. 635, str. 64.

[5]) Jhb. G. R.-A. 1908, *58*, 247—266.

($c : \gamma = 15^0 - 18^0$) s ojedinělými šupinkami sekundárního chloritu a zrnky epidotu. Uspořádáním sloupků amfibolových jest stavba horniny té rovnoběžná. Johnova analysa uvádí:



Obr. 1.

SiO_2	46·56
TiO_2	stopy
Al_2O_3	13·04
Fe_2O_3	2·83
FeO	9·92
MnO	0·16
MgO	15·31
CaO	10·10
N_2O	1·13
K_2O	0·45
P_2O_5	0·25
S	0·003
	100·173%.

Rozpočet analysy vede k hodnotám:

$$s_{46\cdot55},\ a_{0\cdot6}\ c_{2\cdot7}\ f_{16\cdot7}\ n_8,\ \varkappa = 0\cdot79.$$

SAlF = 14·2, 2·3, 13·5, AlC Alk = 11·6, 16·3, 2·1; NK = 7·9, MC = 6·8.

Srovnáním těchto hodnot s hodnotami kojetínského amfibolovce plyne, že tato hornina jest produktem ještě pokročilejší diferenciace, nežli amfibolovec od Žilošic, ana jest chudší na Si a Al, bohatší však na Mg.

Posici kojetínského amfibolovce vůči horninám příbuzným z jiných území znázorňuje dobře Osannova projekce *a c f* (viz obrazec). V projekci té značí:¹)

K = kojetínský amfibolovec ($s_{43\cdot14},\ a_1\ c_1\ f_{18}$)
a = amfibolovec ze Žilošic ($s_{46\cdot55},\ a_{0\cdot5},\ c_{2\cdot5},\ f_{16\cdot5}$)
b = oliv. gabbro, Big Timber Creek, Mont. ($s_{44\cdot32},\ a_{0\cdot5},\ c_2,\ f_{17\cdot5}$)
c = amfib. peridotit North Meadow Creek, Mont ($s_{43\cdot73},\ a_0\ c_1\ f_{19}$)
d = dunit, Dun Mts, N. Zeel. ($35\cdot17,\ a_0\ c_0\ f_{20}$)
e = wehrlit, Red Bluff, Mont. ($s_{46\cdot25},\ a_{0\cdot5}\ c_{0\cdot5}\ f_{19}$)
f = websterit, Hebbville, Md. ($s_{48\cdot91},\ a_0\ c_{0\cdot5}\ f_{19\cdot5}$)
g = websterit, Webster N. C. ($s_{49\cdot39},\ a_0,\ c_0,\ f_{20}$)
h = slídnatý peridotit, Kaltes Tal, Harz ($s_{40\cdot03},\ a_{1\cdot5}\ c_1\ f_{17\cdot5}$).

Umístění v Osannově projekci dobře charakterisuje amfibolovec od Kojetína jakožto člen nejbasičtějších eruptivních hornin hlubinných, příslušející k magmatu peridotitickému.

Na základě dosavadních znalostí našich o středočeském massivu žulovém nelze si učiniti ještě bezpečnou představu o magmatické dife-

---

¹) Viz Osann, Tsch. M. p. M. *19*, anal. 153, 204, 202, 206, 200, 197, 205.

renciaci magmatu. Jest účelem právě těchto petrografických zpráv, detailními pracemi z různých partií středočeského massivu sebrati dostatečný materiál, na základě jehož byla by možna diskuse všeobecného rázu. Tolik však lze na základě prací starších, zvláště však novějších, s jistotou říci, že štěpení středočeského žulového magmatu vedlo k typům velice odlišným, a sice jak hlubinným, tak žilným. These Suessova,[1]) že ve středočeském massivu není intensivnější magmatické diferenciace, jež by mohla býti srovnána s produkty štěpení brněnského massivu, postrádá věcného odůvodnění a plyne z toho, že Suess posuzoval náš massiv toliko na základě dat staré literatury, jejíž horninná nomenklatura byla velice primitivní a naprosto nevystihovala petrografickou pestrost massivu toho.

V Praze, v září 1920.

Mineralogický a petrografický ústav
university Karlovy v Praze.

---

[1]) l. c. 261.

Nová měření chondroditu vesuvského.

Podává

dr. Boh. Ježek v Příbrami.

(S 1 obr. v textu.)

(Předloženo dne 14. ledna 1921.)

Krystaly vesuvského chondroditu měřil Marignac 1847, A. Scacchi 1851, Hessenberg 1858, Des Cloizeaux 1862, vom Rath 1869—71, E. Scacchi 1883 a Penfield a Howe 1894.¹) Nejdůležitější jsou pojednání A. Scacchiho a hlavně práce vom Rathovy. Literatura o vesuvském chondroditu jest pečlivě sestavena ve vesuvské monografii Zamboniniově,²) o chondroditu vůbec v Goldschmidtově Atlasu.³)

Chondrodit, jehož měření tu uvádím, pochází z kusu bělavého jemně zrnitého vápence z Monte Sommy pokrytého z části drobnými medově žlutými krystalky, a byl získán r. 1919 pro sbírku musejní. Byl mi svěřen ke zkoumání ředitelem oddělení panem prof. dr. K. Vrbou, kterému tu srdečně děkuji.

* * *

Měřil jsem tři drobné jednoduché krystalky, které mají celkem stejný habitus pyramidální s velkými pyramidami řady *r*, charakterisovaný ještě velkým rozsahem klinodomat *i*. Rázovité jsou dále i malé rozměry plochy spodové *A* i to, že jest monoklinická povaha u každého stejně a velmi ostře vyznačena výskytem některých pyramid pouze jen v negat , jiných jen v posit. části krystalu. Užívám postavení vom Rathova, jež se přimyká ku přirozenému vývoji tím, že mají tvary se stejnými

---

¹) Ch. de Marignac, Arch. scienc. phys. nat., IV, 1847.
A. Scacchi, Mem. Accad. Napoli, VI, 1852; Pogg. Ann. 1853, Erg. Bd. 3.
F. Hessenberg, Min. Not. 1858, 2.
Des Cloizeaux, Man. Min. 1862; Neues Jahrb. 1876, 77.
G. vom Rath, Pogg. Ann. 1869, 138; 1871 Erg. Bd. 5; 1872, 147.
E. Scacchi, Rendic. Accad. Napoli, 1883.
S. L. Penfield a W. T. Howe, Zeitschr. Kryst., 1894, 23.

²) F. Zambonini, Mineralogia vesuviana. 1910 p. 276.

³) V. Goldschmidt, Atlas der Kristallformen.

úklony i stejné symboly, a i jeho signatury, jež, ač poněkud složitá, bere přece zřetel na parametry tvarů.

Tvary. Měřením dvojkruhovým, při kterém byla plocha spodová postavena do polu, bylo zjištěno 17 tvarů, z nichž 4 hvězdičkou označené jsou nové. Ostatní všechny jsou tvary u chondroditu nejobecnější:

$$A\,(001),\ e\,(101),\ -e\,(\bar{1}01),\ \tfrac{1}{3}e\,(103),\ -\tfrac{1}{3}e\,(\bar{1}03),\ i\,(012),\ n\,(111),$$
$$-n\,(\bar{1}11),\ -\tfrac{1}{3}n\,(\bar{1}13),\ 2\,r^{*}\,(241),\ r\,(121),\ \tfrac{1}{5}r\,(125),\ -\tfrac{1}{3}r\,(\bar{1}23),$$
$$-\tfrac{7}{26}r^{*}\,(\bar{7}\,.\,14\,.\,26),\ -\tfrac{1}{7}r\,(\bar{1}27),\ -\tfrac{2}{15}m^{*}\,(\bar{6}\,.\,4\,.\,15),\ -\tfrac{2}{3}m^{*}\,(\bar{6}43).$$

Poměr poloos vypočetl jsem z úhlů tvaru e a i ku ploše spodové měřených u kryst. čís. 3. Plochy ty reflektovaly signál nadmíru dokonale, použil jsem největšího zvětšení signálu a několikrát opakovaná měření nedala žádné úchylky. Z úhlů

$$A\,(001):e\,(101)=70^{0}\,56'$$
$$A\,(001):i\,(012)=57^{0}\,30'$$

vypočten poměr poloos:

$$a:b:c=1{\cdot}08506:1:3{\cdot}13937,$$

při čemž vzat úhel meziosní $\beta=90^{0}$.

Tento poměr poloos blíží se poměru stanovenému vom Rathem (odvozenému z elementů klinohumitu) tak, že se v žádné ose neliší ani o celých 5 tisícin a souhlasí znamenitě i s elementy vypočtenými A. Scacchim z $A:e=71^{0}\,1'\,42''$ a $A:i=57^{0}\,30'\,30''$.

A. Scacchi	1852	$a:b:c=1{\cdot}0796:1:3{\cdot}1404.$
G. vom Rath	1871	$=1{\cdot}08028:1:3{\cdot}14379.$
Ježek	1921	$=1{\cdot}08506:1:3{\cdot}13937.$

Různost úklonů tvarů positivních a negativních ku ploše spodové, jež by nasvědčovala odchylce úhlu meziosního β od 90^{0} uvádí poprve vom Rath úhly dvou krystalů:

$$A:e=70^{0}\,47' \qquad 70^{0}\,53'$$
$$A:-e=70^{0}\,51\tfrac{1}{2}' \qquad 70^{0}\,59'.$$

Des Cloizeaux 1876 zjistil také různé úklony

$$A:e=71^{0}\,2'$$
$$A:-e=70^{0}\,55',$$

poznav však dvojčatný zákon dle (001) a okolnost, že lamelární srůst dle tohoto zákona netvoří žádných zapuklých úhlů na plochách e, přijal pro oba tyto tvary stejný úklon $70^{0}\,59'$.

Také Penfield a Howe uvádí u jednoho vesuvského krystalu rozdíly v úhlech u ploch pásma orthodiagonálního:

$$A:e=70^{0}\,52' \qquad A:\tfrac{1}{3}e=44^{0}\,1'$$
$$A:-e=70^{0}\,48' \qquad A:-\tfrac{1}{3}e=43^{0}\,52',$$

ale u základních pyramid téhož krystalu vyvinutých v obou polovinách krystalu jest větší úklon v části positivní než v negativní.

Z mých krystalů hodily se k studiu tomuto jen čís. 2 a 3, které měly dobré plochy spodové, zvláště ale čís. 3 s jednou velmi znamenitou básí A. Měřené úklony jsou

	Čís. 2.	Čís. 3.
$A\,(001) : e\,(101)$	$70^0\,55\frac{1}{2}'$	$70^0\,52\frac{1}{2}'$
$: -e\,(\bar{1}01)$	$70^0\,59'$	$70^0\,56'$
$: \frac{1}{3}e\,(103)$	$44^0\,00'$	$43^0\,55'$
$: -\frac{1}{3}e\,(\bar{1}03)$	$44^0\,01'$	$43^0\,56'$
$: n\,(111)$	—	$76^0\,48\frac{1}{2}'$
$: -n\,(\bar{1}11)$	—	$76^0\,51\frac{1}{2}'$

Je tu tedy *větší* úhel ku ploše spodové v části *positivní,* jak to shledal vom Rath, kdežto Des Cloizeaux i Penfield a Howe uvádějí poměry opačné. Rozdíl jest u obou mých krystalů náhodou stejný, v úklonech $e : -e$ jsou to $3\frac{1}{2}'$, v úklonech $\frac{1}{3}e : -\frac{1}{3}e$ jedna minuta. Z tak malého počtu měření nelze ovšem ještě odvozovati odchylku meziosního úhlu β od 90^0 a jest třeba studia obsáhlejšího materiálu.

Výskyt tvarů positivních a negativních. Výskyt některých tvarů pouze v kvadrantech pos. a jiných jen v negat. byl znám v terminologii soustavy jednoklonné jako hemiedrie humitová. Vom Rath zdůraznil tuto okolnost nejostřeji a označil jako positivní:

$$+r\,(121),\ +\tfrac{1}{5}r\,(125),\ [+\tfrac{1}{3}m\,(323)],$$

a jako negativní:

$$-\tfrac{1}{3}r\,(\bar{1}23),\ -\tfrac{1}{7}r\,(\bar{1}27),\ -m\,(\bar{3}21),\ -\tfrac{1}{5}m\,(\bar{3}25).$$

Jako pos. i neg. uvádí tvary $e,\ \frac{3}{5}e,\ \frac{1}{3}e,\ n,\ \frac{1}{3}n.$

Positivními jsou tu míněny tvary předních hořeních oktantů $(h\,k\,l)$, negativními zadních hořeních oktantů $(\bar{h}\,k\,l)$, tedy opačně nežli u Naumannova označování.

Pokud tvary tyto na mých krystalech byly zastoupeny, shledal jsem přesně tytéž poměry. Z nových jistých tvarů byla positivní dvakrát se vyskytnuvší pyramida $2\,r$, negativní *vždy* na všech třech krystalech přítomné tvary:

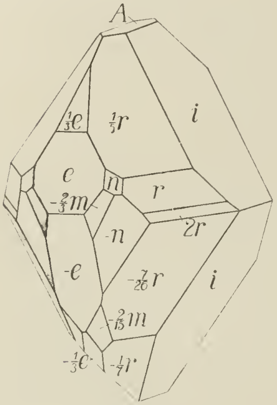
$$-\tfrac{2}{15}m\,(\bar{6}\,.\,4\,.\,15)\quad \text{a}\quad -\tfrac{2}{3}m\,(\bar{6}43).$$

Nové tvary. $2\,r\,(241)$ vyskytl se pouze na kryst. čís. 1 a byl zastoupen dvěma užšími ale velmi dobře reflektujícími plochami v části positivní. Je to tvar jistý, ale podřízenější.

$-\frac{7}{26}r\,(\bar{7}\,.\,14\,.\,26)$. Tvar zastoupen byl na jediném krystalu (čís. 1.) jednou znamenitě reflektující plochou, jež byla ze všech ploch pyramid na krystalu nejrozsáhlejší. Měření souhlasí s výpočtem úplně. Mám tuto pyramidu za vicinálu pyramidy $-\frac{2}{7}r\,(\bar{2}47)$ vzdálené od ní $1^0\,24'$.

$$A\,(001) : -\tfrac{2}{7}r\,(\bar{2}47) = 63^0\ \ 9'$$
$$: -\tfrac{7}{26}r\,(\bar{7}\,.\,14\,.\,26) = 61^0\,45'.$$

Nové pyramidy $-\frac{2}{15}m$ $(\bar{6}.4.15)$ a $-\frac{2}{3}m$ $(\bar{6}43)$ jsou na všech třech krystalech vždy jen v negativních částech, jež jsou jimi charakterisovány stejně ostře jako pyramidami $-\frac{1}{3}r$ a $-\frac{1}{7}r$. Plochy jejich byly někdy znamenité, vždy i při velmi malém rozsahu alespoň dobré. Skoro bez výjimky jest $-\frac{2}{15}m$ rozsáhlejší než $-\frac{2}{3}m$. Měřil jsem 6 ploch pyramidy $-\frac{2}{15}m$ a 7 ploch $-\frac{2}{3}m$. Oba tvary jsou jisté a pro vývoj mých krystalů typické.



Obr. 1.

Přehled měření.

1. Krystal čís. 1, tmavě medově žlutý, 2·02 *mm* veliký. Hustota stanovená v roztoku Rohrbachově $h = 3{\cdot}128$. Obr. 1.

$A, e, -e, \frac{1}{3}e, -\frac{1}{3}e, i, n, -n, \frac{1}{5}r, r, 2r, -\frac{1}{7}r, -\frac{7}{26}r, -\frac{1}{3}r, -\frac{2}{15}m, -\frac{2}{3}m.$

2. Krystal čís. 2, nahnědle medově žlutý, 1·6 *mm* veliký. Hustota stanovená v roztoku Rohrbachově $h = 3{\cdot}145$.

$A, e, -e, \frac{1}{3}e, -\frac{1}{3}e, i, -n, -\frac{1}{5}r, r, -\frac{1}{7}r, -\frac{1}{3}r, -\frac{2}{15}m, -\frac{2}{3}m.$

3. Krystal čís. 3, medově žlutý, 1·82 *mm* veliký. Hustota stanovená v roztoku Rohrbachově $h = 3{\cdot}162$.

$A, e, -e, \frac{1}{3}e, -\frac{1}{3}e, i, n, -n, -\frac{1}{3}n, \frac{1}{5}r, r, -\frac{1}{7}r, -\frac{1}{3}r, -\frac{2}{15}m, -\frac{2}{3}m.$

Krystal čís. 1.

Sign.	Gdt.	Miller	φ		ϱ		Počet ploch
			měřeno	vypočteno	měřeno	vypočteno	
A	0	001	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	2
e	10	101	90 00	90 00	70 56	70 56	2
$\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}0$	103	90 00	90 00	44 00	43 57¾	2
$-e$	-10	$\bar{1}01$	90 00	90 00	70 55	70 56	1
$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}0$	$\bar{1}03$	90 00	90 00	43 58	43 57¾	1
i	$0\frac{1}{2}$	012	0 00	0 00	57 40	57 30	4
n	1	111	42 45	42 40	76 57	76 49	4
$-n$	-1	$\bar{1}11$	42 21	42 40	76 41	76 49	2
$\frac{1}{5}r$	$\frac{1}{5}\frac{2}{5}$	125	24 42	24 44½	54 12	54 7½	4
r	12	121	24 52	24 44½	81 53	81 46	2
$2r$	24	241	24 32	24 44½	86 05	85 52	2
$-\frac{1}{7}r$	$-\frac{1}{7}\frac{2}{7}$	$\bar{1}27$	24 42	24 44½	44 42	44 38½	2
$-\frac{7}{26}r$	$-\frac{7}{26}\frac{7}{13}$	$\bar{7}.14.26$	24 42	24 44½	61 45	61 45	1
$-\frac{1}{3}r$	$-\frac{1}{3}\frac{2}{3}$	$\bar{1}23$	24 40	24 44½	66 34	66 32½	3
$-\frac{2}{15}m$	$-\frac{2}{5}\frac{4}{15}$	$\bar{6}.4.15$	53 56	54 07	64 54	64 58¾	2
$-\frac{2}{3}m$	$-2\frac{4}{3}$	$\bar{6}43$	54 09	54 07	84 37	84 40	4

Krystal čís. 2.

Sign.	Gdt.	Miller	φ		ϱ		Počet ploch
			měřeno	vypočteno	měřeno	vypočteno	
A	0	001	0^0 $0'$	0^0 $0'$	0^0 $0'$	0^0 $0'$	2
e	10	101	90 00	90 00	70 55½	70 56	2
$\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}0$	103	90 00	90 00	44 0	43 57¾	1
$-e$	-10	$\bar{1}01$	90 00	90 00	70 59	70 56	2
$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}0$	$\bar{1}03$	90 00	90 00	44 01	43 57¾	1
i	$0\frac{1}{2}$	012	0 00	0 00	57 34	57 30	2
$-n$	-1	$\bar{1}11$	42 47	42 40	76 52	76 49	2
$\frac{1}{5}r$	$\frac{1}{5}\frac{2}{5}$	125	24 48	24 44½	53 54	54 7½	4
r	12	121	24 39	24 44½	81 40	81 46	3
$-\frac{1}{7}r$	$-\frac{1}{7}\frac{2}{7}$	$\bar{1}27$	24 50	24 44½	44 45	44 38½	3
$-\frac{1}{5}r$	$-\frac{1}{3}\frac{2}{3}$	$\bar{1}23$	24 40	24 44½	66 34	66 32½	3
$-\frac{2}{15}m$	$-\frac{2}{5}\frac{4}{15}$	$\bar{6}.4.15$	54 15	54 07	65 00	64 58¾	2
$-\frac{2}{3}m$	$-2\frac{4}{3}$	$\bar{6}43$	53 50	54 07	84 35	84 40	1

Krystal čís. 3.

Sign	Gdt	Miller	φ		ϱ		Počet ploch
			měřeno	vypočteno	měřeno	vypočteno	
A	0	001	$0^0\,00'$	$0^0\,00'$	$0^0\,00'$	$0^0\,00'$	2
e	10	101	90 00	90 00	70 52½	70 56	2
$\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}0$	103	90 00	90 00	43 55	43 57¾	2
$-e$	-10	$\bar{1}01$	90 00	90 00	70 56	70 56	2
$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}0$	$\bar{1}03$	90 00	90 00	43 56	43 57¾	1
i	$0\frac{1}{2}$	012	0 00	0 00	57 30	57 30	3
n	1	111	42 42	42 40	76 48½	76 49	4
$-n$	-1	$\bar{1}11$	42 42	42 40	76 51½	76 49	4
$-\frac{1}{3}n$	$-\frac{1}{3}$	$\bar{1}13$	42 42	42 40	54 56½	54 54	2
$\frac{1}{5}r$	$\frac{1}{5}\frac{2}{5}$	125	24 47	24 44½	54 8½	54 7½	2
r	12	121	24 46	24 44½	81 50	81 46	4
$-\frac{1}{7}r$	$-\frac{1}{7}\frac{2}{7}$	$\bar{1}27$	24 44	24 44½	44 42	44 38½	2
$-\frac{1}{3}r$	$-\frac{1}{3}\frac{2}{3}$	$\bar{1}23$	24 44	24 44½	66 35½	66 32½	2
$-\frac{2}{15}m$	$-\frac{2}{5}\frac{4}{15}$	$\bar{6}.4.15$	54 3	54 7	65 1½	64 58¾	2
$-\frac{2}{3}m$	$-2\frac{4}{3}$	$\bar{6}43$	54 5	54 7	84 41	84 40	2

Tabulka úhlů. Ku konci uvádím tabulku posičních úhlů vypočtenou z mého poměru parametrů proto, že orientace vzatá za základ v Goldschmidtových Winkeltabellen jest i pro měření i pro počet méně výhodná. V tabulce této nerozlišuji tvarů + a —.

Chondrodit (jednoklonný).

$a : b : c = 1{\cdot}085 : 1 : 3{\cdot}139;\ \beta = 90^0.$

Sign.	Gdt.	Miller	φ	ϱ
A	0	001	0° 0′	0° 0′
B	∞ 0	100	90 0	90 0
C	0 ∞	010	0 0	90 0
$\frac{1}{2}\,o$	∞	110	42 20	90 0
o	∞ 2	120	24 44½	90 0
$\frac{1}{4}\,o$	2 ∞	210	61 31	90 0
$2\,i$	01	011	0 0	72 20
i	$0\ \frac{1}{2}$	012	0 0	57 30
$\frac{4}{7}\,i$	$0\ \frac{2}{7}$	027	0 0	41 53½
$\frac{1}{2}\,i$	$0\ \frac{1}{4}$	014	0 0	38 7½
$\frac{2}{5}\,i$	$0\ \frac{1}{5}$	015	0 0	32 7½
$2\,e$	20	201	90 0	80 12
$\frac{4}{3}\,e$	$\frac{4}{3}\ 0$	403	90 0	75 28
e	10	101	90	70 56
$\frac{3}{5}\,e$	$\frac{3}{5}\ 0$	305	90 0	60 3½
$\frac{1}{2}\,e$	$\frac{1}{2}\ 0$	102	90 0	55 21
$\frac{1}{3}\,e$	$\frac{1}{3}\ 0$	103	90 0	43 57¾
$\frac{1}{5}\,e$	$\frac{1}{5}\ 0$	105	90 0	30 3½
n	1	111	42 40	76 49
$\frac{2}{3}\,n$	$\frac{2}{3}$	223	42 40	70 38½
$\frac{1}{2}\,n$	$\frac{1}{2}$	112	42 40	64 54
$\frac{1}{3}\,n$	$\frac{1}{3}$	113	42 40	54 54
$\frac{1}{5}\,n$	$\frac{1}{5}$	115	42 40	40 29½
$2\,r$	24	241	24 44½	85 52
r	12	121	24 44½	81 46
$\frac{1}{3}\,r$	$\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}$	123	24 44½	66 32½
$\frac{2}{7}\,r$	$\frac{2}{7}\ \frac{4}{7}$	247	24 44½	63 9
$\frac{7}{26}\,r$	$\frac{7}{26}\ \frac{7}{13}$	7.14.26	24 44½	61 45
$\frac{1}{5}\,r$	$\frac{1}{5}\ \frac{2}{5}$	125	24 44½	54 7½
$\frac{1}{7}\,r$	$\frac{1}{7}\ \frac{2}{7}$	127	24 44½	44 38½
m	32	321	54 7	86 26½
$\frac{2}{3}\,m$	$2\ \frac{4}{3}$	643	54 7	84 40
$\frac{1}{3}\,m$	$1\ \frac{2}{3}$	323	54 7	79 25½
$\frac{1}{5}\,m$	$\frac{3}{5}\ \frac{2}{5}$	325	54 7	72 43
$\frac{1}{7}\,m$	$\frac{3}{7}\ \frac{2}{7}$	327	54 7	66 27¾
$\frac{2}{15}\,m$	$\frac{2}{5}\ \frac{4}{15}$	6.4.15	54 7	64 58¾
$\frac{1}{11}\,m$	$\frac{3}{11}\ \frac{2}{11}$	3.2.11	54 7	55 36½

O hálkách roztočů.

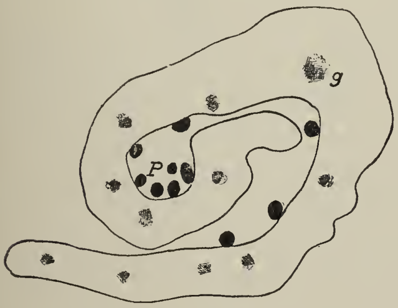
Napsal

Dr. Bohumil Němec.

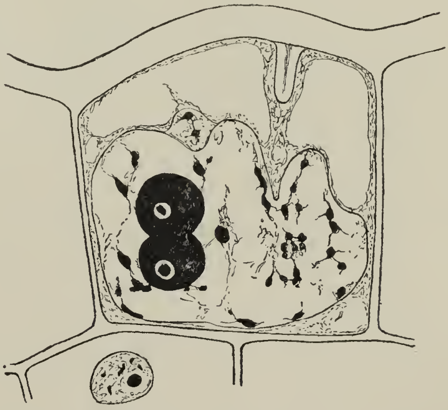
(Se 6 obrazci v textu.)

Předloženo dne 28. ledna 1921.

Tento příspěvek k poznání hálek roztočů obsahuje sdělení o dvou hálkách vznikajících svinutím listového okraje jakož i o hálce podobné t. zv. neštovicím. *Eriophyes Galii* Karp. na *Galium Mollugo* L. Sbíral jsem tuto hálku počátkem července r. 1911 na břehu Vltavském u Hodkoviček, kdež rostliny byly silně roztočem napadeny. Listy jsou úplně svinuty (obr. 1) a sice nahoru, takže hoření pokožka byla uvnitř hálky, v menší míře též spodní. Ve svinutých listech bylo množství roztočů, z nichž jen ojedinělé exempláře seděly na pokožce spodní strany, většina na svrchní. Napadený list byl maličko tlustší než normální, stavba jeho byla však jednodušší. Palisádový parenchym nebyl v rozsahu hálky vůbec vyvinut, intercelulary v mesofylu byly menší,



Obr. 1. Příčný řez listem svízelu *Galium Mollugo*, svinutým vlivem roztoče *Eriophyes galii*. *P* = roztoči.

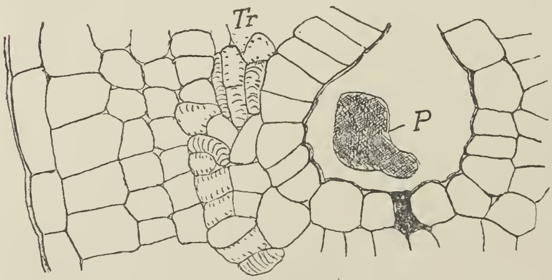


Obr. 2. Pokožková buňka hálky *Er. galii* s velikým jádrem a stopou po ssání (fix. Fleming. rozt.).

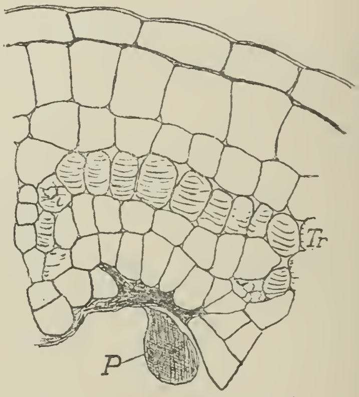
takže houbové pletivo činilo dojem parenchymu složeného z vakovitých buněk. Průduchy spodní strany byly normálně vytvořeny. Buňky pokožky strany svrchní jsou zveličelé, chovají hojně cytoplasmy a ohromné jádro tvaru většinou nepravidelného (obr. 2), mnohem větší než jsou jádra normální. Uvnitř jader leží veliká jadérka a nepravidelně rozložená tělesa chromatinová.

Zevní blána buněk pokožkových strany hoření je tlustá, blána pokožky spodní strany i v hálce je tenká. Ale i v nich je jádro zvětšené a cytoplasma rozhojněna. Poněvadž se největší změny jeví v buňkách pokožkových; můžeme ji považovati za vrstvu živnou. Žádná z pokožkových buněk nebyla odumřelá. V některých z nich pozoroval jsem čípkovité výrůstky s blanou ztluštělou (obr. 2), které lze považovati za stopy po ssání. Je jich však poměrně málo, méně nežli v hálkách *E. padi a tiliae.* Nejspíše ssaje v naší hálce roztoč na jednom místě déle než v hálkách jiných.

Eriophyes tetanothrix Nal. a *Er. truncatus* Nal. na *Salix purpurea* L. Oba roztoči způsobují svinování listových okrajů na vrbě, obyčejně jsou v hálce pospolu. Sbíral jsem hálku u Ostroměře v r. 1907 a později r. 1913 u Poděbrad, materiál byl hned na místě ve Flemmingově tekutině fixován. Okraj listu byl svinut na spodní stranu, v rozsahu hálky byl list tlustší než normální čepel, jež sestávala asi ze 7 vrstev buněčných, kdežto v hálce až z 9 vrstev. Stavba čepele v hálce byla však jednodušší, bez zřetelných palisád a houbového pletiva. Vnitřní pokožka má charakter cylindrického epithelu (obr. 3), v mesofylu jsou jedna nebo dvě vrstvy buněk vyvinuty jako krátké tracheidy s kruhovitým spirálním až síťovitým stluštěním blány (obr. 3, 4), ale s živým obsahem.

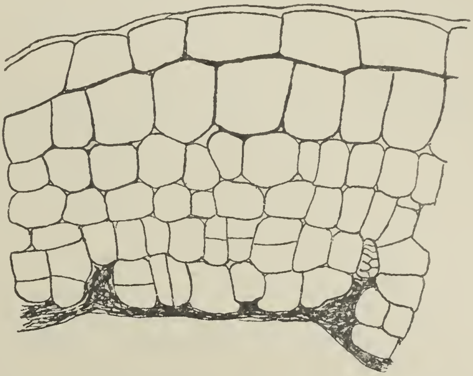


Obr. 3. Příčný řez hálkou *Er. truncatus* na listech vrby *Salix purpurea. P* = roztoči, *Tr* = tracheidovité buňky.



Obr. 4. Příčný řez hálkou *Er. truncatus* na listech vrby *Salix purpurea. P* = roztoči, *Tr* = tracheidovité buňky.

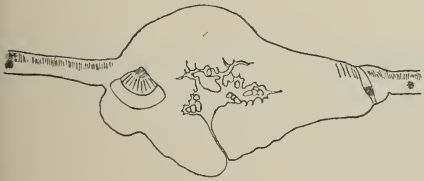
Pokožka je na mnohých místech desorganisována a zbývá z ní jen homogeně se barvící vrstva (obr. 4, 5). Buňky pod ní se nalézající trochu kalusovitě vyrůstají a dělí se antiklinálně i periklinálně (obr. 5). Není pochyby, že také zde je pokožka živnou vrstvou, ale buňky jsou roztočem usmrcovány. Od živné vrstvy v hálce roztoče *Er. Thomasi* liší se živná vrstva naší hálky chudším obsahem plasmatickým a menší dělivostí.



Obr. 5. Příčný řez hálkou *Er. truncatus* na listech vrby *Salix purpurea*. *P* = roztoči, *Tr* = tracheidovité *i* buňky. Ve stěně hálky jediná buňka tracheidovitá. Mesofyl v sousedství odumřelé pokožky dělí se antiklinálně i periklinálně.

Zmíněná vrstva hydrostereid není sice v celém rozsahu hálky vyvinuta, ale přece asi má význam hlavně mechanický a ochranný. Někdy desorganisace buněk postupuje až k těmto buňkám (obr. 4). Hálka má vůbec charakter chrupavčitý.

Eriophyes tristriatus Nal. na *Iuglans regia* L. Tento roztoč způsobuje na listech ořechových uzlíčkovité ztlušteniny, do nichž vede ze spodu otvor (obr. 6). Uvnitř hálky je dutina nepravidelného tvaru, z níž vedou na všecky strany nepravidelné intercelulary. Svůj materiál sbíral jsem v okolí Jičína v červenci r. 1914 a ač byly hálky na místě v roztoku Flemmingově fixovány, neobsahovaly mnoho roztočů.



Obr. 6. Příčný řez hálkou roztoče *Eriophyes tristriatus* na listu ořechovém.

Každá hálka přisedá ke svazku cévnímu a její vnitřní tkáň skládá se většinou z velkých vakovitých buněk opatřených velkými jádry laločnatého a zaškrcovaného tvaru. Odumřelých buněk tu není, dutina vzniká nejspíše schizogeně, neboť pokožka spodní strany vniká jen asi do poloviny délky chodbičky dovnitř vedoucí. Roztoče nalezl jsem hlavně v užších postranních intercelulárách. Zde obsahují buňky množství škrobových zrn a stěny některých také vykazují čípkovité ztlušteniny, které považuji za stopy po ssání.

Hálka tato má vzdálenou podobnost s t. zv. neštovicemi na listech hruškových. Ty však vznikají hlavně zvětšováním buněk a mezibunečných prostor v houbovém parenchymu a nemají ani speciálního kanálku vstupního ani ústřední dutiny.

Také pokožkové buňky spodní i svrchní strany normálních listů ořechových vykazovaly na některých mých preparátech stopy po ssání, ale bez nějakých cytologických dalších změn. Není nemožno, že to jsou stopy po nějakých volně žijících roztočích, jichž Nalepa uvádí celou řadu. Na listech ořechových žije *Phyllocoptes unguiculatus* Nal. a způsobuje prosté hnědnutí listů. Stopy ty liší se podstatně od haustorií, jež do pokožkových listů vysílají houby z rodu *Erysipe,* na př. *Microsphaera alni* Wallr. a které jsem na srovnání ohledal.

Eocén u Nové Bašky (Besca Nuova) na ostrově Krku (Veglia).

(S mapkou v textu.)

Napsal

MUDr. Mauric Remeš v Olomouci.

Předloženo dne 14. ledna 1921.

Roku 1911 objevil jsem v Nové Bašce eocénové vrstvy, na zkameněliny bohaté. Na základě mého dopisu a s mým svolením učinil o nich první zmínku Dr. R. J. Schubert ve spisu „Geologischer Führer durch die nördliche Adria.“[1]) Sám uveřejnil jsem r. 1912 pojednání: „Ein Beitrag zur Kenntnis des Eocäns bei Besca nuova auf der Insel Veglia“,[2]) roku 1913 pak populární článek „Geologické poměry Bašky a bližšího okolí“ v lázeňském listu „Baška“.[3]) Velké obtíže působilo určení četných měkkýšů, neboť nemohl jsem najíti odborníka, který by byl s to práci tu podniknouti. Teprve pan Maurice Cossmann v Paříži mi část jich určil. Ostatní zpracoval p. prof. Dr. P. Oppenheim v Berlíně a podal o nich zprávu: „Die Eocänfauna von Besca Nuova auf der Insel Veglia,“[4]) v níž uvádí také čtyři pro Bašku nové druhy korálů a jednu ježovku. Cossmannem určené druhy měkkýšů, dosud neuveřejněné, uvádím níže v seznamu zkamenělin.

V červenci roku 1914 dlel jsem na Bašce po druhé a použil krátkého, válkou přerušeného pobytu k dalšímu studiu. Zjistil jsem tenkráte, že rozšíření těchto na zkameněliny bohatých vrstev je značně větší než jsem se původně domníval. Také přinesl jsem odtamtud další zkameněliny, ze kterých neznámé druhy laskavě mi určil pan prof. Oppenheim. Jsem mu proto díky zavázán. Uvedu nejdříve nová naleziště, potom zkameněliny v nich nalezené a konečně důsledky, ke kterým seznam dosud známých druhů vede.

---

[1]) Sammlung geologischer Führer. Berlin, Gebr. Bornträger Bd. XVII, pag. 128.

[2]) Verhandlungen der k. k. geolog. Reichsanstalt 1912. Nr. 7, pag. 213—215.

[3]) Baška r. 1913 č. 5.

[4]) Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt 1914. Nr. 7 u. 8, pag. 189—202.

Konaje četné procházky v údolí ,,Velké řeky" shledal jsem, že kameny, ze kterých jsou zbudovány ploty kol vinohradů, obsahují zkameněliny. Hornina je táž jako v nalezišti u hôtelu Praga a také druhy stejné. Některé kousky horniny jsou více pískovcovité, podobné hornině na vrchu sv. Michala. Tázal jsem se, odkud byly vzaty ony kameny. Odpověď zněla: ,,Z míst, kde stojí ploty."

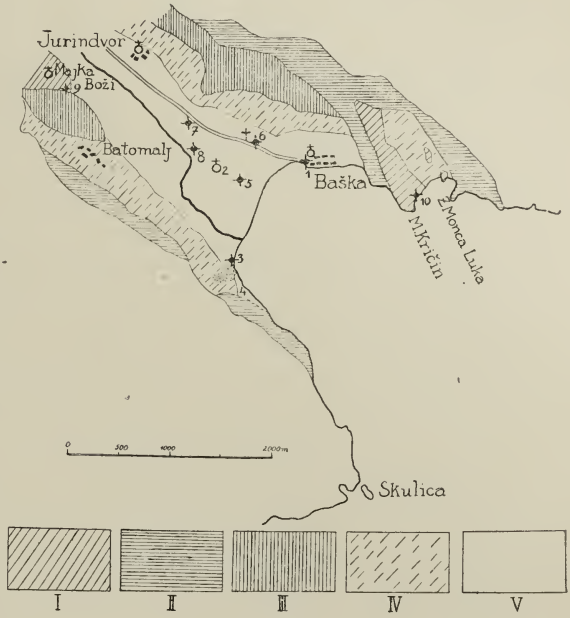
Ze dvou mám zkameněliny a to: 1. od obecné školy (Pučka škola) v osadě Bašce, 2. od potoka, který teče od vrchu s kapličkou sv. Michala k moři. Pučka škola a sousední stavby stojí nepochybně na stejných vrstvách, jaké vystupují u Pragy. Větší a menší kusy stejné horniny leží tu všude v okolí a zvláště velké balvany jsou v plotech. V nevelké hloubce pokračují stejné vrstvy od osady Bašky směrem ke sv. Michalu. Nasvědčují tomu balvany v plotech vinohradů i přímo vystupující skála, mnou zjištěná, nedaleko uvedeného potoka.

Velké balvany stejné horniny s korály a jinými zkamenělinami viděl jsem také v plotech u Batomalje, na konci osady směrem od Batomalje k Bašce. Protože nejsou asi z daleka přineseny, musí zde někde vystupovati. Balvany vápenců, jen nummulity obsahujících, jsou u Batomalje hojné. O pahorku s kaplí sv. Michala zmiňuji se už v první své zprávě. Tehdejší údaje mohu nyní doplniti. Na západní a jihozápadní straně jsou pískovce, které na jižní straně, těsně nad vinohrady, obsahují zkameněliny a přecházejí dále ve vrstvy více slínité, až konečně v horninu podobnou, ne-li totožnou s onou, vystupující u hôtelu Praga. Tato vrstva se zkamenělinami má šířku asi 13 kroků. U stezky, vedoucí z Bašky na horu ke kapličce po levé straně, nedaleko vrcholu, možno zase zjistiti pískovce. Tyto pískovce zaujímají východní a severovýchodní část návrší. Soudím, že celý vrch je složen z pískovce, jímž prochází asi od sz k jv pásmo, obsahující zkameněliny. Jdouce po silnici z Bašky směrem k Jurindvoru, můžeme Waagenovu geologickou mapu dále doplniti. Za villou Ivkou, asi uprostřed mezi ní a křížem, vystupují po pravé straně silnice pískovce s nezřetelnými zkamenělinami. Viděl jsem v nich jen odlitky trubic, asi jako prst tlustých (Serpula?), pak tu a tam otisk bivalvy bez skulptury, nezřetelný, neurčitelný.

Mezi jmenovaným křížem a Jurindvorem, dále na severozápad, u ostrého záhybu silnice, viděti vlevo, těsně u silnice, slínité vrstvy nummulitové a hned vedle nich k severozápadu pískovce bez zkamenělin. Tyto nummulitové vrstvy odpovídají vrstvám, jaké jsem nahoře popsal na jv. svahu pahorku sv. Michala. Mezi zkamenělinami převládají nummuliti, viděl jsem však mezi nimi i Alveolinu a řídce jiné zkameněliny.

Od toho místa na jih vyčnívají uprostřed vinohradů kupy kamení. Že zde vystupují pískovce, mohl jsem zjistiti. Nepochybně jsou i nummulitové vrstvy zastoupeny. Protože místo je hodně porostlé křovím, nebylo možno je blíže ohledati. V řečišti „velké řeky", za Riegrovou stezkou směrem k „Majce Boží", viděti rovněž vyčnívati skálu — myslím pískovcovou.

Nové naleziště zkamenělin objevil jsem nedaleko vrchu „Majka Boží" (na speciální mapě 1 : 75.000 St. Madonna). Kousek před prvním schodem, vedoucím na horu ke kostelu, je můstek. Na levo od něho rozprostírá se rokle. V této rokli vystupují šedavé, temnější a světlejší, zvrstvené, slínité usazeniny třetihorní, obsahující zkameněliny — ovšem nemnohé. Na jednom místě, blíže vchodu, našel jsem ježovku a kousek cerithia, o něco dále nummulity, dosti hojné. Mimo to exemplář neurčitelného malého gasteropoda a věžovité formy Serpula spirulaea Lam.



U sv. Kosmy pokrývají vrstvy písečnaté eocénové usazeniny ve větším rozsahu než Waagen i já uvádíme. Waagen naznačil ve velkém rozsahu na těchto místech „Gehängeschutt und Brekcie." Mnoho zaujímají z toho ony písky. Brekcie je místy neobyčejně pevně ztmelená a obsahuje mezi ostrými úlomky hornin i recentní skořápky hlemýžďů, na Bašce velmi hojných.

U hôtelu Praga našel jsem na starém, v první i této zprávě „1" naznačeném nalezišti, *nad* dosud vykořisťovanými vrstvami petrograficky stejné vrstvy, ale s poněkud odlišnou faunou.

U starého mola je lom nummulitových vápenců, velmi pevných. U lomu je dům četnické stanice. Mezi ním a prvním baščanským domem vystupují zřetelně pískovce bez zkamenělin.

Na výletě, podniknutém do zátoky „Monca Luka", lázeňskými hosty nazvané „zátoka Robinsonova", zjistil jsem některé odchylky od Waagenovy geologické mapy. V pobřežním pásmu, odpovídajícím asi středu zátoky, vidíme spadlé, sesuté brekcie křídové. Dle mapy je zde menší křídový útes. Mezi ním a nummulitovým vápencem, na východní straně zátoky naznačeném, vystupuje pískovec. Západní část zátoky zaujímá dle mapy svrchní rudistový vápenec a brekcie. V této části — a to v druhém chobotu směrem od mysu Kričina — našel jsem těsně u břehu nummulitové vápence, obsahující mimo nummulity i jiné zkameněliny. Vápence jsou velmi pevné, v menším rozsahu v levém horním rohu tohoto chobotu poněkud slínité.

To by byly nové podrobnosti ke geologické mapě okolí Nové Bašky.

Na jednotlivých místech nalezeny byly tyto zkameněliny:

PUČKA ŠKOLA. *Alveolina elongata* d'Orb.[1] (Stejná jako u Pragy. Schubert určil Alveolinu z Bašky jako Alveolina cf. bacillum Stache.)

Phasianella cf. subturbiformis de Greg.
Chama granulosa d'Arch.
Lucina Chalmasi Cosm. (ex aff. L. globosa Desh.), velký exemplář.
Lucina cf. Chalmasi Cosm., malý exemplář,
Crassatella sp.?

POTOK MEZI SV. MICHALEM A SV. MARKEM.

Alveolina elongata d'Orb.
Dendracis Gervillei Defr.
Stylocoenia monticularia Schweigg.
Trochocyathus?
Cardium sp. větší a menší exempláře, jaké se v nalezišti u Pragy vyskytují hojné. Mezi nimi nepochybně též
Cardium cf. Rouaulti Bellardi.
Cerithium aff. aurorae Oppenheim.
Cerithium lamellosum Brug.
Nerita circumvallata Bay.
Trochus Bolognai Bayan.
Trochus sp.?
Terebellum sp.
Patella sp.?
Serpula sp. protáhlá, nestočená rourka červa, asi 3 *cm* dlouhá, 1 ½ *mm* v průměru.
Neurčitelné bivalvy.

PAHOREK SV. MICHALA. O nummulitech z této lokality zmiňuji se už v první své zprávě.

Alveolina elongata d'Orb. méně hojná než na ostatních nalezištích.
Nummulites striatus Defr.
Cidaris sp. — osten.
Cerithium lamellosum Brug.
Cytherea elegans Lk.
Cytherea suberycinoides Defr.
Terebellum sp.

---

[1] Alveolina eongata pochází z Defranceova: Dictionnaire des sciences natur. D'Orbigny připojoval své jméno i při menších změnách, které v generickém postavení provedl.

? *Cassis* sp.
Pecten sp.
Dosti četná kamenná jádra gasteropod a bivalv.

MAJKA BOŽÍ. *Schizaster cf. Archiaci* Cott. nebo *vicinalis* Ag.
Turritella Oppenheimi Newton. Úlomek, určený srovnáním s exempláři od Sv. Kosmy.

Nummuliti souhlasí s kulatými tvary, jakých je hojnost omletých v drobném štěrku na nábřeží. Byly by to:

Gümbelia perforata d'Orb. — *lucasana* Defr. (totiž z okruhu těch forem).
Paronaea, snad příslušná k *biarritzensis* Arch. — *Guettardi* Arch.

HOTEL PRAGA. Svrchní vrstvy:
Alveolites elongata Defr.
Orbitolites complanatus Lk. zvláště hojný.
Nummulites striatus Defr.
Hydractinia?

MONCA LUKA. Z nummulitů:
Assilina spira Roissy.
,, *subspira.*
,, *exponens* Sow.
,, *subexponens* Sow.
Gümbelia a *Paronaea* jak nahoře uvedeno u naleziště ,,Majka Boží"
Serpula (Rotularia) spirulaea Lam.
Serpula sp. tlustší rourky v úlomcích.
Schizaster sp.?
Zbytky ježovek a hvězdic.
Trochus sp., dvě malá kamenná jádra.

Staré naleziště u SV. KOSMY. Dosud nebyly známy žádné druhy, které by se vyskytovaly i v nalezišti u Pragy. (Oppenheim l. c. pag. 202.) Nyní zjistil jsem tyto oběma společné:

Stylophora annulata Reuss. — malý, poněkud omletý kousek.
Dendracis Gervillei Defr.
Trochus (Calliostoma) Bolognai Bayan.
Cerithium lamellosum Brug. — jeden kousek.
Nově zjištěny jsou odtud druhy:
Stylocoenia emarciata Schweig.
Cypraedia elegans Defr.
Solarium plicatum Lk.
Cytherea vilanovae Desh.⎫ Dle sdělení Oppenheimova svědčí již pro
Natica cf. similis Opph.⎭ Priabonien.
Cardita sp.
Serpula spirulaea Lam., věžovitá odrůda.

Druhy Cossmannem určené, dosud neuvedené:
Cyrene quadrangularis Oppenh.
Crassatella kalitensis Oppenh.
Crassatella cf. Tournouëri Oppenh.
Cardita Katzeri Oppenh.
Ostrea cf. roncana Partsch.?
Natica Schafhäutli Oppenh.
Ampullina cf. sigaretina.

Druhy nalezené na obou hlavních nalezištích u Pragy a sv. Kosmy byly by přehledně tyto:

1. PRAGA:

Alveolina elongata d'Orb.
Millepora (Axopora) parisiensis Mich.
Stylophora annulata Reus. = *contorta* Leym.
Dendracis Gervillei Defr.
Astraeopora asperrima Mich.
Astrocoenia expansa d'Arch.
,, *subreticulata* d'Arch.
Stylocoenia monticularia Schweigg.
Dictyaraea sp.
Cylichna coronata Lam.
Cerithium cf. aurorae Oppenh.
Cerithium lamellosum Brug.
Trochus Saemanni Bayan.
,, *Bolognai* Bayan.
,, *Remeši* Oppenh.

Phasianella subturbiformis de Greg. (Cossmann určil tento druh jako *Phasianella turbinoides* Lmk. Oppenheim praví, že tato forma severofrancouzského eocénu je štíhlejší a její četnější závity že se pomaleji rozvinují.

Terebellum sp. Jedno určil Cossmann jako cf. fusiforme Lamk.
Ve svrchních vrstvách ještě:

Orbitolites complanatus Lk.
Nummulites striatus Defr.

2. SV. KOSMO.

Dendracis Gervillei Defr.
Stylocoenia emarciata Schweig.
Stylophora annulata Reuss.
Cidaris subularis d'Arch.
Serpula spirulaea Lam., plochá i věžovitá forma.
Cerithium lamellosum Brug.
Cerithium Johannae Tourn.

Cerithium aff. Johannae Tourn.
Triton cf. colubrinum Lam.
Turritella Oppenheimi New.
Trochus Bolognai Bayan.
Cypraedia elegans Defr.
Cytherea vilanovae Desh.
Solarium plicatum Lk.
Natica cf. similis Opph.
Natica Schafhäutli Oppenh.
Ampulina cf sigaretina
Cyrene quadrangularis Oppenh.
Crassatella kalitensis Oppenh.
Crassatella cf. Tournouëri Oppenh.
Cardita Katzeri Oppenh.
Thracia cf. Blankenhorni Oppenh.
Ostrea cf. roncana Partsch?
Cardium cf. Rouaulti Bellardi a jiné druhy.
Cassis sp.
Oliva sp.
Cardita sp.
Mitra sp.
Turbo sp.
Conus sp.
Dentalium tenuistriatum Rouault.

Srovnáme-li fauny obou těchto hlavních nalezišť, vidíme, že, třeba mají některé nahoře uvedené druhy společné, přece jeví zase značný rozdíl. Od sv. Kosmy nápadný je větší počet mlžů. Také petrograficky jsou naleziště úplně rozdílná.

Nová naleziště východní části baščanského údolí souvisí nepochybně s nalezištěm u Pragy; naleziště u Matky Boží s oním u sv. Kosmy.

Můžeme tedy rozeznávati dvě velká pásma různících se usazenin eocénových, zkameněliny obsahujících, oddělených pásmem pískovců a přerušených ssutí svahu a brekciemi, z nichž jedno jde od sv. Kosmy k Majce Boží, druhé od hôtelu Praga návrším sv. Michala k východní části Batomalje. Oppenheim považuje toto za Auversien (vrstvy Ronca), ono u sv. Kosmy připomíná spíše Lutétien (San Giovanni Ilarione). Myslím, že obě pásma jsou rozhodně nestejného stáří. Že pásmo sv. Kosmo—Majka Boží je mladší, tomu nasvědčuje také nález Cytherea vilanovae Desh a Natica cf. similis Opph. Snad je v něm zastoupeno i „Priabonien“.

Vysvětlivky k mapce.

I. Svrchní rudistový vápenec a brekcie.
II. Alveolinový a nummulitový vápenec.
III. Slíny a pískovce (svrchní vrstvy nummulitové).
IV. Ssuť svahů a brekcie.
V. Alluvium.
   1. Staré naleziště u hôtelu Praga.
   2. Pahorek sv. Michala.
   3. Sv. Kosmo.
   4. Sv. Kosmo. (Slíny a pískovce bez zkamenělin. První zpráva z r. 1912.)
   5. Naleziště mezi sv. Michalem a sv. Markem.
   6. Naleziště u villy Ivky.
   7. Naleziště mezi křížem a Jurin dvorem.
   8. Pískovce uprostřed vinohradů.
   9. Majka Boží.
   10. Naleziště v zátoce Robinsonově (Monca Luka).

Tři příspěvky k theorii ploch stupně druhého.

Podal

prof. Dr. Vincenc Jarolímek.[1])

(Se 2 obrazci v textu.)

Předloženo dne 14. ledna 1921.

A.

Plocha druhého stupně φ^2 *daná hlavními osami* X, Y, Z *a třemi tečnými rovinami* τ_1, τ_2, τ_3.

Buďtež osy plochy φ^2 osami souřadnic pravoúhlých, a, b, c délky poloos, tedy rovnice její

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

kdež ovšem jmenovatelé mohou býti i negativné.

Jsou-li roviny tečné τ_1, τ_2, τ_3 dány svými úseky na osách, bude rovnice roviny τ_1

$$\frac{x}{m_1} + \frac{y}{n_1} + \frac{z}{p_1} = 1, \tag{2}$$

anebo také, označíme-li x_1, y_1, z_1 souřadnice neznámého dotyčného bodu t_1,

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} = 1. \tag{3}$$

Srovnáním identických rovnic (2) a (3) obdržíme

$$x_1 = \frac{a^2}{m_1}, \quad y_1 = \frac{b^2}{n_1}, \quad z_1 = \frac{c^2}{p_1}, \tag{4}$$

---

[1]) Na pamět padesátiletí vědecké literární činnosti autorovy. Vydal totiž první svou práci „Centrálné osvětlení“ ve výroční zprávě soukr. reál. gymn. Dra Maade v Praze za rok 1870/1, ve které podal řešení problému: *Kterak strojiti isofóty na rovině, na plochách rozvinutelných a rotačních za osvětlení centrálného,* do té doby vůbec ještě neřešeného.

a dosazením těchto hodnot do rovnice (1), ježto souřadnice bodu t_1 rovnici (1) vyhovují, vyjde

$$\frac{a^2}{m_1{}^2} + \frac{b^2}{n_1{}^2} + \frac{c^2}{p_1{}^2} = 1. \tag{5}$$

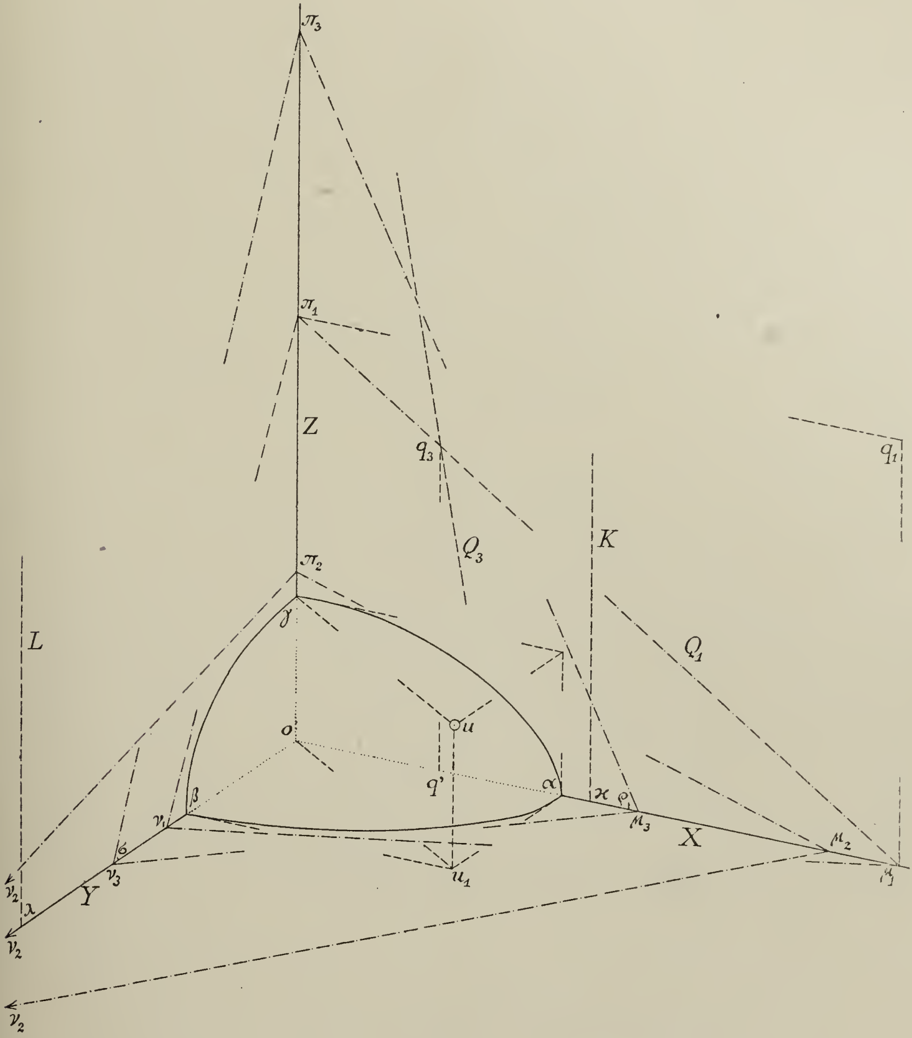
Z této rovnice plyne, že poloosy a, b, c rovnají se souřadnicím bodu u, který leží na ploše druhého stupně ε_1, jejíž poloosy $= m_1$, n_1, p_1. Totéž bude platit vzhledem k úsekům m_2, n_2, p_2 roviny τ_2 a k úsekům m_3, n_3, p_3 roviny τ_3. Z toho jde řešení úlohy toto: *sestrojíme bod u, v němž se pronikají tři plochy 2. stupně ε_1, ε_2, ε_3, jichž poloosy rovnají se úsekům rovin τ_1, τ_2, τ_3 na osách X, Y, Z; souřadnice bodu u dají délky poloos žádané plochy φ^2.* Avšak ke konstrukci bodu u není třeba ploch ε_1, ε_2, ε_2, aniž obrysů jejich, jakož níže bude ukázáno, ale stačí vrcholy ploch ε, Pozůstává však řešiti otázku, *kterého druhu jsou pomocné plochy ε* v jednotlivých případech. O tom nás poučí tato úvaha:

Sestrojme roviny souměrné k rovině τ_1 podle hlavních rovin $(Y Z) \equiv \xi$, $(X Z) \equiv \eta$, $(X Y) \equiv \zeta$, podle os X, Y, Z a podle středu $(X Y Z) \equiv o$. Tyto roviny jsou vesměs tečnými rovinami žádané plochy φ^2 a omezují osmistěn O_1, omezený trojúhelníky vespolek shodnými. Roviny souměrné k rovině τ_2 omezují obdobně druhý osmistěn O_2, a je-li plocha φ^2 *ellipsoidem*, bude nacházeti se vnitř prostoru Σ (šestnáctistěnu), který oběma osmistěny jest omezen. Z toho jde, že oba osmistěny O_1, O_2 v tomto případě se navzájem pronikají; neboť kdyby se nepronikaly, byl by osmistěn menší celý vnitř osmistěnu většího, a ellipsoid vepsaný do osmistěnu menšího nemohl by se dotýkati stěn osmistěnu většího. Pronik osmistěnů O_1, O_2 rozpadá se ve dva prostorové kosočtverce, jež navzájem jsou souměrny podle jedné roviny hlavní. Třetí pak rovina tečná τ_3 dá třetí osmistěn O_3, jenž tolikéž musí pronikati osmistěny O_1, O_2, tudíž pronikati i prostorem Σ. Jsou-li tyto podmínky splněny, sestrojíme ellipsoid φ^2 z daných rovin τ_1, τ_2, τ_3, jak nahoře analyticky vyšetřeno: jsou-li m_1, n_1, p_1 úseky roviny τ_1 na osách X, Y, Z, myslíme si ellipsoid ε_1 o poloosách m_1, n_1, p_1, dále ellipsoid ε_2 z úseků roviny τ_2, ellipsoid ε_3 z úseků roviny τ_3, a sestrojíme společný průsečík u [1]) ellipsoidů ε_1, ε_2, ε_3; souřadnice bodu u budou se rovnati poloosám žádaného ellipsoidu φ^2. Nejsou-li však řečené podmínky pro ellipsoid splněny, bude výsledkem hyperboloid, jehož poloosy rovnati se budou souřadnicím bodu, v němž protínají se tři hyperboloidy, jichž poloosy se rovnají úsekům rovin τ_1, τ_2, τ_3 na osách.

Přistupme k řešení konstruktivnému (obraz 1. sestrojen na základě promítání orthog. axonometrického). Plocha φ^2 budiž dána osami X, Y, Z a rovinami tečnými $\tau_1 \equiv (\mu_1\, \nu_1\, \pi_1)$, $\tau_2 \equiv (\mu_2\, \nu_2\, \pi_2)$, $\tau_3 \equiv (\mu_3\, \nu_2\, \pi_3)$, tak že $\overline{o\,\mu_1} = m_1$, $\overline{o\,\nu_1} = n_1$, $\overline{o\,\pi_1} = p_1$ atd. Ježto stopy rovin $\overline{\mu_1\,\pi_1}$, $\overline{\mu_3\,\pi_3}$, jakož i stopy $\overline{\nu_1 \pi_1}$, $\overline{\nu_2 \pi_2}$ se protínají v 1. oktantu, pronikají se osmistěny O_1, O_3 i osmistěny O_1, O_2, a pomocné plochy ε_1, ε_2, ε_3, tudíž i žádaná plocha φ^2 jsou ellipsoidy. Každé dva z ellipsoidů $\varepsilon_{1\text{-}3}$ majíce společné roviny hlavní, pronikají se v prostorové bikvadratice, která se promítá kolmo na každou

---

[1]) Bodů takových jest ovšem osm, ale absolutní délky jejich stejnojmenných souřadnic jsou si rovny.



π_3
π_1
Z
q_3
Q_3
K
q_1
π_2
γ
L
Q_1
o
u
q'
α
$\varkappa$
ϱ_1
β
ν_1
μ_3
X
μ_2
μ_1
δ
ν_3
u_1
ν_2
λ
Y
ν_2
ν_2

Obr. 1.

rovinu hlavní do kuželosečky, jejíž střed jest o a osy jsou X, Y, resp. Z. Pronik R ploch ε_1, ε_2 zejména promítá se na rovinu $(X\,Y)$ do ellipsy R_1, jejíž polooosy $\overline{o\,\varkappa}$, $\overline{o\,\lambda}$ obdržíme takto: Vrchol $\varkappa$ je v průmětě průsečíka k ellips $(o\,\mu_1\,\pi_1)$[1] a $(o\,\mu_3\,\pi_3)$, ve kterých ellipsoidy ε_1, ε_2 protínají rovinu $(X\,Z)$. Ellips těch netřeba rýsovat: průsečík k bude na kollineační ose

---

[1] t. j. o je střed ellipsy, μ_1 a π_1 dva vrcholy.

$K \perp X$ ellips, kterou sestrojíme podle G. P III. 62.[1] Vytkněme na př. pól q_1 ($\overline{\mu_1 q_1} \parallel Z$, $\overline{\pi_1 q_1} \parallel Z$), jeho poláru $\overline{\mu_1 \pi_1} \equiv Q_1$ v ellipse $(o\,\mu_1\,\pi_1)$, a stanovme poláru Q_3 ellipsy $(o\,\mu_3\,\pi_3)$ pro pól q_1; průsečík $(Q_1\,Q_3) \equiv q_3$ a q_1 jsou sdružené póly obou ellips, jichž průměty q', μ_1 na X dají družinu involuce, jejíž střed jest o a samodružné body (jeden jest $\varkappa$) dají průměty společných průsečíkův obou ellips. Sestrojme tedy $\overline{o\,\varkappa} = \sqrt{\overline{o\,\mu_1} \,.\, \overline{o\,q'}}$; dva průsečíky ellips leží na ose kollineační $\varkappa K \perp X$, ale není jich třeba, ježto průmět jejich $\varkappa$ dá již jeden vrchol ellipsy R_1 Obdobně obdržíme vrchol druhé osy λ na Y, jakožto průmět průsečíka ellips $(o\,\nu_1\,\pi_1)$ a $(o\,\nu_3\,\pi_3)$, ve kterých ellipsoidy ε_1, ε_3 protínají rovinu $(Y\,Z)$. V našem případě je tento průsečík imaginárný, leží však na reálné kollineační ose ellips $L \perp Y$[2] a její průsečík λ na Y dá další vrchol ellipsy $R_1 \equiv (o\,\varkappa\,\lambda)$.

Analogicky sestrojíme vrcholy ellipsy $S_1 \equiv (o\,\varrho\,\sigma)$, do níž promítá se pronik S ellipsoidů ε_2, ε_3 na rovinu $(X\,Y)$; vrchol ϱ je průmět průsečíka ellips $(o\,\mu_2\,\pi_2)$, $(o\,\mu_2\,\pi_3)$ na X, vrchol σ průmět průsečíka ellips $(o\,\nu_2\,\pi_2)$, $(o\,\nu_3\,\pi_3)$ na Y. Společný průsečík u_1 ellips R_1, S_1 bude posléze průmětem průsečíka u všech tří ellipsoidů $\varepsilon_{1\text{-}3}$ na rovinu $(X\,Y)$. I ten sestrojíme pomocí kollineační osy $U \perp X$ ellips R_1, S_1, aniž třeba těchto rýsovati, dále pak bod u_1 jakožto průsečík přímky U_1 s ellipsou R_1 jejíž poloosy jsou $\overline{o\,\varkappa}$, $\overline{o\,\lambda}$, posléze z průmětu u_1 průsečík u ellipsoidů $\varepsilon_{1\text{-}3}$ v prostoru způsobem z deskriptivní geometrie známým, na př. na ellipsoidu ε_1:

Bod u bude na paprsku $\overline{u_1\,u} \perp (X\,Y)$. Promítněme průmět u_1 ze středu o na ellipsu $(o\,\mu_1\,\nu_1)$ do bodu v (průsečík ellipsy s přímkou $\overline{o\,u_1}$). Rovina položená bodem u a osou Z seče ellipsoid ε_1 v ellipse, která jde bodem u, má střed o, vrcholy v, π_1 a promítá se na rovinu $(X\,Z)$ klinogonálně ve směru $\overline{v\,\mu_1}$ do ellipsy $(o\,\mu_1\,\pi_1)$. Kolmice $\overline{u_1\,u}$ promítá se směrem $\overline{v\,\mu_1}$ do $\overline{r_1\,r} \perp X$ ($\overline{u_1\,r_1} \parallel \overline{v\,\mu_1}$) na rovinu $(X\,Z)$: Na $\overline{r_1\,r} \perp X$ určíme bod r ellipsy $(o\,\mu_1\,\pi_1)$, který je klinogonálným průmětem bodu u, načež paprsek $\overline{r\,u} \parallel \overline{r_1\,u_1}$ dá bod u. Souřadnice bodu u rovnají se poloosám plochy φ^2; učiníme-li tedy $\overline{u_1\,\alpha} \perp X$, $\overline{u_1\,\beta} \perp Y$, $\overline{o\,\gamma} = \overline{u_1\,u}$, budou bod o středem a body α, β, γ vrcholy žádaného ellipsoidu φ^2.[3]

B.

O rotačních plochách 2. stupně, zejména rovnoosých.

1. Budiž φ^2 rotační hyperboloid, střed jeho o, rovníkem kružnice R, buď reálná (φ^2 sborcený) nebo imaginárná (φ^2 dvojdílný), o poloměru r

---

[1] Značí spis autorův „Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru“, svazek III., strana 62.

[2] Kdyby i tato kollineační osa byla pomyslna, byla by křivka R_1 hyperbolou; reálné osy kollineační byly by $\perp Z$ a jejich průsečíky na Z daly by vrcholy ellipsy R_3, do níž by se promítal pronik R na rovinu $(X\,Z)$; vrchol $\varkappa$ byl by společný ellipsám R_1, R_3.

[3] Jiné řešení této úlohy autor podal v G. P. V., 79.

nebo $i\,r$, rovina rovníka ϱ, osa rotační $o\,O \perp \varrho$, kružnice úběžná K_∞, a kterýkoli bod na ploše φ^2. Promítněme kružnici K_∞ s bodu a na rovinu ϱ. Promítkou je rotační plocha kuželová, shodná s asymptotickou plochou kuželovou hyperboloidu, jejíž osou je přímka $\overline{a\,a_1} \perp \varrho$, centrálným pak průmětem kružnice K_∞ jest kružnice A, jejíž střed a_1 je v orthogonálním průmětě bodu a na rovině ϱ.

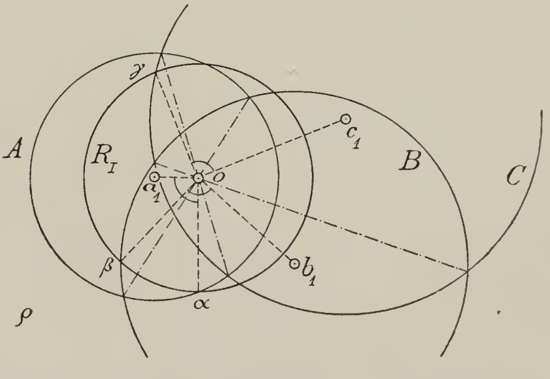
Kterékoli dva protější body p, q na kružnici A jsou dva sdružené póly hyperboloidu. Neboť paprsky $\overline{p\,a}$, $\overline{a\,q}$ směřují k dvěma úběžným bodům na kružnici K_∞, které jsou symmetrické podle roviny ϱ.[1]) Ježto tedy krajní body každého průměru kružnice A jsou odděleny kružnicí R harmonicky, protínají se tyto kružnice A, R *pravoúhelně*.[2]) Promítneme-l obdobně kružnici K_∞ z dalších bodů b, c . . . hyperboloidu φ^2 na rovinu ϱ,i obdržíme síť kružnic A, B, C . . ., jež vesměs protínají rovník R pravoúhelně; jest tedy střed hyperboloidu o společným potenčním bodem kružnic A, B, C . . . Chordála každých dvou kružnic sítě prochází středem o. To vše má platnost i pro hyperboloid nepřímkový, jehož imaginárný rovník R jest orthogonální kružnicí kružnic A, B, C . . . ve smyslu známém.[3])

2. Je-li hyperboloid φ^2 sborcený a *rovnoosý*, tudíž vrcholový úhel asymptotického kužele pravý, jest poloměr kružnice A roven vzdálenosti $\overline{a_1\,a}$, t. j. A je *cyklickým průmětem* bodu a ležícího na hyperboloidu, z čehož plyne:

Rovník sborceného hyperboloidu rovnoosého jest orthogonálnou kružnicí k cyklickým průmětům všech bodů plochy na rovinu rovníka.

Dán-li tedy hyperboloid rovnoosý třemi svými body a, b, c a rovinou rovníka ϱ, spusťme kolmice $\overline{a\,a_1} \perp \varrho$, $\overline{b\,b_1} \perp \varrho$, $\overline{c\,c_1} \perp \varrho$, ze středů a_1, b_1, c_1 opišme kružnice A, B, C a sestrojme potenční bod o těchto tří kružnic. Tím stanoven střed hyperboloidu; délka tečny z bodu o ke kružnicí A vedené dá poloměr rovníka R. Je-li týž reálný obdržíme hyperboloid sborcený; připadne-li však střed o do vnitř kružnice A, je rovník R pomyslný a hyperboloid dvojdílný, délku pak reálné osy jeho ležící na O stanovíme takto:

Když potenční bod o v průsečíku chordál kružnic



O br.

---

[1]) Jsou-li b, b_1 dva body plochy 2. stupně souměrny podle hlavní roviny ϱ, promítá se každý další bod plochy a z bodů b, b_1 na rovinu ϱ do dvou sdružených pólů jak plochy, tak i kuželosečky, ve které rovina ϱ plochu protíná (G. P. V., 75).

[2]) ibid. pag. 30.

[3]) Čas. mathem., ročník XLVIII., str. 10.

A, B, C je stanoven (obr. 2.), dá kolmice $\overline{o\,\alpha} \perp \overline{a_1\,o}$ vnitř kruhu A (nebo $\overline{o\,\beta} \perp \overline{b_1\,o}$ vnitř B, nebo $\overline{o\,\gamma} \perp \overline{c_1\,o}$ vnitř C) poloměr reálné kružnice R_I, která je ideálním obrazem kružnice R^i, orthogonálné k A B, C, jejíž poloměr $= \overline{o\,\alpha} \,.\, \sqrt{-1} = i \,.\, r$,[1] Reálná poloosa hyperboloidu dvojdílného, ležící na O, má tedy délku $r = \overline{o\,\alpha}$.

C.

Jak strojiti plochu druhého stupně danou středem a polárným tetraedrem.

1. Střed s buď dán *vně* tetraedru $a\,b\,c\,d$, aby plocha φ^2 byla reálná. Spojnice $\overline{s\,a} \equiv P$ seče rovinu $(b\,c\,d)$ v bodě a_1. Involuce $s\,(a\,a_1)$, již plocha φ^2 vytvořuje na průměru P, dá svými samodružnými body u, v $(\overline{s\,u} = - \overline{s\,v} = \sqrt{\overline{s\,a} \,.\, \overline{s\,a_1}})$ dva body plochy φ^2, jež jsou reálny, jsou-li a, a_1 na téže straně středu s. Rovina pak $s\,\pi \parallel (b\,c\,d)$ položená středem s, je diametrálná rovina sdružená k průměru P; roviny $u\,\alpha \parallel v\,\beta \parallel \pi$ jsou tečné ku ploše φ^2 v bodech u, v. Obdobně lze obdržeti na průměrech $\overline{s\,b} \equiv Q$, $\overline{s\,c} \equiv R$, $\overline{s\,d} \equiv S$ po dvou bodech plochy, jež ovšem nebudou vždy reálné; ale v každém případě dostaneme reálné roviny diametrálné $\varkappa$, ϱ, σ, položené středem s rovnoběžně k rovinám resp. $(a\,c\,d)$, $(a\,b\,d)$, $(a\,b\,c)$, jež jsou sdruženy k průměrům Q, R, S.

Předpokládejme nejprve, že průměr P seče plochu φ^2 v reálných bodech u, v, a průměr R v reálných bodech r, t. Pak jsou tedy i tečné roviny $\alpha \parallel \beta \parallel (b\,c\,d)$ v bodech u, v a tečné roviny $\gamma \parallel \delta \parallel (a\,b\,d)$ v bodech r, t reálny. Rovina σ protne plochu φ^2 v určité kuželosečce K, již sestrojíme takto: Tečná rovina α seče rovinu σ v přímce M, a paprsek vedený dotyčným bodem $\overline{u\,m} \parallel S$ protne rovinu σ v bodě m; m, M jsou pól a polára křivky K. Obdobně opatříme si další pól n a poláru $N \equiv \overline{\gamma\,\sigma}$, vedouce $\overline{r\,n} \parallel S$ až k rovině σ. Kuželosečka K v rovině σ je nyní určena středem svým s, dvěma póly m, n, a příslušnými polárami M, N. Spojnice $\overline{m\,n} \equiv X$ je polárou průsečíka $(M\,N) \equiv x$ a spojnice $\overline{m\,x}$ polárou průsečíka $(M\,X) \equiv y$, tedy $m\,x\,y$ polárným trojúhelníkem kuželosečky K, jejíž konstrukce z dat s, $m\,x\,y$ je známa. Z kuželosečky K v rovině σ a z krajních bodů sdruženého průměru S, ať reálných (φ^2 ellipsoidem) nebo imaginárných (φ^2 hyperboloidem), sestrojí se již plocha φ^2 snadno.

Je-li však křivka K imaginárná, omezí se sdružené prumĕry nebo osy jejího ideálního obrazu K^I, z nich pak a z průměru S sestrojí se plocha φ^2, která v tomto případě bude *hyperboloidem*; jsou-li však krajní body průměru S pomyslné, nastane případ, který odkazujeme k odst. 3.

2. Seče-li však *jen jeden* z průměrů P, Q, R, S, na př. P, plochu φ^2 v bodech reálných u, v,[2] bude třeba konstrukce zcela jiné. K prumĕrům

---

[1] Čas. mathem., roč. XLVIII., str. 10 a 11.

[2] což aspoň u jednoho průměru nastati musí, protože jeden vrchol polárného tetraedru je vždy *vnitř* prostoru plochou omezeného.

sestrojíme sdružené roviny diametrálné π, $\varkappa$, ϱ, σ jako v případě 1. bez závady, dále však pokračujeme takto: družiny $P\,\pi$, $Q\,\varkappa$ . . . určují polárný svazek prostorový Σ, jehož direkční plocha kuželová ξ^2 jest *asymptotická* vzhledem k ploše φ^2. Abychom kužel ξ^2 sestrojili, protněme svazek Σ libovolnou rovinou, třebas $\varepsilon \parallel (b\,c\,d) \equiv \pi$, v polárném poli, jehož direkční kuželosečka K dá pronik $(\varepsilon\,\xi^2)$. Toto pole je určeno středem o, v němž rovinu ε seče spojnice $\overline{s\,a} \equiv P$ [protože polárná rovina $\pi \equiv (b\,c\,d)$ je $\parallel \varepsilon$], póly $(Q\,\varepsilon) \equiv q$, $(R\,\varepsilon) \equiv r$ a příslušnými polárami Q_1, R_1, ve kterých roviny $(a\,c\,d)$, $(a\,b\,d)$ sekou rovinu ε. Kuželosečka K sestrojí se nyní ze středu o a z družin pólů q, r s polárami Q_1, R_1 jako v úloze 1. Z asymptotického kužele ξ^2, který je určen křivkou K a vrcholem s, a z jednoho reálného bodu, na př. u, sestrojí se žádaná plocha φ^2 již snadno. Křivka K i kužel ξ^2 jsou reálny, protože plocha φ^2 v případě tomto je *hyperboloidem*; neboť předpokládáme, že průměry $\overline{s\,b} \equiv Q$, $\overline{s\,c} \equiv R$ protínají plochu φ^2 v bodech imaginárných, což v případě ellipsoidu není možno; a imaginárná plocha φ^2 také býti nemůže, majíc reálný svazek průměrův a sdružených diametrálných rovin, a mimo to reálné body u, v. Hlavní osy kužele ξ^2 jsou také hlavními osami hyperboloidu φ^2.

3. Dán-li střed plochy s *vnitř* tetraedru $a\,b\,c\,d$, je plocha φ^2 *imaginárná*; všecky průměry $\overline{s\,a} \equiv P$, $s\,b \equiv Q$ . . . protínají plochu φ^2 v bodech pomyslných. Nicméně jsou osy plochy φ^2 reálny. Sestrojíme-li jako v případě 2. pronik K roviny ε s asymptotickým kuželem ξ^2, dostaneme sice křivku imaginárnou, ale její reálné osy z dat o, $(q\,Q_1)$, $(r\,R_1)$ sestrojíme snadno, omezíme je pro ideální elliptický obraz K^I křivky K, načež sestrojíme reálné osy X, Y, Z imaginárného kužele $(K\,s) \equiv \xi^2$ způsobem známým,1) jež jsou pak identické s osami imaginárné plochy φ^2. Jsou-li délky poloos plochy $\varphi^2 = i\,.\,x$, $i\,.\,y$, $i\,.\,z$, sestrojme z poloos x, y, z *reálný* ellipsoid $\varphi_I{}^2$, který je perspektivnou kollineární transformací imaginárné plochy φ^2 podle středu s, roviny kollineační v nekonečnu a karakteristiky $\pm i$. Osy ellipsoidu $\varphi_I{}^2$, který lze nazvati ideálním obrazem plochy φ^2, omezíme takto: Na průměru $\overline{s\,a} \equiv P$, který seče stěnu $(b\,c\,d)$ v bodě a_1, učiňme $\overline{s\,u} = -\overline{s\,v} = \sqrt{\overline{a_1\,s}\,.\,\overline{s\,a}}$; u, v jsou body reálného ellipsoidu a rovina $\alpha \parallel (b\,c\,d)$, položená bodem u, tečnou jeho rovinou. Rovina α seče osu X v bodě c, přímka $\overline{u\,e} \perp X$ v bodě e; naneseme-li úsečku $x = \sqrt{\overline{s\,c}\,.\,\overline{s\,e}}$ v obou směrech na osu X, obdržíme dva vrcholy ellipsoidu (neboť pólu c přísluší polárná rovina položená bodem $u \perp X$, tedy c, e jsou sdružené póly), a obdobnou konstrukcí i ostatní vrcholy na osách Y, Z. —

Je-li střed s plochy φ^2 v průsečíku výšek tetraedru $a\,b\,c\,d$, je φ^2 *koulí*, reálnou či imaginárnou podle toho, je-li s vně nebo vnitř tetraedru; její poloměr $r = \sqrt{\overline{s\,a}\,.\,\overline{s\,a_1}}$. Pro reálnou kouli polárný tetraedr musí tedy býti tupoúhlý.

---

1) G. P. III., 71.

4. Plocha φ^2 je *paraboloid*, dán-li střed s v nekonečnu, t. j. směrem osy S. Paprsek čili průměr plochy $a A \parallel S$ seče stěnu $(b\,c\,d)$ polárného tetraedru v bodě a_1 a paraboloid v nekonečnu, druhý průsečík α půlí tudíž úsečku $\overline{a\,a_1}$ a tečná rovina jeho $\tau \parallel (b\,c\,d)$. Obdobně sestrojme body β, γ na průměrech $b\,B \parallel S$, $c\,C \parallel S$ a tečné roviny $\sigma \parallel (a\,c\,d)$ bodem β, $\varrho \parallel (a\,b\,d)$ bodem γ. Rovina $(\alpha\,\beta\,\gamma) \equiv \varepsilon$ seče paraboloid v kuželosečce K, kterou sestrojíme z bodův α, β, γ a tečen $\overline{\tau\,\varepsilon}$, $\overline{\sigma\,\varepsilon}$. Podle tvaru K je paraboloid elliptický nebo hyperbolický. Průsečík rovin $(\tau\,\sigma\,\varrho) \equiv e$ je pólem roviny ε, je tedy kužel $(K\,e)$ paraboloidu podél K opsán. Je-li o střed křivky K, musí být průměr $\overline{e\,o} \parallel S$. Každá rovina ω položená průměrem $\overline{e\,o}$ seče paraboloid v parabole, jíž sestrojíme z bodův u, v, ve kterých rovina ω seče křivku K, a z tečen $\overline{e\,u}$, $\overline{e\,v}$. Sestrojme tři takové paraboly, protněme je libovolnou rovinou $\psi \perp S$, průsečíky proložme kuželosečku L a středem jejím λ veďme osu paraboloidu $O \parallel S$. Rovina ξ položená osou O protne křivku K v bodech m, n a paraboloid v parabole P; její vrchol w sestrojený z bodů m, n a osy O dá zároveň vrchol paraboloidu Je-li L ellipsa, M, N osy její, jsou $(M\,O)$, $(N\,O)$ hlavní roviny paraboloidu elliptického; vrcholy ellipsy L určují s vrcholem plochy w hlavní paraboly paraboloidu. Je-li L hyperbola, λ střed, g, h reálné vrcholy její na ose M, určují zase g, h s vrcholem w hlavní parabolu Q v rovině $(g\,w\,h)$. Jsou-li j, k konce vedlejší osy N hyperboly L, je druhá hlavní parabola R paraboloidu, obsažená v rovině $(N\,O)$, určena osou O, vrcholem w a imaginárnými body na N, jichž vzdálenosti od středu $\lambda = i\,.\,\overline{\lambda\,j},\ i\,.\,\overline{\lambda\,k}$. Je tedy parabola R určena osou O, vrcholem w a elliptickou involucí pólů na přímce $N \perp O$, jejíž střed jest λ a souměrná družina j, k; její parametr sestrojí se podle $2\,p = \dfrac{\overline{\lambda\,k}^2}{\overline{\lambda\,w}}$. Hlavními parabolami Q, R jest hyperbolický paraboloid sestrojen; hlavní jeho površky jdoucí vrcholem w jsou rovnoběžny s asymptotami hyperboly L.

Tento paraboloid, ať elliptický nebo hyperbolický, je vždy reálný protože úběžný střed jeho s je vně polárného tetraedru $a\,b\,c\,d$.

O elementárních dělitelích alternující bilineární formy.

Napsal
Dr. techn. **Václav Hruška,**
soukr. docent českého vysokého učení technického v Praze.

Předloženo dne 28. ledna 1921.

1. Buď

$$A = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, y_k \tag{1}$$

$$a_{ik} = -\, a_{ki},\; a_{i,i} = 0 \quad (i,\; k = 1,\; 2,\; 3, \ldots n)$$

bilineární alternující forma o celých racionálných koeficientech.

$$C = \| c_{rs} \| \quad (r,\; s = 1,\; 2, \ldots n)$$

buď čtvercová matice rovněž o celých racionálných elementech. Proveďme kogredientní lineární transformaci formy A:

$$x_i = \sum_{r=1}^{n} c_{ir}\, \bar{x}_r$$

$$y_k = \sum_{s=1}^{n} c_{ks}\, \bar{y}_s$$

Tím forma A přejde ve formu $\bar{A}$:

$$A = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k} \sum_{r=1}^{n} c_{ir}\, \bar{x}_r \sum_{s=1}^{n} c_{ks}\, \bar{y}_s = \sum_{r,s=1}^{n} \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, c_{ir}\, c_{ks} \right) \bar{x}_r\, \bar{y}_s = \bar{A}$$

o koeficientech

$$\bar{a}_{rs} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, c_{ir}\, c_{ks} \tag{2}$$

Symbolicky to můžeme psáti $\bar{A} = C'\, A\, C$

Označme $(\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{2k})$ pfaffian o $2\,k$ indexech $\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{2k}$ utvořený z koeficientů formy A a $(\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_{2k})$ buď pfaffian o $2\,k$ indexech $\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_{2k}$ utvořený z koeficientu formy A.[1] Označím-li ještě

$$\begin{vmatrix} c_{\alpha_1\beta_1} & c_{\alpha_2\beta_2} & \ldots & c_{\alpha_1\beta_{2k}} \\ c_{\alpha_2\beta_1} & c_{\alpha_2\beta_2} & \ldots & c_{\alpha_2\beta_{2k}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{\alpha_{2k}\beta_1} & c_{\alpha_{2k}\beta_2} & \ldots & c_{\alpha_{2k}\beta_{2k}} \end{vmatrix} = C^{\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_{2k}}_{\beta_1\,\beta_2\,\ldots\,\beta_{2k}}$$

tu bude

$$(3)\qquad (\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_{2k}) = \sum_{\substack{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots\,\alpha_{2k}\\ \binom{n}{2k}}} (\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{2k})\, C^{\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_{2k}}_{\beta_1\,\beta_2\,\ldots\,\beta_{2k}}$$

kde součet se vztahuje na všech $\binom{n}{2k}$ kombinací bez opakování utvořených z elementu $1, 2, 3, \ldots n$. Důkaz provedu úplnou indukcí. Pro $2\,k = 2$ tvrzení zní

$$(\beta_1\,\beta_2) = a_{\beta_1\beta_2} = \sum_{\substack{\alpha_1,\,\alpha_2\\ \binom{n}{2}}} (\alpha_1\,\alpha_2)\, C^{\alpha_1\,\alpha_2}_{\beta_1\,\beta_2} = \sum_{1=\alpha_1<\alpha_2}^{n} a_{\alpha_1\alpha_2}\,(c_{\alpha_1\beta_1}\,c_{\alpha_2\beta_2} - c_{\alpha_1\beta_2}\,c_{\alpha_2\beta_1}) =$$

$$= \sum_{\alpha_1,\,\alpha_2=1}^{n} a_{\alpha_1,\,\alpha_2}\, c_{\alpha_1\beta_1}\, c_{\alpha_2\beta_2}$$

a jest dle rovnice (2) evidentně správné.

Supponujeme tedy, že rovnice (3) platí pro $2\,k - 2$ a píšeme ji ve tvaru:

$$(\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_{2k-2}) = \frac{1}{(2\,k-2)!}\sum_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots\,\alpha_{2k-2}=1}^{n} (\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{2k-2})\, C^{\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_{2k-2}}_{\beta_1\,\beta_2\,\ldots\,\beta_{2k-2}}$$

beze všeho obmezování součtu, což vzhledem k známým větám o determinantech a pfaffianech jest dovoleno.

Jest pak

$$(\beta_1\,\beta_2\ldots\beta_{2k}) = \sum_{i=2}^{2k} (-1)^i\, a_{\beta_1\beta_i}\,(\beta_2\ldots\beta_{i-1}\,\beta_{i+1}\ldots\beta_{2k}) =$$

$$= \frac{1}{(2\,k-2)!}\sum_{i=2}^{2k}(-1)^i \sum_{r,\,s=1}^{n} a_{rs}\, c_{r\beta_1}\, c_{s\beta_i} \sum_{\alpha_1\,\ldots\,\alpha_{2k-2}=1}^{n} (\alpha_1\ldots\alpha_{2k-2})\, C^{\alpha_1\,\ldots\ldots\ldots\,\alpha_{2k-2}}_{\beta_2\,\ldots\,\beta_{i-1}\,\beta_{i+1}\,\ldots\,\beta_{2k}} =$$

$$= \frac{1}{(2\,k-2)!}\sum_{r,\,s,\,\alpha_1,\,\ldots\,\alpha_{2k-2}=1}^{n} a_{rs}\,(\alpha_2\ldots\alpha_{2k-2})\, c_{r\beta_1} \sum_{i=2}^{2k} (-1)^i\, c_{s\beta_i}\, C^{\alpha_1\,\ldots\ldots\ldots\,\alpha_{2k-2}}_{\beta_2\,\ldots\,\beta_{i-1}\,\beta_{i+1}\,\ldots\,\beta_{2k}}.$$

---

[1] Tvoření pfaffianů viz: E. v. Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem, Kapit. I.

Avšak

$$\sum_{i=2}^{2k} (-1)^i c_{s\beta_i}\, C_{\beta_2 \,\ldots\, \beta_{i-1}\, \beta_{i+1} \,\ldots\, \beta_{2k}}^{\alpha_1 \,\ldots\ldots\ldots\, \alpha_{2k-2}} = C_{\beta_2 \beta_3 \,\ldots\, \beta_{2k}}^{s\, \alpha_1 \,\ldots\, \alpha_{2k-2}}$$

Buď nyní $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \gamma_{2k-1}$ nějaká kombinace bez opakování třídy $(2\,k-1)!$ -vé z prvků $1, 2, \ldots n$ a sečítejme vzhledem k $(2\,k-1)$ prvkům $s, \alpha_1, \ldots \alpha_{2k-2}$ tak, že nejprve tyto prvky proběhnou všech $(2\,k-1)!$ permutací utvořených z prvků $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{2k-1}$ a pak $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{2k-1}$ proběhne všech $\binom{n}{2\,k-1}$ kombinací třídy $(2\,k-1)$-vé bez opakování z prvků $1, 2, \ldots n$. Při tom tedy bude

$$C_{\beta_2 \beta_3 \,\ldots\, \beta_{2k}}^{s\, \alpha_1 \,\ldots\, \alpha_{2k-2}} = (-1)^J\, C_{\beta_2 \beta_3 \,\ldots\, \beta_{2k}}^{\gamma_1 \gamma_2 \,\ldots\, \gamma_{2k-1}},$$

kde J značí počet inversí v permutaci $s\, \alpha_1, \ldots \alpha_{2k-2}$, považujeme-li pořádek $\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{2k-1}$ za přirozený. Jest tedy

$$\overline{(\beta_1 \ldots \beta_{2k})} = \sum_{1 = r,\, \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_{2k}}^{n} c_{r\beta_1}\, C_{\beta_2 \beta_1 \,\ldots\, \beta_{2k}}^{\gamma_1 \gamma_2 \,\ldots\, \gamma_{2k-1}} \cdot \frac{1}{(2\,k-2)!} \sum_{\substack{(2k-1)! \\ s,\, \alpha_1, \,\ldots\, \alpha_{2k-2}}} (-1)^J a_{rs} (\alpha_1, \ldots \alpha_{2k-1})$$

Jelikož platí:

$$\sum_{\substack{(2k-1)! \\ s,\, \alpha_2, \,\ldots\, \alpha_{2k-2}}} (-1)^J a_{rs} (\alpha_1, \ldots \alpha_{2k-2}) =$$

$$= (2\,k-2)! \Big[(-1)^J a_{rs} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2k-2}) + \sum_{i=1}^{2k-2} (-1)^J a_{r\alpha_i} (\alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}\, s\, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_{2k-2}) \Big] = (2\,k-2)!\, (r\, \gamma_1\, \gamma_2 \ldots \gamma_{2k-1}).$$

Platí tedy vztah

$$\overline{(\beta_1, \ldots \beta_{2k})} = \sum_{1 = r,\, \gamma_1 < \gamma_2 \,\ldots\, \gamma_{2k-1}}^{n} c_{r\beta_1}\, (r\, \gamma_1\, \gamma_2 \ldots \gamma_{2k-1})\, C_{\beta_2 \beta_2 \,\ldots\, \beta_{2k}}^{\gamma_1 \gamma_2 \,\ldots\, \gamma_{2k-1}} =$$

$$= \frac{1}{(2\,k-1)!} \sum_{r,\, \gamma_1, \,\ldots\, \gamma_{2k-1} = 1}^{n} (r, \gamma_1, \ldots \gamma_{2k-1})\, c_{r\beta_1}\, C_{\beta_2 \beta_3 \,\ldots\, \beta_{2k}}^{\gamma_1 \gamma_2 \,\ldots\, \gamma_{2k-1}}$$

kde nyní součet není podroben žádným obmezením. Sčítejme opět tak, že utvoříme nejprve $\binom{n}{2k}$ kombinací bez opakování $2\,k$-té třídy $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_{2k}$ z prvků $1, 2, \ldots n$ a tyto kombinace pak permutujeme. Buď $r\, \gamma_1 \ldots \gamma_{2k-1}$ složena z týchž prvků jako kombinace $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_{2k}$ a buď J počet inversí v $r, \gamma_1, \ldots \gamma_{2k-1}$, je-li $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_{2k}$ přirozený pořádek.

Pak tedy jest:

$$(\gamma\,\gamma_1 \ldots \gamma_{2k-1}) = (-1)^J (\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_{2k})$$

$$\overline{(\beta_1 \ldots \beta_{2k})} = \frac{1}{(2k-1)!} \sum_{1=\delta_1<\delta_2<\ldots<\delta_{2k}}^{n} (\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_{2k}) \sum_{\substack{2k! \\ \gamma,\gamma_1,\ldots\gamma_{2k}=1}} (-1)^J c_{\gamma\beta_1}\, C_{\beta_2\beta_3\ldots\beta_{2k}}^{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{2k-1}}.$$

Avšak $(-1)^J\, C_{\beta_2\beta_2\ldots\beta_{2k}}^{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{2k-1}}$ se nemění, permutujeme-li indexy. Bude tedy

$$\sum_{\substack{2k! \\ \gamma,\gamma_1,\ldots\gamma_{2k-1}}} (-1)^J c_{\gamma\beta_1} C_{\beta_2\beta_3\ldots\beta_{2k}}^{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{2k-1}} = (2\,k-1)! \sum_{i=1}^{2k-1} (-1)^{i-1} c_{\delta_i\beta_1} C_{\beta_2\ldots\ldots\ldots\beta_{2k}}^{\delta_1\ldots\delta_{i-1}\delta_{i+1}\ldots\delta_{2k}} =$$

$$= (2\,k-1)!\, C_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{2k}}^{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{2k}}.$$

Máme tedy konečně:

$$\overline{(\beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_{2k})} = \sum_{1=\delta_1<\delta_2\ldots<\delta_{2k}}^{n} (\delta_1\,\delta_2 \ldots \delta_{2k})\, C_{\beta_1\beta_2\ldots\delta_{2k}}^{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{2k}}$$

čímž jsme dokázali vzorec (3).

2. Z tohoto vzorce soudíme, že *NSM* D_{2k} pfaffianů $(\alpha_1, \ldots \alpha_{2k})$ o $2\,k$ indexech utvořených z koeficientů formy A dělí všechny pfaffiany o $2\,k$ indexech $\overline{(\beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_{2k})}$ utvořené z koeficientů formy $\bar{A}$ a tedy dělí též jejich *NSM* D_{2k}.

Kdyby tedy transformace C byla unimodulární, tu by též elementy transformace C^{-1} byla čísla celá racionální, takže by pak naopak $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2k})$ byl celistvou lineární funkcí pfaffianů $\overline{(\beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_{2k})}$ o celých racionálných koeficientech. Pak by ovšem též D_{2k} dělilo beze zbytku D_{2k}, čili bylo by $D_{2k} = \bar{D}_{2k}$.

3. Jest známo, že jsou-li $e_1, e_1, e_2, e_2, \ldots e_h, e_h$ elementární dělitelé formy A $\left(\text{při čemž } \dfrac{e_i}{e_{i-1}} \text{ jest číslo celé; } i = 2, 3, \ldots h\right)$ a označíme-li

$$E = e_1 (x_1\, y_{h+1} - x_{h+1}\, \overline{y_1}) + e_2 (x_2\, \overline{y_{h+2}} - \overline{x_{h+2}}\, y_2) + \ldots + e_h (x_h\, \overline{y_{2h}} - x_{2h}\, y_h)$$

že lze najíti unimodulární transformaci C o celých racionálných koeficientech tak, aby bylo

$$E = C'\,A\,C.$$

Pfaffiany o $2\,k$ indexech utvořené z koeficientů formy E jsou jednak rovny nule a ostatní jsou rovny

$$e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}\ (i_1, \ldots i_k = 1, 2, \ldots h).$$

Jejich *NSM* jest patrně $D_{2k} = e_1\, e_2 \ldots e_k$

Jest tedy dle předešlého odstavce NSM pfaffianů o $2\,k$ indexech $(\alpha_1 \ldots \alpha_{2k})$ utvořených z koeficientů matice A rovna

$$D_{2k} = e_1\,e_2 \ldots e_k$$

čili naopak

$$e_k = \frac{D_{2k}}{D_{2k-2}} \qquad k = 2,\ 3, \ldots,$$
$$e_1 = D_2.$$

Vidíme, jak veliké zjednodušení nastane při skutečném výpočtu vzpomeneme-li si, že místo $NSM \binom{n}{2\,k}^2$ determinantů řádu $2\,k$ počítáme pouze $NSM \binom{n}{2\,k}$ pfaffianů o $2\,k$ indexech nehledě ani k daleko jednoduššímu rozvoji pfaffianů než determinantů.

K diferenciální geometrii prostorových křivek.

Napsal
Dr. **Eduard Čech.**

(Předloženo dne 28. ledna 1921.)

1. Prostorová křivka C buď dána v projektivních souřadnicích rovnicemi

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{x_2}{x_4} &= \frac{p_2}{2}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^2 + \frac{p_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + \frac{p_4}{24}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^4 + \ldots, \\ \frac{x_3}{x_4} &= \frac{q_3}{6}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^3 + \frac{q_4}{24}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^4 + \frac{q_5}{120}\left(\frac{x_1}{x_4}\right)^5 + \ldots \end{aligned}$$

Budeme uvažovati C v okolí bodu O $(0, 0, 0, 1)$, v němž přímka t $(x_2 = x_3 = 0)$ jest tečnou a rovina ω $(x_3 = 0)$ oskulační rovinou, za předpokladu, že ani t ani ω nejsou stacionární, tedy $p_2 q_3 \neq 0$.

Promítneme-li C do oskulační roviny ω se všech bodů přímky (z_1, z_2, z_3) trsu O, mají všecky tyto průměty v O mezi sebou styk čtvrtého řádu. Společnou oskulační kuželosečku těchto průmětů pro krátkost nazveme ***kuželosečkou přidruženou přímce*** (z_1, z_2, z_3) ***vzhledem k elementu*** C. Rovnice průmětu C s bodu (z_1, z_2, z_3, z_4) do ω jest výsledek eliminace x_i z rovnic (1) a rovnic

$$y_1 : y_2 : y_4 = (x_1 z_3 - x_3 z_1) : (x_2 z_3 - x_3 z_2) : (x_4 z_3 - x_3 z_4)$$

a jest tedy

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{y_2}{y_4} &= \frac{p_2}{2}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^2 + \frac{p_3 z_3 - q_3 z_2}{6 z_3}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^3 + \\ &+ \frac{4 p_2 q_3 z_1 - q_4 z_2 + p_4 z_3}{24 z_3}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^4 + \ldots . \end{aligned}$$

V rovnici (2) nevyskytuje se z_4 v koeficientech vypsaných, což naše tvrzení dokazuje. Z (2) vidíme též, že projekce C do ω se všech bodů pevné roviny ϱ svazku t mají styk třetího řádu, a tudíž jakýkoli bod R na t má vzhledem ke všem příslušným kuželosečkám tutéž poláru r.

R, r, ϱ tvoří obecnou trojinu trilinearity, kterou jsem nazval charakteristickou trilinearitou elementu C.[1]) Z rovnice (2) dospějeme snadným počtem k rovnici kuželosečky, přidružené přímce (z_1, z_2, z_3); obdržíme v souřadnicích bodových

$$\begin{aligned}(3)\qquad & 9\, p_2^4\, z_3^2\, x_1^2 + 6\, p_2^2\, z_3\, (p_3\, z_3 - q_3\, z_2)\, x_1\, x_2 - 18\, p_2^3\, z_3^2\, x_2\, x_4 \\ & + [3\, p_2\, z_3\, (4\, p_2\, q_3\, z_1 - q_4\, z_2 + p_4\, z_3) - 4\, (p_3\, z_3 - q_3\, z_2)^2]\, x_2^2 = 0,\end{aligned}$$

a v souřadnicích přímkových

$$\begin{aligned}(3')\qquad & 9\, p_2^2\, z_3^2\, u_1^2 + 6\, p_2\, z_3\, (p_3\, z_3 - q_3\, z_2)\, u_1\, u_4 - 18\, p_2^3\, z_3^2\, u_2\, u_4 \\ & + [5\, (p_3\, z_3 - q_3\, z_2)^2 - 3\, p_2\, z_3\, (4\, p_2\, q_3\, z_1 - q_4\, z_2 + p_4\, z_3)]\, u_4^2 = 0.\end{aligned}$$

2. Vyšetřme krátce souvislost přímek trsu O s kuželosečkami jim přidruženými. Rovnice (3) ukazuje, že přímky, jimž přidružené kuželosečky obsahují pevný bod roviny ω, tvoří kvadratický kužel. Tyto kužele dotýkají se roviny ω podél t, a mají zde styk druhého řádu: vyjádříme-li ze (3) $\frac{z_3}{z_1}$ jako potenční řadu v $\frac{z_2}{z_1}$, máme

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{q_3}{3\, p_2^2} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + \ldots$$

Společná křivost těchto kuželů jest rovna $+\frac{2}{3}$ křivosti plochy tečen křivky C.[2]) Podobně ukazuje rovnice (3′), že přímky, jimž přidružené kuželosečky dotýkají se pevné přímky roviny ω, tvoří zase kvadratický kužel. I tyto kužele dotýkají se ω podél t a mají zde společnou křivost, rovnou $+\frac{5}{6}$ křivosti plochy tečen, neboť nyní nalezneme

$$\frac{z_3}{z_1} = \frac{5\, q_3}{12\, p_2^2} \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + \ldots.$$

Tyto výsledky stačí, abychom konstruktivně řešili úlohu: Známe kuželosečky C_1, C_2, přidružené resp. přímkám p_1, p_2; jest nalézti kuželosečku C_3 přidruženou přímce p_3.

Trojiny charakteristické trilinearity tvoří: 1. libovolný bod na t, jeho polára vzhledem k C_1 a rovina $(t\, p_1)$; 2. libovolný bod na t, jeho polára vzhledem k C_2 a rovina $(t\, p_2)$; 3. libovolný bod na t, přímka t a rovina ω; 3′. bod O, libovolná přímka svazku (O, ω) a rovina ω. Tím jest tato trilinearita určena. Rovina (p_1, p_2) protne ω v přímce p_0. Nechť rovina τ svazku t spolu s p_0 dělí $p_1\, p_2$ harmonicky a sestrojme bod S, aby S, p_0, τ byla jedna trojina charak. trilianerity. Dále sestrojme kužel K_0 tak, aby bod S, kterákoli přímka svazku (O, ω) a polární rovina její vzhledem ke K_0 tvořily trojinu charak trilinearity, a aby obsahoval přímku p_1 a tedy i p_2. Kužel K_0 a dvojice rovin $[(p_1\, p_2), \omega] \equiv \delta_1$ stanoví svazek kuželů, jemuž náleží i dvojice rovin $[(p_1\, t), (p_2\, t)] \equiv \delta_2$. V tomto svazku stanovme kužele K', K'' tak, aby bylo

---

[1]) Viz moji práci „O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivného prostoru“, (jež vyjde v „Čas. p. p. m. a f.)“ kde zejména vyložena souvislost této trilinearity s trilinearitou korelativní. Zde vytknu pouze jeden důsledek vět l. c. odvozených, který nám v dalším bude užitečným a jenž snadno se verifikuje: Zvolme na t kdekoli bod S. Kterýkoli kužel, pro nějž každá přímka svazku (O, ω) spolu se svou polární rovinou a s bodem S tvoří trojinu charak. tril. elementu C, má podél t křivost rovnou jedné třetině křivosti plochy tečen čáry C. Při tom rozumí se křivostí rozvinutelné plochy (i kužele) limita poměru úhlu dvou tečných rovin k úhlu příslušných vytvořujících přímek.

[2]) V. cit. práci.

$$(\delta_1\, \delta_2\, K_0\, K') = \tfrac{1}{2}, \quad (\delta_1\, \delta_2\, K_0\, K'') = \tfrac{2}{5}. \tag{4}$$

Rovina $(t\, p_3)$ protne K' mimo v t ještě v přímce p' a K'' v p''. Kuželosečky C_1, C_2 mají v O styk druhého řádu; protínají se tedy ještě v jednom bodě M a mají mimo t další společnou tečnu m. Sestrojme nyní projektivitu π mezi řadou bodů na t a svazkem přímek (O, ω) takovou, aby každý pár prvků z π spolu s rovinou $(t\, p_3)$ tvořil trojinu charakteristické trilinearity a uvažujme v ω svazek Σ kuželoseček, pro něž každý pár prvků z π jest pól a polára. Ve svazku Σ najděme kuželosečku C' obsahující M, a kuželosečku C'', dotýkající se m. Konečně sestrojme v Σ, jemuž náleží i kuželosečka ε rozpadající se ve dvojnásobnou t, kuželosečku C_3 tak, aby

$$(\varepsilon\, C'\, C''\, C_3) = (t\, p'\, p''\, p_3).$$

Kuželosečkou hledanou jest potom C_3. Dle věty uvedené v odst. 1., pozn., jest totiž křivost K_0 podél t rovna $+\frac{1}{3}$ křivosti plochy tečen čáry C, a tudíž dle relací (4) křivost K', K'' rovna resp. $+\frac{2}{3}$, $+\frac{5}{6}$ křivosti této rozvinutelné plochy. V důsledku toho jest K' (K'') místem přímek, jimž přidružené kuželosečky obsahují M (dotýkají se m); rovina $(p_3\, t)$ pak místem přímek, jimž přidružené kuželoselosečky náležejí svazku Σ. Přímkám p', p'' jsou tedy přidruženy resp. kuželosečky C', C'' a přímce p_3 C_3, jak bylo tvrzeno.

Poznamenejme ještě mimochodem zajímavou okolnost, že vztah mezi přímkami trsu O a kuželosečkami jim přidruž. definuje *jednojednoznačnou* dotykovou transformaci mezi trsem O a rovinou ω.

3. Z rovnic (1) křivky C vypočteme nyní souřadnice jejích tečen. Tyto jsou úměrny determinantům matice

$$\left\| \begin{matrix} t, & \frac{p_2}{2} t^2 + \frac{p_3}{6} t^3 + \frac{p_4}{24} t^4 + \ldots, & \frac{q_3}{6} t^3 + \frac{q_4}{24} t^4 + \frac{q_5}{120} t^5 + \ldots \\ 1, & p_2 t + \frac{p_3}{2} t^2 + \frac{p_4}{6} t^3 + \ldots, & \frac{q_3}{2} t^2 + \frac{q_4}{6} t^3 + \frac{q_5}{24} t^4 + \ldots \end{matrix} \right\|,$$

píšeme-li pro pohodlí $\frac{x_1}{x_4} = t$. Jsou tedy rovnice C v přímkových souřadnicích:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\varrho\, p_{12} &= -\frac{p_2}{2}\, t^2 - \frac{p_3}{3}\, t^3 - \frac{p_4}{8}\, t^4 - \ldots,\\
\varrho\, p_{23} &= -\frac{p_2 q_3}{12}\, t^4 - \frac{p_2 q_4}{24}\, t^5 - \frac{9\, p_2 q_5 + 5\,(p_3 q_4 - p_4 q_3)}{720}\, t^6 + \ldots,\\
\varrho\, p_{31} &= \frac{q_3}{3}\, t^3 + \frac{q_4}{8}\, t^4 + \frac{q_5}{30}\, t^5 + \ldots,\\
\varrho\, p_{14} &= 1,\\
\varrho\, p_{24} &= p_2\, t + \frac{p_3}{2}\, t^2 + \frac{p_4}{6}\, t^3 + \ldots,\\
\varrho\, p_{34} &= \frac{q_3}{2}\, t^2 + \frac{q_4}{6}\, t^3 + \frac{q_5}{24}\, t^4 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Kombinujeme-li tyto rovnice lineárně tak, aby pravá strana počínala teprve pátou mocninou t, a anulujeme-li pak levou stranu, obdržíme rovnici oskulačního lineárního komplexu $\boldsymbol{\Omega}$ křivky C:

$$
(6)\qquad a\, p_{12} + b\, p_{23} + c\, p_{31} + d\, p_{34} = 0,
$$

kde

$$
(6')\qquad
\begin{aligned}
a &= -4\, p_2\, q_3^3,\quad b = 3\, q_4\,(p_2\, q_4 - 2\, p_3\, q_3) - 2\, q_3\,(p_2\, q_5 - 3\, p_4\, q_3),\\
c &= 2\, p_2\, q_3\,(p_2\, q_4 - 2\, p_3\, q_3),\quad d = -4\, p_2^2\, q_3^2.
\end{aligned}
$$

Invariant komplexu $\boldsymbol{\Omega}$ jest $a\, d = 16\, p_2^3\, q_3^5$; nemůže tedy za našich předpokladů $\boldsymbol{\Omega}$ býti speciální. Polární rovina bodu (x_1, x_2, x_3, x_4) vzhledem k $\boldsymbol{\Omega}$ jest

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\varrho\, u_1 &= a\, x_2 - c\, x_3,\\
\varrho\, u_2 &= -a\, x_1 + b\, x_3,\\
\varrho\, u_3 &= c\, x_1 - b\, x_2 + d\, x_4,\\
\varrho\, u_4 &= -d\, x_3.
\end{aligned}
$$

Buď $\boldsymbol{\Gamma}$ plocha tečen čáry C. Jsou-li $(y_1, y_2. y_4)$ souřadnice proměnného bodu průseku $\boldsymbol{\Gamma}$ s ω, jest

$$
y_1 : y_2 : y_4 = p_{31} : -p_{23} : p_{34},
$$

kde na pravo jest dosaditi z (5); bude tudíž

$$
\frac{y_1}{y_4} = \frac{2}{3}\, t + \frac{q_4}{36\, q_3}\, t^2 + \frac{6\, q_3 q_5 - 5\, q_4^2}{540\, q_3^2}\, t^3 + \ldots
$$

$$
\frac{y_2}{y_4} = \frac{p_2}{6}\, t^2 + \frac{p_2\, q_4}{36\, q_3}\, t^3 + \frac{12\, p_2 q_3 q_5 + 15\, q_3\,(p_3 q_4 - p_4 q_3) - 10\, p_2 q_4^2}{1080\, q_3^2}\, t^4 + \ldots
$$

a vyloučíme-li

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
\frac{y_2}{y_4} &= \frac{3\, p_2}{8}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^2 + \frac{3\, p_2\, q_4}{64\, q_3}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^3 + \\
&+ \frac{3\, p_2\,(96\, q_3\, q_5 - 115\, q_4^2) + 720\, q_3\,(p_3\, q_4 - p_4\, q_3)}{10240\, q_3^2}\left(\frac{y_1}{y_4}\right)^4 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Oskulační kuželosečku C_2 průseku Γ s ω nazveme s Wilczynskim[1]) *oskulační kuželosečkou křivky* C v bodě O. Z rovnice (8) vypočteme snadno rovnici C_2; obdržíme v souřadnicích bodových

$$\begin{aligned} & 20\,p_2^2\,q_3(3\,p_2\,q_3\,x_1^2 + q_4\,x_1\,x_2 - 8\,q_3\,x_2\,x_4) \\ & + [p_2\,(32\,q_3\,q_5 - 45\,q_4^2) + 80\,q_3\,(p_3\,q_4 - p_4\,q_3)]\,x_2^2 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

a v souřadnicích přímkových

$$\begin{aligned} & 20\,p_2\,q_3\,(4\,q_3\,u_1^2 + q_4\,u_1\,u_4 - 6\,p_2\,q_3\,u_2\,u_4) \\ & - [p_2\,(24\,q_3\,q_5 - 35\,q_4^2) + 60\,q_3\,(p_3\,q_4 - p_4\,q_3)]\,u_4^2 = 0. \end{aligned} \tag{9'}$$

Korelativně definujeme jako *oskulační kužel křivky* C oskulační kužel druhého stupně Γ_2 kužele promítajícího C s O. Rovnici Γ_2 možno odvoditi stejnou cestou, jako jsme učinili s C_2; jednodušeji však k ní dospějeme, užijeme-li okolnosti bez počtu patrné, že Γ_2 jest polární k C_2 vzhledem k Ω. Obdržíme takto z (9′) a (7) rovnici Γ_2 v souřadnicích bodových:

$$\begin{aligned} G\,(x_1, x_2, x_3) \equiv {} & 20\,q_3^2\,[4\,q_3^2\,x_2^2 + (3\,p_2\,q_4 - 8\,p_3\,q_3)\,x_2\,x_3 - 6\,p_2^2\,q_3\,x_1x_3] \\ & + [9\,p_2^2\,(4\,q_3\,q_5 - 5\,q_4^2) + 60\,p_2\,q_3\,(p_3\,q_4 - 2\,p_4\,q_3) + 80\,p_3^2\,q_3^2]\,x_3^2 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

4. Bodem O veďme libovolnou přímku (z_1, z_2, z_3). Kuželosečka $C_2^{(z)}$ přidružená této přímce vzhledem k elementu C jest dána rovnicí (3). Křivky $C_2^{(z)}$ a C_2 dotýkají se v O a protínají se tudíž v dalších dvou bodech; abychom obdrželi rovnici spojnice těchto dvou průsečíků, násobíme (3) výrazem $20q_3^2$, (9) výrazem $-3\,p_2\,z_3^2$, sečteme a dělíme x_2:

$$\begin{aligned} P_1 \equiv {} & 60\,p_2^2\,q_3\,z_3\,\{[(2\,p_3\,q_3 - p_2\,q_4)\,z_3 - 2\,q_3^2\,z_2]\,x_1 + 2\,p_2\,q_3\,z_3\,x_4\} \\ & + \{20\,q_3^2\,(8\,p_3\,q_3 - 3\,p_2\,q_4)\,z_2\,z_3 + 240\,p_2^2\,q_3^3\,z_1\,z_3 - 80\,q_3^4\,z_2^2 \\ & + [3\,p_2^2\,(45\,q_4^2 - 32\,q_3\,q_5) - 60\,p_2\,q_3\,(4\,p_3\,q_4 - 5\,p_4\,q_3) - \\ & - 80\,p_3^2\,q_3^2]\,z_3^2\}\,x_2 = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Rovnice reciproké poláry přímky (z_1, z_2, z_3) vzhledem k Ω jest

$$\begin{aligned} P_2 \equiv {} & 2\,p_2\,q_3\,\{[(2\,p_3\,q_3 - p_2\,q_4)\,z_3 - 2\,q_3^2\,z_2]\,x_1 + 2\,p_2\,q_3\,z_3\,x_4\} \\ & + \{4\,p_2\,q_3^3\,z_1 + [3\,q_4\,(p_2\,q_4 - 2\,p_3\,q_3) - 2\,q_3\,(p_2\,q_5 - 3\,p_4\,q_3)]\,z_3\}\,x_2 = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Průsečík M přímek $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ jest na t; jeho rovnice jest

$$2\,p_2\,q_3\,z_3\,u_1 - [(2\,p_3\,q_3 - p_2\,q_4)\,z_3 - 2\,q_3^2\,z_2]\,u_4 = 0. \tag{13}$$

Souřadnice tečen vedených s M k C_2 obdržíme řešením rovnic (9′) a (13). Jedna z nich je t; jako rovnici druhé nalezneme

$$\begin{aligned} P_3 \equiv {} & 60\,p_2^2\,q_3\,z_3\,\{[(2\,p_3\,q_3 - p_2\,q_4)\,z_3 - 2\,q_3^2\,z_2]\,x_1 + 2\,p_2\,q_3\,z_3\,x_4\} \\ & + \{20\,q_3^2\,[4\,q_3^2\,z_2^2 + (3\,p_2\,q_4 - 8\,p_3\,q_3)\,z_2\,z_3] \\ & + [3\,p_2^2\,(15\,q_4^2 - 8\,q_3\,q_5) - 60\,p_2\,q_3\,(2\,p_3\,q_4 - p_4\,q_3) + \\ & + 80\,p_3^2\,q_3^2]\,z_3^2\}\,x_2 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

---

[1]) Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, str. 250.

Podobně nalezneme rovnici druhé tečny s M k $C_2^{(z)}$:

$$
\begin{aligned}
&P_4 \equiv 36\, p_2^2 q_3 z_3 \{[(2\, p_3 q_3 - p_2 q_4) z_3 - 2\, q_3^2 z_2]\, x_1 + 2\, p_2 q_3 z_3 x_4\} \\
(15)\qquad &+ \{20\, q_3^2 [(3\, p_2 q_4 - 8\, p_3 q_3) z_2 z_3 + 4\, q_3^2 z_2^2] - 48\, p_2^2 q_3^3 z_1 z_3 \\
&+ [9\, p_2^2 q_4^2 - 12\, p_2 q_3 (4\, p_3 q_4 + p_4 q_3) + 80\, p_3^2 q_3^2]\, z_3^2\}\, x_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Srovnáním levých stran rovnic (11), (12), (14), (15) obdržíme, přihlížejíce k (10), identity

$$
\begin{aligned}
P_1 - P_3 &= -2\, G(z_1, z_2, z_3)\, x_2, \\
P_1 + P_3 &= 60\, p_2 z_3 P_2, \\
P_1 - 4\, P_3 &= -5\, P_4.
\end{aligned}
$$

Takto jsme vedeni k následujícímu výsledku: Bodem O prostorové křivky C veďme libovolnou přímku z (mimo oskulační rovinu ω čáry C v O) a sestrojme kuželosečku $C_2^{(z)}$ přidruženou přímce z vzhledem k elementu C a oskulační kuželosečku C_2 křivky C v O. Tyto dvě kuželosečky mají v O styk přesně prvého řádu a protínají se tedy ve dvou (různých nebo splývajících) dalších bodech, jichž spojnice buď u_1. Dále buď u_2 reciproká polára z vzhledem k oskul. lin. komplexu Ω křivky C v O. — Tehdy a jen tehdy, je-li z na oskulačním kuželi Γ_2 čáry C v O, splynou u_1 a u_2 v jedinou přímku. Oba od O různé průsečíky C_2 a $C_2^{(z)}$ splynou pak (a jen pak) v jediný, v němž jest $u_1 \equiv u_2$ společnou tečnou.1) Není-li však z na Γ_2, leží průsečík M přímek u_1 a u_2 na tečně t křivky C v O. Veďme bodem M druhé tečny u_3, u_4 resp. ke kuželosečkám C_2 a $C_2^{(z)}$. Pak platí

$$(t\, u_2\, u_1\, u_3) = -1, \quad (t\, u_4\, u_1\, u_3) = \tfrac{1}{4}.$$

Stačí poznamenati, že křivost kuželoseček $C_2^{(z)}$ v O rovná se křivosti C (a jest tedy stálá), kdežto křivost C_2 v O rovná se třem čtvrtinám křivosti C, abychom seznali, že výsledek odvozený obsahuje postačující základ příslušné konstruktivní teorie.2)

---

1) Tento speciální výsledek dokáže se velmi snadno synteticky, nahradíme-li C oskulační křivkou kubickou.

1) V této souvislosti jest upozorniti ještě na jednu větu mé cit. práce: Buď P libovolný bod na t, p polára P vzhledem k C_2, a π polární rovina p vzhledem ke Γ_2. pak svazek přímek (P, π) náleží oskul. lin. kongruenci (a tedy i oskul. lin. komplexu) křivky C v O. P, p, π tvoří, mimochodem řečeno, trojinu charakt. trilinearity elementu C.

Poznámky ke směrným přesmykům v Barrandienu.
(Příspěvek k poznání mechanismu vrásnění.)

Podává

Odolen Kodym.

(Se 3 obrázky.)

(Předloženo dne 28. ledna 1921.)

Směrné přesmyky jsou zjevem v Barrandienu i jinde velmi hojným.[1]) Vznikaly *tangenciálním tlakem* při tvoření normálních vrás, tedy v Barrandienu v I. *hlavní fázi vrásnění variského.* Jejich plochy dislokační zapadají *souhlasně* s okolními vrstvami, ovšem pod úhlem daleko větším, obyčejně 70°—80°. V synklinále jsou umístěny tak, že vždy *kry ose synklinály bližší* jsou *zdvihány přes křídla synklinály* (viz Barrandien), kdežto u *antiklinál* naopak *křídla* bývají zdvihána *nad kry bližší ose.* (Pohoří ještědské.)[2])

Tyto přesmyky byly, jak svrchu uvedeno, způsobeny *tangenciálním tlakem* horotvorným. Avšak bezprostřední příčina jejich vzniku není zcela zřejmá, uvážíme-li, že *úklon* většiny z nich jest příliš veliký (70°—80°). Kdybychom buď na nezvrásněné souvrství, nebo spíše na *vrásu* o zcela *mírném úklonu* vrstev na křídlech (ramenech), působili tlakem tangenciálním, docílili bychom pravděpodobně *většího vztyčení vrstev* na křídlech a tím i směstnání jich na menší prostor (obr. 1. I.).

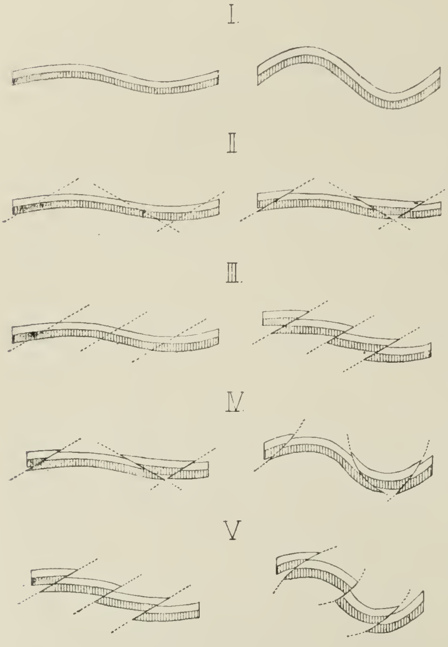
Týmž tlakem mohou vzniknouti též *dislokace v užším slova smyslu,* které jsou pravými *přesuny,* s mírným úklonem. Jsou buď *souklonné* s vrstvami (obr. 1. II.), nebo týmž právem mohou být i *protiklonné,* neb na úklonu vrstev *nezávislé* (obr. 1. III.). Podle takovýchto přesunů jsou vrstvy z nadloží poruchy *přesunuty* přes vrstvy jejího podloží. Při tom v případě znázorněném na obr. 1. II. vzniká *zdvihání vrstev* v podobě

---

[1]) Rozumím přesmyky nevrásové, kerné. O přesmycích vrásových se nezmiňuji.

[2]) Z četné literatury uvádím toliko: R. Kettner: Über die Eruptionsfolge atd. Jahrbuch d. k. k. geolog. R. A. 1917. — R. Kettner-O. Kodym: Geologické zprávy z pohoří ještědského. Sborník Čes. spol. zeměvědné 1919.

klínu, jehož čelo musí býti velmi *široké*. Takovéto zdvihání snadno lze si představit, poněvadž lze ho docílit poměrně malým tlakem. Úklon dislokačních ploch u přesunů tohoto rázu nemohl primárně být příliš příkrý, neboť při velikém úhlu zapadání ploch dislokačních (při malém úhlu klínu) nemohl by tlak tangenciální současně způsobiti trhlinu v kůře zemské, překonati tření při přesunu a zdvihnouti kru.



Obr. č. 1. Schematický obraz vrstvy vyňaté ze souvrství, na niž působí tangenciální tlak. Na levo vrstva před působením tlaku, na pravo táž vrstva tlakem dislokovaná.

Vznikl-li podobný přesun *na začátku vrásnění*, když vrstvy byly málo nakloněny, byla jeho dislokační plocha později vrásněna *spolu s okolními vrstvami*. Při zapadání souklonném s okolními vrstvami nastalo pak vztyčování ploch dislokačních, případně až k úhlu 70⁰—80⁰, obvyklému v Barrandienu u směrných přesmyků (obr. 1. IV.). Při zapadání ploch dislokačních původně na úklonu vrstev *nezávislém*, po zvrásnění vzniknou jednak *listrické plochy*, jednak nabudou plochy dislokační zapadání nepravidelného (obr. 1. V.).

Jde nyní o to, můžeme-li většinu *směrných přesmyků* z Barrandienu i odjinud vykládati jako *pravé přesuny*, jejichž dislokační plochy byly *pozdějšími pochody vrásnícími* více *vztyčeny*, jak je znázorněno na obr. 1. IV., či máme-li pro jejich vznik hledat *výklad jiný*. Kdybychom se chtěli přidržeti výkladu prvého, že směrné přesmyky jsou pravými přesuny, muselo by o přesmycích platit toto:

I. Jelikož směrné přesmyky v Barrandienu i jinde mají plochy dislokační *souklonné* s vrstvami, byly by vznikaly *přesuny* rovněž *souklonně* s vrstvami, jak je naznačeno na obr. 1. II.

II. V podloží i nadloží plochy dislokační týž stratigrafický horizont musel by míti přibližně *stejný úklon*, neboť tu byla jedna vrstva prostě roztržena.

III. *Úklon* plochy dislokační závisel by na *úklonu okolních vrstev*; ve vrstvách mírně ukloněných byly by dislokační plochy přesmyků *ukloněny mírně*, ve vrstvách vztyčených příkře.

Ve skutečnosti však shledáváme poměry poněkud jiné, odporující předpokladům I.—III.

Ad I. Kdybychom předpokládali u všech přesunů *souklonnost dislokačních ploch s okolními vrstvami*, byli bychom na rozpacích při vysvětlování vzniku některých listrických ploch. Přes to mohli bychom přijati názor, že většina — nikoliv však všechny přesuny — jsou s okolními vrstvami souklonné.

Ad II. Vrstvy v nadloží směrných poruch v Barrandienu pravidelně svým úklonem *značně se liší* od vrstev v podloží dislokací, zapadajíce pod úhlem obyčejně *příkřejším, což odporuje předpokladu o přesunovém rázu těchto poruch.*

Ad III. Se skutečností se nesrovnává předpoklad uvedený pod III. Dislokační plochy *velmi konstantně zapadají* pod úhlem 70°—80°, ať je úklon okolních vrstev jakýkoliv. Toliko v jediném případě mám za dokázáno, že dislokační plocha směrného zdvihu byla dodatečně s okolními vrstvami překročena (v motolském údolí); o tomto místě zmíním se níže.

Z toho všeho plyne, že *většina směrných dislokací v Barrandienu* i jinde nevznikla jakožto *kerné přesuny,* nýbrž že musíme pro jejich vznik hledat výklad jiný.

Některé poruchy v Barrandienu liší se však dosti nápadně od ostatních směrných dislokací, zejména *úklonem svých dislokačních ploch* a *úklonem sousedních vrstev.* Jejich dislokační plochy zapadají pod úhlem *velmi mírným* 25°—35°. Rovněž okolní vrstvy jsou uloženy mírně majíce pod dislokací i nad ní *týž úklon.* Ráz těchto poruch odpovídá ve všem přesunům, jak o nich bylo svrchu uvažováno, a pro jejich odlišnost od ostatních směrných přesmyků pokládám je *za pravé přesuny,* podmíněné *přímo tangenciálním tlakem horotvorným.* V Barrandienu vznikly za I. hlavní fáze vrásnění variského. Nejnápadnějším a největším takovým přesunem je dislokace odkrytá v lomu na *sev. straně Kobyly u Koněprus* j. od *Berouna,* podle níž byly vápence budňanské *e* β přesunuty přes vápence koněpruské *f.* Je to jedna z oněch velikých poruch, které omezují na severu vápencovou skupinu koněpruskou[3]). Jinou daleko nepatrnější dislokaci toho druhu zjistil jsem *v údolí Berounky* na levém břehu u ústí *Kačáku* severně od velikého lomu na saturační vápenec a zaznamenal jsem ji v defilé levým břehem Berounky[4]). Není vyloučeno, že do této kategorie poruch náleží též četné dislokace směrné, porušující kambrium *jižně od rozsedliny jílové,* jež zjistil Kettner v příbramských dolech.[5])

Zjistiv, že většina směrných poruch zdvihových v Barrandienu nenáleží k přesunům, věnoval jsem jim větší pozornost. Předně jsem měřil *úklon vrstev* v nadloží i v podloží poruch a tu jsem zjistil, že úklon vrstev v podloží i nadloží je velmi různý, mírný i velmi příkrý. Při tom však *vždy v nadloží přesmyku je úhel sklonu největší*, dále od něho stává se mírnější. *V podloží bývá mírnější, nežli v nadloží.*

---

[3]) Tato porucha je zanesena na mapce v práci: O. Kodym: Pásmo F-f_2 na pravém břehu Berounky. Rozpravy Č. A. 1919.

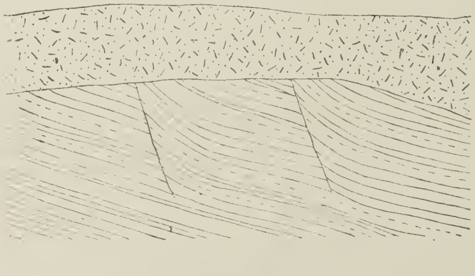
[4]) O. Kodym: Kritické poznámky k Seemannovu výkladu tektoniky atd. Sborník České spol. zem. 1919.

[5]) R. Kettner: Nový geologický profil příbramskými doly a příbramským okolím. Sborník Č. spol. zem. XXIV.

Dále sledoval jsem *rozšíření* přesmyků tohoto rázu v Barrandienu a shledal jsem zajímavou okolnost, *že scházejí většinou tam*, kde *jsou vyvinuty vrásy* a tam, kde *úklon vrstev je příliš mírný.* Tak na příklad přesmyky jižního křídla Barrandienu *na pravém břehu Berounky*, které pokračují od *Srbska* na *Kodu, Kodský revír* až k *Tobolce*, vymizejí směrem ke *Koněprusům.* Tvoří totiž vrstvy severozápadně od Koněprus a u *Bitova* mírnou synklinálu, jejíž úklony pohybují se toliko okolo 10⁰—20⁰. Z téhož důvodu nevytvořily se přesmyky v oblasti *Borku, Malkova, Lounínu* a západně odtud, neboť tam vrstvy svrchnosilurské tvoří *synklinálu na Lejškově*, antiklinálu na *Borku*, u *Tmáně* atd., majíce při tom úklon velmi mírný (zejména severně od Tmáně).

Nápadné jest, že přesmyky směrné jsou *nejhojnější tam*, kde jest *konstantní zapadání*, na př. *v jižním křídle Barrandienu v Brdech* a *v severním křídle Barrandienu v Brdatkách.* V siluru a v devonu vyhýbají se směrné zdvihy velmi nápadně místům, kde jsou vyvinuty *vrásy* (antiklinály) a partiím velmi *blízkým dlouhé ose Barrandienu* (vyjímku činí přesmyk kodské rokle). Z téhož důvodu jsou velmi vzácné směrné přesmyky v části Barrandienu *jihozápadně od Litavky* poblíže dlouhé osy v okolí *Rokycan, Holoubkova* atd., neboť tam byly v době vzniku směrných přesmyků *mírné vrásy*, které se později působením příčného tlaku proměnily *v pánve o mírném úklonu vrstev.*

Konečně jsem pozoroval, že přesmyky směrné *vytrácejí se obyčejně do vrstev stratigraficky starších do hloubky*, zasahujíce a porušujíce toliko partie *stratigraficky vyšší.* Jsou-li totiž příčnou poruchou odděleny dvě kry, z nichž jedna je *níže*, druhá *výše* položena, pozorujeme často, že přesmyk je sice patrný na kře *níže položené*, tedy ve vrstvách *mladších*, že však zmizí beze stopy na sousední denudací více postižené kře, kde na povrch vystupují vrstvy *stratigraficky starší.* Tak tomu je zejména na *jihozápadních hranicích vápencové skupiny koněpruské* sev. od *Suchomast*, kde údolím potoka suchomastského probíhá *příčná porucha*, podle níž část jihozápadní byla vyzdvižena. Směrné přesuny, které porušují *spodní devon* (*f* a *g* α_1') ve kře severovýchodní, nepřestupují na kru jihozápadní, budovanou svrchním silurem. Týmž způsobem vykládám *vytrácení přesmyku chuchelského* a *Krejčího* na východ od Vltavy. Tam není sice



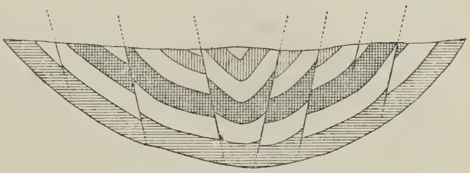
Obr. č. 2. Náčrtek odkryvu v zářezu cesty z Lounina do Slavíků u Zdic. Nahoře suť, dole vrstvy břidlic a vápenců, porušené dvěma detailními zdvihy směrnými.

pokračování těchto přesmyků ukončeno příčným zlomem, nýbrž souvisí spíše s *brachysynklinálním uzavíráním pánve,* neboť směrem k východu vystupují tu rovněž vrstvy stratigraficky starší a kromě toho jsou úklony vrstev vých. od Vltavy celkem mírnější.

Nejlépe a nejpřesvědčivěji byl však dokázán ráz směrných přesmyků *odkryvem* v zářezu cesty z *Lounína* do *Slavíků* východně od *Zdic,* jehož skizu podávám na přiloženém obrázku (č. 2.) Z náčrtku je patrno, že vrstvy butovické *e* α_3 jsou porušeny *dvěma směrnými přesmyky,* které se *vytrácejí do hloubky,* a že *vrstvy v nadloží přesmyků* zapadají pod *značně příkřejším úhlem nežli vrstvy v podloží dislokačních ploch.*

Na základě těchto svých pozorování přikládám největší části přesmyků směrných zcela jiný původ, nežli svrchu popsaným *přesunům.* Kdežto přesuny vznikaly většinou na *samém začátku vrásnění* a *přímo silou tangenciálního tlaku,* vznikaly *směrné zdvihy* (tak nazývám přesmyky toho druhu) teprve při *větším vztyčení vrstev* ve vrásách, nevytvořivše se, dokud úklon vrstev byl příliš malý. Vlastní příčinou vzniku těchto zdvihů byla ta okolnost, že vrstvy *skládané do synklinály* jsou vlastně *směstnávány do oblouků,* při čemž vrstvy stratigraficky *nejstarší* zaujmou oblouk o *největším poloměru,* kdežto vrstvy *mladší* jsou směstnávány do oblouků o *poloměrech menších.* Proto nastává ve *vrstvách mladších napětí,* které se vytrácí směrem k vrstvám starším. Toto napětí *podmiňuje právě vznik směrných zdvihů.* Mladší vrstvy nemohouce totiž se směstnati do oblouku *krátkého o malém poloměru, vyboртí se* jaksi podle směrné dislokace, *odloučí se* od vrstev starších a *vyzdvihnou se* a vztyčí oproti vrstvám v podloží poruchy. Schematicky znázorněn je ideální obraz vzniku směrných zdvihů na obr. 3.

Přijmeme-li tento výklad o vzniku směrných zdvihů, vysvětlíme si okamžitě příčinu zjevů dříve popsaných. Směrné zdvihy *nepokračují do hloubky,* poněvadž tam ubývalo napětí. Bylyť vrstvy stratigraficky starší původně skládány do oblouků o větších poloměrech, netrvalo v nich tudíž napětí při tvoření synklinály, takže směrné zdvihy nebyly v nich založeny. Rovněž ve vrstvách *o mírném úklonu* a ve vrstvách *zvrásněných v antiklinály a synklinály* menších rozměrů, nemohly směrné zdvihy povstat, poněvadž napětí v jádře synklinály nebylo dosti mohutné, aby podmínilo vznik zdvihů. *Vznik příkřejších úklonů vrstev* v nadloží zdvihových ploch dislokačních vyplývá pak z celého rázu těchto poruch.



Obr. č. 3. Schema denudované synklinály, porušené směrnými zdvihy. V obraze zanedbáno jest diskordantní vrásnění a a vrstva stratigiaficky nejstarší znázorněna jest pro přehlednost neporušeně.

Zdvihy směrné vznikaly v Barrandienu *v hlavní fázi variského vrásnění,* avšak ne na počátku, nýbrž asi *dosti pozdě,* zajisté později nežli směrné přesuny. Jest totiž podmínkou vytvoření zdvihů praeexistence *vrás*, resp. *synklinál o dosti příkrých úklonech*. Přímých důkazů o vzájemném stáří přesunů a zdvihů nemám, kromě Kettnerova profilu přibramskými doly,[6]) kde *dislokace o mírném úklonu*, jež pokládám za *přesuny*, jsou zřetelně *starší rozsedliny jílové*. O tom, že směrné zdvihy vznikaly až ke konci I. hlavní fáze vrásnění variského v Barrandienu svědčí též okolnost, že *dislokační plochy zdvihů* upadají pod úhlem 70°—80°. Kdyby byly tyto dislokace vznikaly hned *v prvních obdobích horotvorného tlaku*, byly by jejich plochy ještě *vrásněny spolu s okolními vrstvami*, vztyčovány a případně překoceny. Nenašli bychom pak takové *pravidelnosti* v zapadání dislokačních jejich ploch, jaká byla dosud zjištěna. Toliko v jediném případě v zářezu buštěhradské dráhy v motolském údolí zjištěn byl zdvih, jehož plocha dislokační zapadá pod úhlem 100°—110°, jsouc *překocena* i s okolními vrstvami. Podle této dislokace bylo *d* γ vyzdviženo nad *d* δ.

Zjistiti přesně, které kerné přesmyky v Barrandienu náleží *zdvihům* a které *přesunům*, lze toliko tam, kde máme k disposici *úklony plochy dislokační*, *vrstev v nadloží* i *vrstev v podloží* poruchy. To je ovšem případ vzácný. Přes to můžeme podle dosavadních pozorování s určitostí tvrditi, že *největší část velikých směrných přesmyků* náleží ke zdvihům, kdežto přesuny bývají rozměrů značně menších.

Na základě svrchu uvedených pozorování a dedukcí můžeme však též podati *přehled a posloupnost zjevů*, které vznikly v Barrandienu za hlavní prvé fáze variského vrásnění a doplnit tak dosavadní názory.[7]) Tato posloupnost vztahuje se zajisté i k *jiným* územím zvrásněným.

Tlak horotvorný počal působit na vrstvy *nezvrásněné*, v nichž byly snad *predisponovány* pozdější vrásy geosynklinálním prohnutím uloženin. Působením tohoto tlaku počaly se tvořit *mírné vrásy*, jež byly patrně brzy porušeny *směrnými přesuny*. Orogenese postupovala dále a tangenciální síla tvořila *vrásy vždy o příkřejších úklonech*. Avšak s úklonem rostlo i *napětí* v jádrech synklinál, které způsobilo *vznik směrných zdvihů, jimiž celý pochod hlavního vrásnění dostoupil vrcholu*. Vytvořením směrných zdvihů rázem klesl *odpor kladený vrásněným souvrstvím*, orogenetický tlak směstnal vrstvy *do užšího pruhu*, vytvořil *vrásnaté pohoří* a tím překonav všechny překážky, zároveň *vyzněl*. Po polevení tohoto tlaku ukončena byla hlavní fáze vrásnění směrného vznikem *radiálních poklesů směrných*, které vyrovnávají nestejná místní napětí v nově vytvořeném pohoří. — Nedlouho po tom nastalo ovšem v Barrandienu druhé příčné vrásnění variské, o němž jsem podal zprávu jinde.

* * *

---

[6]) Srovnej l. c. 5.

[7]) Srovnej: R. Kettner l. c. 2. — O. Kodym: Tektonická studie v Prokopském údolí atd. Rozpravy Č. A. 1918. — Týž: Druhá fáze variského vrásnění v Barrandienu. Sborník Geolog. úst. R. Č. S. 1920.

Ke konci pro přehlednost podávám vysvětlení terminologie, jíž užívám v této práci i v pracích následujících.

Směrným dislokacím tangenciálním říkám *přesmyky*. Přesmyk může býti *vrásový*, vznikl-li redukcí středního ramene vrásy, nebo *kerný*, vytvořil-li se pohybem kry po předem založené ploše dislokační směrem vzhůru. *Kerný přesmyk* je buď výrazem pouhé *síly tangenciální*, nastane-li podle něho pouhé a skutečné přesunutí vrstev starších přes mladší a pak nazývám jej *přesunem*. *Zdvihem směrným* jmenuji pak takový přesmyk kerný, který je *geneticky spojen* s tvořením *synklinály*, se vztyčováním jejích křídel, a který je podmíněn *napětím* v jádře koryta, vzniklým tím, že vrstvy mladší jsou směstnávány do oblouků o menších poloměrech a tudíž kratších.

Znaky přesunů a zdvihů uvedeny jsou výše obšírněji.

Resumé.

Výsledky práce lze shrnouti takto:

1. *Směrné přesmyky* dělíme na *vrásové*, jež vznikly redukcí středního ramene vrásy, a na *přesmyky kerné*, které se utvořily pohybem kry směrem vzhůru podél dislokační plochy předem utvořené. Přesmyky kerné dělíme na *přesuny* a *zdvihy*.

2. *Přesuny* vznikly na samém počátku vrásnění *pouhým tlakem tangenciálním*. Podle dislokačních ploch, jejichž úklon byl mírný, byla jedna kra zcela jednoduše *přesunována* přes kru sousední. Jelikož kry v nadloží i podloží přesunu vznikly pouhým roztržením a přesunutím vrstev, mají přibližně *týž úklon*. Zapadání ploch dislokačních může býti *souklonné* s vrstvami i *protiklonné*, úklon je do jisté míry závislý na úklonu okolních vrstev. — V Barrandienu čítám k přesunům jednu z velkých dislokací omezujících na severu vápencovou skupinu koněpruskou, a několik dislokací menších, jež se vesměs vyznačují mírným úklonem.

3. Dislokační plochy *směrných zdvihů* jsou vždy souklonné s vrstvami a zapadají pod úhlem 70°—80°. Podle nich byly zdvihány kry ose synklinály bližší přes kry na křídlech synklinály. Tyto zdvihy *vytrácejí se do hloubky*, zasahujíce často jen kry méně zdenudované. Vrstvy v nadloží ploch dislokačních mívají úklon *příkřejší*, nežli vrstvy v jejím podloží. Vyvíjejí se hlavně tam, kde úklon vrstev je příkřejší a kde není detailních vrás. — Zdvihy směrné vznikají v jádře synklinály zároveň se vztyčováním vrstev na křídlech, jsouce výrazem *napětí*, jež povstává tím, že *vrstvy mladší jsou směstnávány do oblouků o menších poloměrech.*

4. *Sled jednotlivých dějů* při hlavní fázi vrásnění směrného možno stanoviti takto: Při začátku vrásnění vznikly za mírných úklonů *přesuny*. Za neustávajícího tlaku vrstvy byly dále *vztyčovány*, až napětí překonalo pevnost vrstev a vznikly *směrné zdvihy*. Tím tlak orogenetický vyzněl a poslední rozdíly v napětích vyrovnávaly se *směrnými poklesy*.

V lednu 1921.

Geologický ústav
čes. vys. učení technického v Praze.

Mnioindikán.

Nové rostlinné barvivo. Předběžné sdělení.

Napsal

E. Senft.

(Z ústavu pro fysiologii rostlinnou při české universitě.
Ředitel prof. dr. Boh Němec.)

(S 5 obrazy v textu.)

(Předloženo dne 11, února 1921.)

O mechu *Mnium stellare* Reich jest známo, že delší dobu ve vodě leže sytě modrozeleně se zabarvuje. Zdá se, že vlastnost tato pouze tomuto jedinému druhu přináleží, ježto se v literatuře o žádném jiném *Mniu* něco podobného nedočteme.

Mech tento vyhledává velmi stinná vlhká místa a nalézáme jej na lesní půdě, v úvozech, na kořenech stromů, jakož i ve skulinách skal jak v nižinách tak v pahorkatinách ano i v Alpách dosti hojně.

Vzali jsme si za úkol studovati tuto doposud neznámou příčinu onoho modrého zabarvování mechu ve vodě.

K pokusům sloužil nám herbářový materiál z několika stanovišť, který se nalézal na stupni různého vývoje a také co do zabarvení velice se různil. Především použili jsme ku pokusům nedávno sbíraný materiál z Tirol, který sbírala moje bývalá asistentka Dr. Kl. Fialová, a také ještě ne celý rok starý materiál od ředitele Oborného ve Znojmě sbíraný.

Prvý mech jeví zcela normální temnozelené zabarvení, druhý jest ale tak nápadně světle žlutozelený, že nemoha v celém onom velikém materiálu vídeňského býv. dvorního musea něco podobného nalézti, poznačil jsem si ho v herbáři jako zvláštní formu (*f. pallescens*).

Zdálo se nám hned od počátku jasným, že příčinou onoho modrého zabarvování mechu ve vodě bude asi nějaká látka povahy glykosidické v buněčném obsahu se nalézající, která teprve účinkem vody za součinnosti nějakého v rostlině přítomného enzymu ono modré barvivo odštěpuje.

Nejprve soudili jsme přirozeně na indikán. Brzy se však ukázalo, že běží o látku od indikánu zcela rozlišnou.

Molisch[1]) upozorňuje, že vedle pravých indigových rostlin jsou mnohé rostliny známy, ve kterých se teprve posmrtně, z chromogenů modrá anebo modrozelená barviva vytvářejí a navrhuje, aby do té doby než známa bude povaha barviv rostlin takových, používalo se pro ně označení rostlin pseudoindikánových na rozdíl rostlin indigových.

Bylo nám tedy zjistiti, zdali jde v našem případě o takovou pseudoindikánovou rostlinku.

Prvé nežli jsme přikročili ku studiu, provedli jsme několik pokusů orientačních.

Něco mechu vařili jsme ve vodě a mohli zjistiti, že nevzniká žádný indolový zápach. Také jedlová stříška zmočená kyselinou solnou se vodními parami nezabarvila.

Po přidání něco kyseliny šťavelové sublimovali jsme něco mechu ve zkoumavce. Skoro se nám zdálo, že na chladných stěnách zkoumavky povstalý nálet byl poněkud do růžova zabarven, leč reakce ta byla naprosto nespolehlivou.

V parách ammoniaku zbarvuje se dříve vodou zvlhčená rostlinka rychle sytě do modra. Tato modrá barva parami kyseliny solné anebo v okyselené vodě ať již jakoukoliv organickou anebo neorganickou kyselinou rychle se odbarvuje. Dokonce voda CO_2 nasycená stačí úplně k odbarvení. Když takovou nějakou kyselinou odbarvenou rostlinku ve vodě opereme a dáme na ni působiti opětně páry ammoniaku, zabarvuje se znova velmi rychle modře.

Ve vodě, ku které přidáno bylo něco málo kysličníku vodičitého, zabarvují se rostlinky rovněž tak jako ve vodě záhy modře. V silném roztoku H_2O_2 barví se ale rostliny pozvolna, nedokonale a modrá barva jejich přemění se v několika hodinách v olivovězelenou, kdežto u objektu ve vodě ležícího jest barva vždy intensivnější, takže po 10 hodinách jsou rostlinky téměř černé.

Několik suchých rostlinek vařili jsme ve zředěném roztoku ammoniaku, tekutinu odfiltrovali a vytřepali chloroformem. Chloroform zůstal *bezbarvý*. Opakovali jsme pokus s rostlinkami, ve kterých se již po delším působení vody modré barvivo vytvořilo, avšak i v tomto případě byl chloroformový výtřepek *bezbarvý*.

Něco původních rostlinek podrobili jsme mikrosublimaci, neobdrželi jsme však žádného náletu.

Z veškerých uvedených reakcí vyplývá tedy zřejmě, že se jedná o barvivo, které nemá s indikanem naprosto nic společného. Navrhujeme tedy pro toto doposud ještě zevrubně neznámé barvivo poimenování *„Mnioindikán“*.

---

[1]) Molisch H. Indigo in Wiesners Rohstoffe des Pflanzenreiches etc. 2. Aufl. 1903. Bd. I., p. 423.

Po těchto orientačních pokusech studovali jsme změny, které nastávají, vložíme-li mech do vody. Změny ty možno zjistiti již po dvou minutách. Nejprve se počnou zabarvovati lístky vyspělé uprostřed lodyžky. Zajímavo jest, že u formy „pallescens m.“ se nejprve zabarvuje žebro a to tak intensivně tmavomodře, že od světle zelenožlutě zbarvené čepele listové ostře odráží. U druhých forem počíná zabarvování buď od obruby listové směrem ku žebru anebo povstávají na lístcích menší a větší modré skvrny.

Trvá to dosti dlouho, někdy až dvě hodiny a i déle, než se veškeré lístky stejně tmavomodře zabarví.

Zdá se, že stáří lístků není pro vznik barviva rozhodujícím, nicméně ale zabarvují se lístky spodní rychleji než lístky na vrcholu lodyžky.

Prohlédneme-li takový modře zabarvený lístek Mnia pod drobnohledem, vidíme, že jest celý obsah buněčný vyplněn modrou tekutinou, ve které leží chloroplasty.

Po krátké již době ukládá se barvivo v podobě přejemné sráže na stěnu buněčnou (tab. obr. 1.) mnohdy v takové míře, že v optické ploše vidíme po stranách podélných stěn buněčných modrý pruh sraženého barviva (obr. 2.).

Po delší době se zrnéčka tato opět rozpouštějí. Zabarvení není tedy nikterak trvalým.

Jakmile se zrnéčka barviva ztratila, odbarvuje se také obsah buněčný. Naproti tomu zabarvují se pak membrány masově červeně. Zdá se tedy, že barvivo, ovšem již ve stavu změněném, od buněčné blány jest vstřebáváno. Tento předpoklad jeví se tím oprávněnějším, poněvadž ono růžové anebo masové zabarvení membrán pozvolna zase vybledne. Pak zdá se býti celý zpětný proces přetváření barviva ukončen.

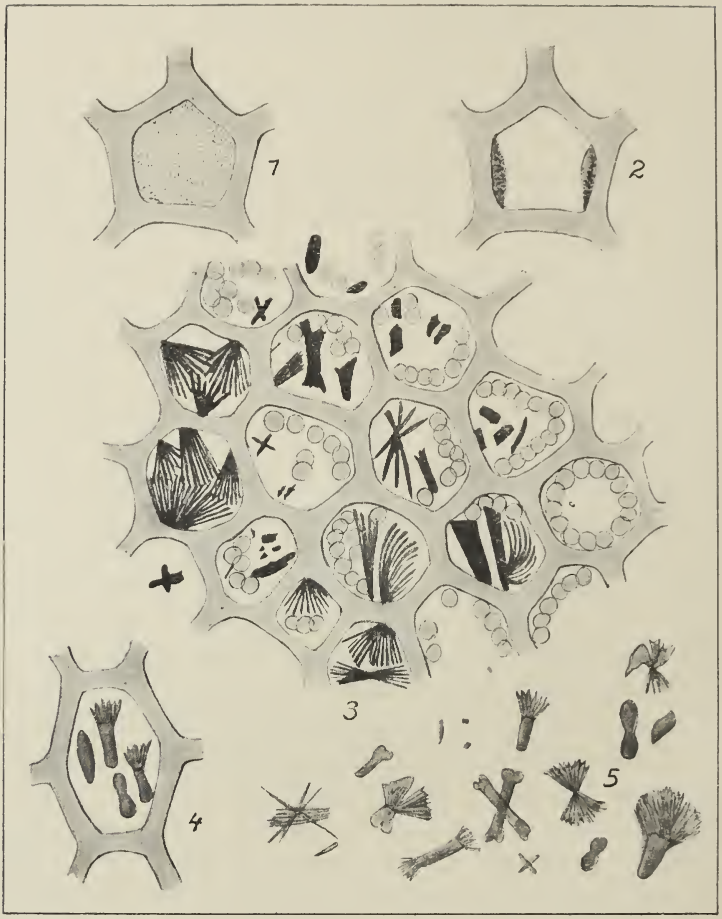
Že se chromogen také již původně před reakcí v blanách nalézal, tomu nasvědčuje ta okolnost, že přeměna barviva z chromogenu v lístcích spodních, které mívají blány odumřelé, právě tak nejasně a nejistě se odehrává jako v lístcích na vrcholku lodyžky.

Velmi charakteristickou reakci obdržíme, vložíme-li zmodralý lístek do 75% roztoku chloralhydrátu. Modrá barva jako bleskem mizí a záhy vznikne v buňkách kristalická sráž, ze které se brzy vytvářejí špinavě fialově zabarvené jehličky, anebo tvary kostem podobné na obou koncích stlustlé. Jehličky seskupují se nezřídka do tvarů košťátek, růžic a jiných tvarů, které zpravidla na bláně přisedají (obr. 4. a 5.).

Použijeme-li slabšího roztoku chloralhydrátu (25%), odehrává se reakce velmi zvolna a tvoří se sráž podlouhlých a vejčitých zpočátku bezbarvých později fialově zbarvených tělísek. Reakce chloralhydrátem jest velmi typická.

Dále pozorovali jsme průběh vytváření barviva přímo pod drobnohledem. Vložili jsme několik lístků herbářového materiálu do vody na podložní sklíčko a přitiskli štítek tak, že voda pouze od pokraje lístků nikoliv z plochy účinkovati mohla.

Mnium stellare.



Obr. 1. Buňka s jemnou sráží barviva. (Obrázek zaostřen na hoření blánu buněčnou.)

Obr. 2. Tatáž buňka v zaostření ve středu buňky.

Obr. 3. Skupina buněk s vyloučeným barvivem — tvarech krystalů, které se vytvořily po vnoření vodou zmočené rostlinky do 10% ammoniaku.

Obr. 4. Buňka s krystaly, sloučeniny barviva s chloralhydrátem.

Obr. 5. Různé tvary krystalů téže sloučeniny.

V lístcích pozorujeme kulatá zrnka chlorofylu ležící v bezbarvé tekutině. Prohlédneme-li preparát zevrubně, nalezneme tu a tam malounká tmavě modrá až černá zrnéčka a zřetelně hranatá tělíska, jakoby krystaly. Skutečně našli jsme několikráte velmi pravidelně rhombické tvary a jednou dokonce přepodivný útvar, který měl tři ramena, z nichž jedno jako trn z vnitra buněčného na povrch prorůstalo. Byl to krystal, který blánu buněčnou probodnul.

Po delším účinku vody na lístky pozorujeme, jak se počíná obsah buněčný od pokraje listového modře zabarvovati. Že se vytvořování barviva skutečně v buňce a nikoliv ve bláně odehrává, vidíme velmi zřetelně na roztrhnutých lístcích. U takových lístků, kde poraněním obsah buněčný vytekl, nenastává v buňce zabarvení žádné.

Zabarvování lístku od pokraje dovnitř jde velmi pozvolna. Při tom pěkně sledovati možno, jak proudem vody zrnéčka vytvořeného barviva ku jedné straně odplaveny byly, tak že jedna polovice buněčného obsahu daleko intensivněji zabarvena bývá než polovice druhá.

Mimo chlorofyl a ona zmíněná modročerná zrnéčka nenalézáme v buňce žádného jiného obsahu.

Po tomto vyšetření položili jsme si následovní otázky ku řešení:

1. Přichází tento chromogen mimo u *Mn. stellare* také ještě u jiných specií Mnia?

2. Jak dlouho zůstává týž v suchém materiálu nezměněn?

3. Jest přítomen nějaký ferment a

4. Vzniká chromogen tento teprve posmrtně anebo jest již v živé rostlině přítomen?

I. Učinili jsme pokusy s veškerými evropskými druhy *Mnia* a v žádném případě neobdrželi jsme onu typickou reakci na modré barvivo jako u *Mn. stellare.* Pouze u *Mn. Drummondii* a *Mn. Blyttii* zdá se, že jest zcela malé množství onoho chromogenu přítomno. Nález byl však nejistý.

II. 40 roků starý herbářový materiál Mn. stellare, který byl špinavě hnědě zabarven, zbarvil se po několika hodinách ve vodě *tmavě olivově* (nikoliv modře). Membrány byly již původně *fialově* zabarveny. Chloralhydrátem nastala však okamžitá reakce a vytvořily se nám známé dříve popsané krystaly. Starší materiál zkoumán nebyl. Nicméně lze souditi, že chromogen posmrtně dalších proměn nedoznává.

III. Důkaz, zdali je obsažen v mechu nějaký ferment, který z přítomné glykosidické látky jest s to barvivo odštěpiti, provedli jsme následovně:

Na vodou změkčený materiál dali jsme účinkovati horké vodní páry, páry alkoholu a chloroform. Horké páry vodní, jakož i páry alkoholu enzym zabíjejí a v materiálu takovém nemožno nikterak barviva dosíci. Chloroform však enzym neničí, právě tak jako teplo suché. Materiál v chloroformu vařený, rovněž tak jako materiál dlouhou dobu silně zahřívaný, barví se ve vodě záhy modře a v chloralhydrátu jakož i ammoniaku možno rychle způsobiti krystalisaci modrého barviva (obr. 3.).

IV. Nejdůležitější otázku, zdali chromogen teprve posmrtně se vytváří anebo již v živé rostlině přítomen jest, nemohli jsme doposud pro nedostatek živého materiálu rozřešiti. Proto také určité velmi zajímavé nálezy, které jsme již učinili, dosud neuveřejňujeme, vyčkávajíce výsledků s materiálem živým.

Nicméně již dnes možno říci, že vznik barviva zdá se úzce souviseti s procesem respiračním.

Ke konci vzdávám panu prof. Dr. Němcovi srdečný dík za jeho zájem na této práci a panu Dr. Bauerovi za propůjčený bohatý bryologický materiál.

Příspěvek k mikrochemii mléčné šťávy Asclepias syriaca Linné.

Napsal

Ph. Dr. Eduard Skarnitzl.

[Z farmakognostického ústavu české university v Praze (přednosta prof. Dr. K. J. Lhoták) a býv. hospodářsko-chemické stanice ve Vídni, odd. IX. (přednosta Doc. Ph. Mr. E. Senft.]

(Předloženo dne 19. listopadu 1920.)

Při podrobném výzkumu anatomické stavby Asclepias syriaca L. bylo na snadě všimnouti si blíže i mikrochemického složení mléčné šťávy této rostliny. Podrobnou makrochemickou elementární analysu mléčné šťávy druhu Asclepias syriaca L. provedl Marek¹) a nalezl v popeli jejím: K, Na, Ca, Mg, Fe, Al, Cl, H_2SO_4, H_3PO_4, SiO_2 a CO_2.²) Kromě toho obsahuje tato šťáva dle něho 1·46—1·5% čistého kaučuku.

Při mikrochemickém výzkumu šlo hlavně o to, jednak nalézti snadno připravitelné a lehce upotřebitelné činidlo, neb nějaké barvivo vůbec, jímž by bylo možno snadno dokázati celý obsah mléčných cév, jednak — a to jsme hlavně měli na zřeteli — najíti ať chemickou ať barevnou methodu, pomocí které by bylo možno provézti důkaz přítomnosti čistého kaučuku v řezech mléčnými cévami, tedy přímo důkaz jeho přítomnosti v rostlinné buňce. Dle různých rozborů obsahuje tato rostlina 1·5—2% čistého kaučuku a zdála se nám proto k těmto pokusům býti zcela vhodnou. Tato zkoumání narážejí však stále na veliké obtíže, neboť, jak známo, složení mléčných šťav rozmanitých rostlin silně kolísá a také mikrochemie samého kaučuku je dosud velmi nedokonalá (Tunmann).³) Jak vysvítá ze všech dosud různými autory prováděných pokusů, jakož i z negativního

---

¹) J. Marek: Über den Milchsaft von Asclepias Syriaca L. Journal für praktische Chemie Bd. 176, Neue Folge Bd. 68, pag. 385—416 a 449—463. — Leipzig 1903.

²) l. c. pag. 389.

³) O. Tunmann: Pflanzenmikrochemie. Berlín 1913, pag. 249.

výsledku této práce, bude asi vůbec sotva kdy možno pro tuto látku nalézti nějakého specifického činidla.

Názvem „kaučuk“ rozumíme obyčejně ztuhlou mléčnou šťávu rozmanitých tropických a subtropických rostlin; je to tedy vždy velmi složitá směs mnoha nejrůznějších substancí, mezi nimiž prvé místo zaujímá čistý kaučuk (Reinkautschuk $C_{10}H_{16}$ — Molisch, Kautschukgutta — Tschirch[4].) Ve větším nebo menším množství je tu dále přítomna kaučuková pryskyřice, rozmanité uhlohydráty, látky bílkovinné a četné jiné organické i anorganické sloučeniny.

Již z toho vychází na jevo, jak neobyčejně těžkým jest úkol nalézti vhodné, všem shora uvedeným požadavkům vyhovující činidlo, neboť toto vchází ve sloučenství brzo s tou, brzo zase s onou ve šťávě obsaženou látkou. Bez ohledu na tyto obtíže snažili jsme se danou otázku dle možnosti řešiti a zkoumali jsme za tím účelem čerstvou z rostliny v září a říjnu 1917 přímo získávanou šťávu majíce za to, že tímto způsobem nejspíše bude možno dojíti cíle. Dále byl zkoumán přímo obsah mléčných cév na příčných i podélných řezech stonků a kořene naší rostliny.

Poraníme-li nožíkem stonek Asclepias syriaca L., neb přeřízneme-li jej úplně, vystoupí z rány ihned veliké množství čistě bílé, dosti silně, příjemně typicky zapáchající, poněkud ostře chutnající mléčné šťávy, slabě kyselé reakce. Původně jest hutnoty as obyčejného mléka, na vzduchu však ponenáhlu houstne, až se za mírného žloutnutí sráží, při čemž se vylučuje kompaktnější, poněkud nahnědlá hmota. Při tom bylo možno pozorovati, že šťáva získaná v době květu rostliny zůstávala mnohem déle tekutou nežli ona, jež získána na podzim v době, kdy rostlina byla již plodnou. Je nesporno, že v době plodu obsah kaučuku v mléčné šťávě je mnohem větší a zdá se tomu nasvědčovati i ta okolnost, že v tu dobu mléčná šťáva skoro ihned na prstech ztuhne, při čemž se dají z ní mezi prsty rozpřádati jemná vlákenka. Při naříznutí nezralých měchýřků je nápadno, že vytékající z nich mléčná šťáva je sice téhož vzezření jako šťáva ze stonků neb listů získaná, při zasychání však neskytá pružného zbytku a mezi prsty rozetřena vyvolává zvláštní pocit drsnosti, který činí dojem, jakoby byla přítomna látka, jíž přináležejí pokožku stahující vlastnosti kyseliny tříslové. Skutečně také, jak mikrochemické pokusy dokázaly, jest v této šťávě kyselina tříslová v dosti hojném množství přítomna. Totéž však také pozorujeme na mléčné šťávě sbírané ze stonků na jaře až nejpozději do doby, kdy rostlina počíná vyháněti poupata. V tu dobu je naše šťáva nejbohatší látkami tříslovinnými a nejchudší kaučukem; čím dále k podzimku, tím více se tento poměr obrací. Z nezralých, středem proříznutých plodů vytéká kromě toho množství úplně bezbarvé, taktéž tříslovinami bohaté šťávy. Dle právě uvedeného neobsahovaly by tedy nezralé plody Asclepias syriaca L. buď vůbec žádné aneb jen nanejvýše nepatrné stopy kaučuku.

---

[4] A. Tschirch: Die Harze und Harzbehälter mit Einschluß der Milchsäfte. Leipzig 1906. Bd. I., pag. 989.

Čerstvá mléčná šťáva Asclepias syriaca L. jeví se pod mikroskopem jako bezbarvá tekutina, která obsahuje v nadmíru husté suspensi nesčíslné množství drobounkých, amorfních tělísek, jež se vyznačují, jsou-li pozorována hned po zhotovení praeparátu, velmi rychlým pohybem Brownovým. Jakýchkoli cizorodných tělísek (tělísek tukových, krystalků, škrobových zrn a pod.) nebylo lze v této šťávě pozorovati ani za použití nejsilnějších zvětšení. Již po krátké době 15ti až nejdéle 30ti minut nastává pod krycím sklíčkem pozvolná koagulace mléčné šťávy provázená zajímavým, poněkud agglutinaci bakterií připomínajícím pochodem. Rychlost molekulárního pohybu ochabuje, jednotlivá tělíska stávají se skoro nehybnými a seskupují se v nepravidelné, větší nebo menší shluky, jež se tímto způsobem stále zveličují, až konečně po době několika hodin jsou viditelny v již jen řídké emulsi pouze místy roztroušené beztvaré shluky popsaných tělísek. Při otevřené cloně jsou tyto shluky úplně bezbarvé, při zavřené jsou žlutě až žlutohnědě zbarveny. Posunujeme-li nyní krycím sklíčkem na podložním v jednom a hned potom v opačném směru, nahromaďují se tyto shluky k sobě, takže potom možno je viděti v úplně jasném poli zcela osamostatněné. Provádíme-li tento pohyb dále, tvoří se ze shluků těchto nitkovitá vřeténka, jež jsou velmi pružná a vytahují se po odstranění krycího sklíčka snadno v jemné, hnědě zbarvené nitky. Tento zjev u šťávy na jaře z celé rostliny sbírané pozorován *nebyl.*

V domnění, že právě v těchto vřeténkách jsou obsaženy hlavní látky pro reakce důležité, byly i s nimi prováděny barevné zkoušky. Aby bylo zamezeno, zvláště při pokusech provésti mikrochemický důkaz kaučuku, nestejnoměrnému rozložení jednotlivých látek mléčné šťávy v praeparátech — jakékoli rozeznávání jeho dle tvaru neb velikosti jeho tělísek od matečné emulse je naprosto vyloučeno — užíváno při našich pokusech následujícího způsobu, jenž se téměř ve všech případech osvědčil: Zkoumaná mléčná šťáva stejnoměrně rozetřena jemným štětcem ve velmi tenké vrstvě na podložní sklíčko a po uschnutí na vzduchu barvena. Ještě lépe se osvědčila methoda, při níž takto zhotovené nátěry právě tak jako při zhotovování praeparátů bakteriologických dvojnásobným protažením sklíčka mikroplamenem Bunsenova neb lihového kahanu byly fixovány. Hojnými pokusy pak bylo dokázáno, že častější protahování plamenem vyvolává již změnu mléčné šťávy a nutno tedy býti při této fixaci velmi opatrným. Takto zhotovené praeparáty obsahují nyní veškerou barvitelnou hmotu zcela stejnoměrně a nehybně na podložním sklíčku rozetřenu, takže možno nyní týmž způsobem jako při praeparátech bakteriologických barviti.

Vedeni částečně již známými zkušenostmi věnovali jsme při barvení pozornost hlavně barvivům dehtovým. Těmito ovšem barví se veškerý obsah mléčných cév mnohdy z počátku dosti intensivně, avšak zabarvení jimi docílené je povšechné, veškerá hmota barví se úplně stejnoměrně. K tomu účeli navrhl Chimani[5]) alkannin s kyselinou octovou, jehož příprava vyžaduje však již sama o sobě mnoho času a také praeparace řezů je velmi zdlouhavá. Pro trvalejší zbarvení řezů hodí se zcela dobře již obyčejný koncentrovaný vodný roztok červeně kongové, jež obsahem mléčných cév je velmi silně pohlcována. Z ostatních barviv pouze Sudan III a obyčejný S-fuchsin barví mléčnou šťávu, avšak zbarvení toto po krátké době a po vyprání řezů zase úplně zmizí. Zbývá ještě vzpomenouti chování se roztoku corallinsody, připraveného dle praktika Strasburgerova.[6]) Obsah mléčných cév se jí sice zjevně nebarví, dobře se však pomocí jeho stává viditelnou vlastní jejich blána. Po poměrně krátkém působení barviva, zvláště za tepla, počíná ponenáhlu bubřeti, až po 2—3 hodinách, zřídka dříve, se od ostatních buněk obyčejně úplně odděluje. Tentýž zjev nastává ale také, jak četné pokusy ukázaly, při použití čistého konc. roztoku sody.

Mléčné cévy bývají však obyčejně zvláštním zbarvením, resp. odlišným lomem světla svého obsahu samy o sobě od ostatního pletiva dobře diferencovány, takže i v nebarvených preparátech bývají na prvý pohled dobře znatelny. Jednalo se nám tedy hlavně o provedení mikrochemického důkazu kaučuku, který se v naší šťávě nalézá v dosti hojném množství, ale i zde bohužel nebylo možno dosíci uspokojivých výsledku. K těmto pokusům používáno pak hlavně shora popsaných nátěrů.

K důkazu kaučuku v mléčných cévách doporučuje Tunmann (l. c. pag 250) kaučuk dříve v buňce osamostatniti a pak teprve prováděti mikrochemické reakce. K naším pracem i této methody bylo použito. Řezy pocházející z čerstvého, neb vhodně fixovaného materiálu máčejí se as 3—4 dny ve vodě, načež se macerují 5—6 dní v 50% a dále pak stejnou dobu v alkoholu absolutním. Tím se rozpustí z největší části guma, sliz, pryskyřice, silice i tuky a mohou ještě další macerací v alkoholu s kyselinou vinnou býti vyloučeny po případě i přítomné alkaloidy. Nyní sestává dle Tunmanna tedy obsah mléčných cév většinou z látek bílkovinných (plasmatu) a čistého kaučuku. Pro identifikaci jeho uvádí Tunmann pouze rozpustnost v chloroformu, schopnost barvení Chimani-ho alkanninem s kyselinou octovou, karmínem a barvivy anilinovými, jakož i nerozpustnost ve zředěných kyselinách a louzích. Konečně musí pak býti také možno ho teplem odstraniti. Skutečně se nám také podařilo tímto způsobem získati nepatrný zbytek, který se barvil Chimanim popsanou methodou, dále červení kongovou a Sudanem III. Je zajímavo, že tento teplem mikroplamene se ztrácející zbytek zachovává i po této popsané maceraci jemnou zrnitost původního obsahu mléčných cév. Zkušenost naučila nás pak, že se k těmto zkouškám hodí nejlépe materiál pocházející z rostliny poněkud zavadlé a že možno ho užíti nejlépe teprve po nejméně 24hodinné maceraci v konservační tekutině. Chceme-li totiž rozřezati úplně čerstvou rostlinu pro konservování v tekutině k tomu určené, vytéká následkem velkého turgoru ze všech poraněných míst tak značné množství mléčné šťávy, že největší část obsahu mléčných cév přichází pro naše účely ve ztrátu. Pro konservační tekutinu osvědčil se nám býti nejlepším předpis: 60 cm^3 vody, 100 cm^3 absol. alkoholu, 40 cm^3 formaldehydu, 30 cm^3 glycerinu.

---

[5]) O. Chimani: Untersuchungen über Bau und Anordnung der Milchröhren mit besonderer Berücksichtigung der Guttapercha und Kautschuk liefernden Pflanzen. Bot. Zentralbl. Jahrg. XVI. Bd. LXI. Cassel 1895, pag. 391.

O. Chimani: Untersuchungen über Bau und Anordnung der Milchröhren mit besonderer Berücksichtigung der Guttapercha und Kautschuk liefernden Pflanzen. Archiv der Pharmazie. Bd. 233. Berlín 1895, pag. 253—259.

[6]) E. Strasburger u. M. Koernicke: Das botanische Praktikum. Jena 1913. V. Aufl. Register IV. pag. 766.

Také Molisch[7]) konal s mikrochemií mléčné šťávy a kaučuku četné pokusy, ale ani jemu se nepodařilo vynajíti specifické reagens, jímž by bylo možno identifikovati na př. tělíska kaučuková od pryskyřičných nebo tukových a hlavně dokázati jejich přítomnost v mléčné šťávě.

Po provedení mnoha zkoušek, jež jednak přímo, jednak po rozmanité předběžné maceraci řezů jevily negativní výsledky, obrátili jsme zřetel k několika methodám redukčním, ale bohužel ani těmito nedocíleno žádoucích výsledků. K těmto zkouškám bylo použito jednak čerstvé mléčné šťávy, jednak, a to nejvíce, preparátů nátěrových fixovaných i nefixovaných v domnění, zda by zde nebylo možno docíliti diferenciace na základě eventuální různé mohutnosti redukční. Použito bylo hlavně dusičnanu stříbrného, chloridu rtuťnatého, síranu měďnatého, jakož i několika jiných solí těchto tří kovů, dále kyseliny chloroplatičité, chlorozlatové, fosfomolybdénové a fosforwolframové. K pozorování rozmanitého stupně redukční schopnosti byly prováděny paralelní pokusy s různě koncentrovanými roztoky prodejného parakaučuku, damarové pryskyřice, glukosy a vaječného bílku. Redukce nastává tu vždy, ale není ani zde možno činiti nějakého rozdílu v její síle a rychlosti v jedné a téže zkoumané látce. Nejrychlejší a nejmohutnější redukce kaučukem nastává při použití fosfomolybdénové kyseliny, kde již za chladu vyvoláno jest ihned azurově modré zbarvení (u ostatních zkoumaných látek spíše zelenavě a špinavě modré), jež po sebemírnějším zahřátí ihned zmizí, ustupujíc žlutavému zabarvení vyloučeného kovově lesklého molybdénu. Při těchto pokusech je zřejmý rozdíl v síle reakce působené mléčnou šťávou nebo kaučukem a ostatními jednotlivými použitými redukujícími látkami (pryskyřice atd.), není však rozdílu v redukční schopnosti jednotlivých součástí mléčné šťávy. Podobný rozdíl v rychlosti reakce je patrný i u redukce 5%ního roztoku chloridu zlatového, kdež působením mléčné šťávy vzniká ihned mocný světle žlutý zákal, který nápadně rychle šediví, černá, až po zahřátí vyloučí se ihned temně kovově lesklé, práškovité zlato. U ostatních shora uvedených reagencií není patrný žádný rozdíl.

---

[7]) H. Molisch: Studien über den Milchsaft und Schleimsaft der Pflanzen. Jena 1901.

H. Molisch: Mikrochemie der Pflanze. Jena 1913.

Shrneme-li nyní veškeré výsledky této studie, nutno bezděky vzpomenouti výroku Molischova: ,,Prováděl jsem mnoho pokusů, abych vynalezl mikrochemické methody, pomocí kterých by bylo možno rozeznávati na př. kuličky kaučukové od kuliček pryskyřičných a pomocí kterých by je bylo možno jako takové v mléčné šťávě dokázati, podotýkám však předem, že mne docílené výsledky neuspokojily.“⁸) Jak z celého tohoto pojednání vysvítá, nebylo lze v tomto směru dospěti k žádoucím výsledkům, považujeme však přece za důležito těchto několik zkušeností zde podati.

Zbývá mi ještě učiniti zadost milé povinnosti a vzdáti uctivý dík svému chéfovi p. prof. Dr. K. J. Lhotákovi, jakož i p. Doc. Pharm. Mr. E. Senftovi za vřelý zájem a vzácné pokyny, jimiž práci tuto podporovali. Potřebný materiál pracovní byl mi dán se zvláštním svolením poslednějšího k volné disposici ze státních kultur korneuburgských a budiž mu na tomto místě vzdán zvláštní dík.

---

⁸) H. Molisch: Studien über den Milchsaft und Schleimsaft der Pflanzen. Jena 1901, pag. 53: ,,Ich habe viele Versuche angestellt, um mikrochemische Methoden ausfindig zu machen, welche es gestatten würden, zum B. Kautschukkügelchen von Kügelchen des Harzes zu unterscheiden und im Milchsafte mikrochemisch als solche nachzuweisen, allein ich bemerke gleich im voraus, daß mich meine Resultate nicht befriedigt haben.“

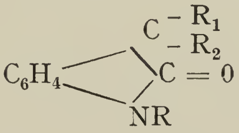
O některých sloučeninách indolinonových.

Napsal

Phil. Dr. a Pharm. Mr. Oldřich Tomíček.

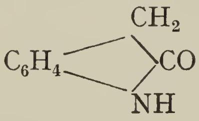
(Předloženo dne 11. února 1921.)

V této práci studována byla otázka, zda-li v tak zvaných indolinonech, t. j. sloučeninách struktůrného vzorce

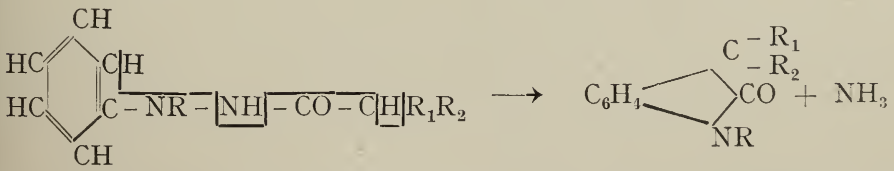


R_1 může tvořiti radikál *benzyl.*

Tyto sloučeniny odvozují se od *oxindolu,*



který je prvním nejjednodušším homologem řady indolinonů. Četné sloučeniny sem spadající staly se přístupnějšími synthesami, jež nalezeny a podrobně studovány byly K. Brunnerem[1]) a jeho spolupracovníky. Způsob přípravy jejich jest tento: β-acidylphenylhydrazidy studované K. Büllowem[2]) se zahřívají dle Brunnera (l. c.) s čtvernásobným množstvím čerstvě vyžíhaného kysličníku vápenatého v proudu vodíka na přiměřenou teplotu, jejíž výše závisí na podstatě reagujících látek. Průběh reakce lze formulovati takto:



---

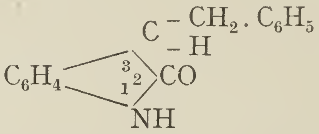
[1]) Monatshefte f. Ch. XVII. 270 a 479; XVIII. 95 a 527; XXVII. 1183; XXIV. 568; XXIX. 421 a XXXVIII. 525.

[2]) Ann. d. Ch. 236, str. 194.

takže možno jej sledovati do jisté míry kvantitativním určováním množství uvolněného ammoniaku.

Jako výchozí látky byly připraveny příslušné hydrazidy kyseliny hydroskořicové. Ježto některé z nich nebyly dosud popsány, jest o nich učiněna v této práci stručná zmínka. Hydroskořicová kyselina byla získána dle methody Erlenmayera a Alexejeva;³) prodejný phenylhydrazin vyčištěn destillací za sníženého tlaku, ostatní hydraziny byly od firmy Kahlbaumovy a čistota jejich konstatována stanovením bodu tání, po případě varu.

*Pr-3-benzyl-2-indolinon.*⁴)



Získán byl výše zmíněnou reakcí z hydrocinnamoylphenylhydrazidu⁵) po 1 a ³/₄ hod. zahřívání nejlépe na 170°; dle množství uvolněného ammoniaku soudě, s výtěžkem průměrně 75%, při čemž se odštěpilo malé množství anilinu, který z reakčního produktu byl odstraněn destillací vodní parou. Reakční produkt rozpuštěn v právě potřebném množství kyseliny chlorovodíkové a na povrchu vyloučený hrubý indolinon vyloužen etherem; tento oddestillován a zbylá hmota opětným překrystalováním z horké vody nebo velmi zředěného lihu a na konec z benzolu získána v čistém stavu, jako bílé, jehlicovité krystalky o bodu tání 132°. V horké vodě a etheru jest dosti obtížně rozpustná, v petroletheru prakticky nerozpustná, kdežto v ostatních obvyklých organických rozpustidlech se velmi snadno rozpouští. V pokročilém stavu čistoty má dosti značnou krystalisační schopnost.

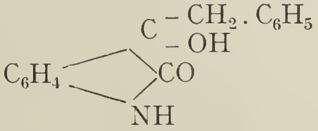
Kvantitativné určení prvků souhlasilo velmi dobře na vzorec $C_{15}H_{13}ON$ a kryoskopicky stanovená molekulárná váha svědčí o jednoduchosti molekuly. Z průběhu reakce, kvantitativného složení a molekulárné váhy, z chemických vlastností, jakož i z analogie s resultáty dříve Brunnerem a jeho spolupracovníky získanými, možno bezpečně za to míti, že tato látka jest látkou výše uvedeného složení.

Prof. Dr. K. Lhoták zkoušel laskavě fysiologický účinek tohoto indolinonu na žabách a zjistil, že jeví „účin ochrnující na žábu (R. esculenta) v dávkách decigrammových. Průběh otravy jest intermittující tak totiž, že po narkose dostaví se krátké zotavení, po němž živočich opět upadne v narkosu.“

---

³) Ann. d. Ch. 121, str. 375.
⁴) Označení čísly dle Emila Fischera: Ann. d. Ch. 236, str. 121.
⁵) H. Rupe a G. Metz: B. B. 36, str. 1101.

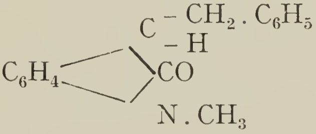
Vedle tohoto indolinonu, jako produktu hlavního, podařilo se z většího počtu praeparací isolovati látku o bodu tání 171⁰—174⁰ pravděnejpodobnějšího složení $C_{15}H_{13}O_2N$ a struktury:



která snad jest identická se sloučeninou jen zběžně M. Kohnem[6]) popsanou.

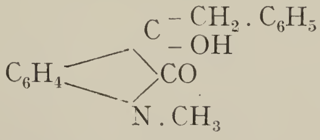
Od tohoto indolinonu studována byla sloučenina *acetylovaná,* která tvoří bezbarvé krystaly tající při 82⁰ — $C_{15}H_{12}ON . CO . CH_3$; dále produkt *bromovaný,* který tvoří slabě žluté jehlice o bodu tání 194⁰, a který se ukázal býti na benzolovém jádře dibromovanou sloučeninou o složení $C_{15}H_{11}ONBr_2$; a konečně pak produkt methylovaný, jako drobné, dobře vyvinuté krystaly o bodu tání 95⁰, který se jeví identický s indolinonem následujícím.

Pr-1n-methyl-3-benzyl-2-indolinon.



Byl připraven z hydrocinnamoylmethylphenylhydrazidu, který, dle Büllowa (l. c.) získán z asymetrického methylphenylhydrazinu a hydroskořicové kyseliny, skýtá dlouhé jehlicovité krystaly bílé, tající při 102⁰. Směs této látky s čtvernásobným množstvím dobře vyžíhaného kysličníku vápenatého byla zahřívána po 2 hod v olejové lázni přibližně na 220⁰. Titrace uvolněného ammoniaku ukazuje, že asi 69% výchozí látky vstoupilo v reakci. Obvyklým způsobem zpracovaný reakční produkt poskytl surový indolinon, jako silně zpryskyřičnatělou hutnou tekutinu, z níž opětným vyvářením horkou vodou a zředěným lihem podařilo se získati bílé jehličky tající při 95⁰—96⁰. Jest rozpustnější v organických rozpustidlech než indolinon předešlý, neredukuje však ammoniakálného roztoku dusičnanu stříbrného, jako tento a jako ostatní, dále popsané indolinony.

I zde byl pozorován vedlejší produkt, jevící se jako deskovité krystalky o bodu tání 163⁰, jejichž elementární složení, jednoduchá molekulární váha, jakož i analogie s produktem při přípravě předešlého indolinonu získaným snad ukazuje na sloučeninu:

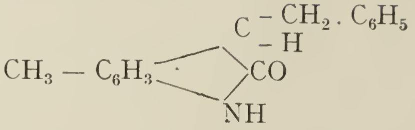


---

[6]) Monatshefte f. Ch. XXXI., 750.

B-1-methyl-Pr-3-benzyl-2-indolinon.

1.

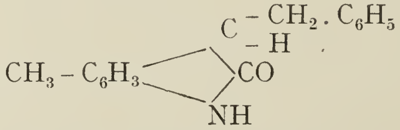


Výchozím materiálem pro tuto sloučeninu jest ortho-tolylhydrazid kyseliny hydroskořicové, který tvoří bílé, perleťově lesklé, lupénkovité krystaly tající při 122°. Tato látka, jako obvykle smísena s kysličníkem vápenatým a zahřívána po 1 hod. na teplotu 200°, odštěpí okrouhle 78% ammoniaku, při čemž uvolní se něco *orthotoluidinu.* Reakční směs zpracována způsobem výše uvedeným, a surový indolinon několikerým překrystalováním z konc. lihu a z benzolu získán v čistém stavu jako kanárkově žluté jehlice o bodu tání 196°. Ve vodě a v petroletheru se nerozpouští, poměrně málo rozpustný je v konc. alkoholu, benzolu a etheru; v ostatních obvyklých organických rozpustidlech rozpouští se snadno.

Při bromování skýtá substitucí na benzolovém jádře *monobromprodukt,* hrubé, temně žluté jehlice, které tají v čistém stavu při 191°.

B-3-methyl-Pr-3-benzyl-2-indolinon.

3.

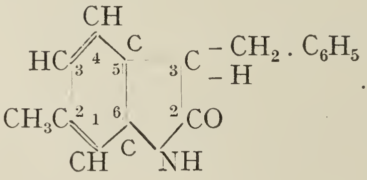


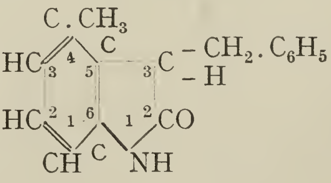
Para-tolylhydrazid hydroskořicové kyseliny ku získání tohoto indolinonu připravený skýtá průhledné, perleťově lesklé destičky, tající při 120°. Z nich ½hodinným zahříváním na 180°—200° při obvyklém uspořádání pokusu lze získati s výtěžkem asi 76%ním, za uvolnění zřetelných množství *paratoluidinu,* příslušný indolinon, který, překrystalován opětně ze zředěného lihu a z benzolu, jeví se jako jemné, skoro bílé jehličky o bodu tání 149·5°. Svou rozpustností upomíná na rozpustnostní poměry Pr-3-benzyl-2-indolinonu.

Bromováním získán rovněž na benzolovém jádře substituovany *monobromprodukt,* světle žluté krysťalky, které po překrystalování z konc. lihu tají při 198°.

B-2- nebo *4-methyl-Pr-3-benzyl-2-indolinon.*

Kdežto z ortho- a para-tolylhydrazidu kyseliny hydroskořicové vzniká jen po jednom indolinonu, dalo by se očekávati, že se tvoří z hydrocinnamoylmetatolylhydrazidu dva isomerní indolinony, dle toho, uzavře-li se řetěz s jedním nebo druhým sousedním atomem uhlíkovým v jádro.





Výše zmíněnou methodou přípravy byla však získána látka toliko jediná.

Meta-tolylhydrazid hydroskořicové kyseliny tvoří drobné, bílé jehličky o bodu tání 125°. Smísen s vápnem a zahříván hodinu na 214°—230° rozpadne se z 66% na ammoniak a indolinon za uvolnění malého množství *metatoluidinu.* Z reakční směsi podařilo se však vedle stop nerozloženého hydrazidu isolovati a opětným překrystalováním ze zředěného lihu v čistém stavu získati jen jednu látku, a to bílé, drobné jehličky tající při 209°. Elementární analysa, stanovení molekulární váhy, rozpustnost, jakož i ostatní chemické vlastnosti ukázaly, že látka jest indolinonem summárného složení $C_{16}H_{15}ON$; avšak kterým z obou očekávaných isomerů tento indolinon jest a zda snad přece, byť i jen v malém množství, se netvoří i druhý isomer, nebylo možno pro nedostatek výchozího materiálu bezpečně zjistiti a rozhodnouti.

Souhrn.

Phenyl- a tolylhydrazidy kyseliny hydroskořicové poskytují, byvše zahřívány s vápnem, za vývinu ammoniaku indolinony; může tedy v reakčním schematě na počátku uvedeném radikálem R_1 býti i radikál *benzyl.*

Při přípravě Pr-3-benzyl-2-indolinonu a Pr-1n-methyl-3-benzyl-2-indolinonu bylo pozorováno tvoření se vedlejších produktů o větším obsahu kyslíku.

Kondensace ortho-, para- a metatolylhydrazidu kyseliny hydroskořicové jest doprovázena vznikem malých množství ortho-, para- a metatoluidinu.

V přítomné práci byly tyto dosud v literatuře nepopsané látky připraveny a analysovány:

	B. t.
Pr-3-benzyl-2-indolinon	132° C
Acetylovaný produkt téhož	82° C
Bromovaný produkt téhož	194° C
Pr-1n-methyl-3-benzyl-2-indolinon	95° C
Hydrocinnamoylmethylphenylhydrazid	102° C
Hydrocinnamoylorthotolylhydrazid	122° C
B-1-methyl-Pr-3-benzyl-2-indolinon	196° C
Bromovaný produkt téhož	191° C
Hydrocinnamoylparatolylhydrazid	120° C
B-3-methyl-Pr-3-benzyl-2-indolinon	149·5° C
Bromovaný produkt téhož	198° C
Hydrocinnamoylmetatolylhydrazid	125° C
B-2- neb 4-methyl-Pr-3-benzyl-2-indolinon	209° C

Práce konána byla na popud pana prof. Dra K. Brunnera v jeho laboratoři na universitě innsbrucké. Náhlým ukončením války bylo nutno tuto práci přerušiti a dokončena pak byla v laboratoři chemicko-farmaceutického ústavu české university pražské, na anorganickém oddělení pana prof. Dra J. Štěrby-Böhma. Oběma těmto pánům, jakož i panu prof. Dru K. Lhotákovi, přednostovi farmakologického ústavu české university, který s nevšední ochotou vyzkoušel fysiologické účinky jedné z popsaných látek, vzdávám uctivé díky za zájem, který mé práci věnovali a při četných příležitostech svými vzácnými radami prokázali.

V Praze v lednu 1921.

Chemicko-farmaceutické laboratorium
české university, oddělení anorganické.

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 20.

Otočení a souměrnost prostoru čtyřrozměrného.

Napsal **Dr. Jan Vojtěch** v Brně.

(Předloženo dne 11. února 1921.)

1. Bod v prostoru čtyřrozměrném budiž určen souřadnicemi x_1, x_2, x_3, x_4 rovnoběžkové soustavy pravoúhlé. Lineární varieta trojrozměrná (kterou budeme prostě nazývati prostorem) má pak rovnici $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 = 0$. Transformační rovnice pro souměrnost podle takového prostoru, v níž k bodu P (x_h) je souměrně sdružen bod P' (x_h'), jsou

$$s^2 x_h' = (s^2 - 2\,a_h^2)\,x_h - 2\,\Sigma\,a_h\,a_k\,x_k - 2\,a_h\,a_5$$

pro $h = 1, 2, 3, 4$, kde k (v součtu) nabývá tří z hodnot 1, 2, 3, 4 vyjma h, a kde zavedeno označení $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = s^2$.

Dva prostory (trojrozměrné) jdoucí počátkem soustavy souřadnic $\overset{4}{\underset{1}{\Sigma}}\,a_k\,x_k = 0$, $\overset{4}{\underset{1}{\Sigma}}\,a_k'\,x_k = 0$ protínají se v rovině (jdoucí počátkem). Produkt dvou souměrností podle těchto prostorů je pohyb prostoru čtyřrozměrného. *rotace kolem roviny* jim společné; použijeme-li dvakrát rovnic hořejších, obdržíme pro první souřadnici bodu otočeného rovnici

$$\begin{aligned} s^2 s'^2 x_1' = {} & (s^2\,s'^2 - 2s^2\,a_1'^2 - 2a_1^2\,s'^2 + 4a_1^2\,a_1'^2 + 4a_2\,a_1\,a_1'\,a_2' + \\ & + 4\,a_3\,a_1\,a_1'\,a_3' + 4\,a_4\,a_1\,a_1'\,a_4')\,x_1 + (4\,a_1\,a_2\,a_1'^2 + 4\,a_2^2 a_1'\,a_2' + \\ & + 4\,a_3\,a_2\,a_1'\,a_3' + 4\,a_4\,a_2\,a_1'\,a_4' - 2s^2\,a_1'\,a_2' - 2a_1\,a_2\,s'^2)\,x_2 + \\ & + (4\,a_1\,a_3\,a_1'^2 + 4a_2\,a_3\,a_1'\,a_2' + 4a_3^2\,a_1'\,a_3' + 4a_4\,a_3\,a_1'\,a_4' - \\ & - 2s^2\,a_1'\,a_3' - 2a_1\,a_3\,s'^2)\,x_3 + (4a_1\,a_4\,a_1'^2 + 4a_2\,a_4\,a_1'\,a_2' + \\ & + 4a_3\,a_4\,a_1'\,a_3' + 4a_4^2\,a_1'\,a_4' - 2\,s^2\,a_1'\,a_4' - 2a_1\,a_4\,s'^2)\,x_4 \end{aligned}$$

a obdobně pro souřadnice ostatní.

Zvolíme-li krátké označení

$$\frac{a_1\,a_1' + a_2\,a_2' + a_3\,a_3' + a_4\,a_4'}{s\,s'} = T, \quad \frac{a_h\,a_k' - a_k\,a_h'}{s\,s'} = A_{hk},$$

kde $h, k = 1, 2, 3, 4$, ale $h \neq k$ (při čemž patrně $A_{hk} = -A_{kh}$), lze uvedenou rovnici transformační upraviti na tvar

$$x_1' = (T^2 - A_{12}^2 - A_{13}^2 - A_{14}^2 + A_{23}^2 + A_{34}^2 + A_{42}^2)\, x_1 + 2\,(A_{13} A_{32} + A_{14} A_{42} - TA_{12})\, x_2 + 2\,(A_{12} A_{23} + A_{14} A_{43} - TA_{13})\, x_3 + 2\,(A_{12} A_{24} + A_{13} A_{34} - T A_{14})\, x_4;$$

zákonitost v indexech je patrná.

Šest veličin A_{hk} může sloužiti k stanovení roviny jdoucí počátkem; z nich dvě jsou přespočetné, protože v prostoru čtyřrozměrném jest ∞^4 rovin jdoucích jedním bodem. Pišme

$$A_{12}^2 + A_{13}^2 + A_{14}^2 + A_{23}^2 + A_{34}^2 + A_{42}^2 = S^2.$$

Za souřadnice roviny, jež je průsekem prostorů $\Sigma\, a_k x_k = 0$ a $\Sigma\, a_k' x_k = 0$, zvolíme konstanty $a_{hk} = \frac{A_{hk}}{S}$ (kde $h, k = 1, 2, 3, 4$, ale $h \neq k$). Šest těchto souřadnic roviny jdoucí počátkem souvisí spolu dvěma vztahy:

$$a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{42}^2 = 1,\quad a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23} = 0.$$

Veličina S úzce souvisí s T a význam obou je jednoduchý: označíme-li úhel obou prostorů uvažovaných $\frac{\varphi}{2}$, jest

$$T = cos\, \frac{\varphi}{2};\ S^2 = 1 - T^2,\ \text{pročež}\ S = sin\, \frac{\varphi}{2}.$$

Transformační rovnice pro rotaci kolem roviny jdoucí počátkem upravme nyní, zavedouce tam souřadnice roviny a_{hk} a úhel rotace φ, o nichž platí

$$a_{hk} = \frac{A_{hk}}{sin\, \frac{\varphi}{2}} = \frac{a_h\, a_k' - a_k\, a_h'}{s\, s'\, sin\, \frac{\varphi}{2}},\quad a_{hk} = -\, a_{kh},\quad cos\, \frac{\varphi}{2} = T = \frac{\Sigma\, a_k\, a_k'}{s\, s'}.$$

Nalezneme, že bod $P'\,(x_k')$, jenž vznikne z bodu $P\,(x_k)$ otočením kolem roviny $\varrho\ (a_{hk})$ o úhel φ, má souřadnice

$$x_1' = [(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2)\ cos\, \varphi + (a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{42}^2)]\ x_1 + [(a_{13}\, a_{32} + a_{14}\, a_{42})\,(1 - cos\, \varphi) - a_{12}\ sin\, \varphi]\ x_2 + [(a_{12}\, a_{23} + a_{14}\, a_{43})\,(1 - cos\, \varphi) - a_{13}\, sin\, \varphi]\ x_3 + [(a_{12}\, a_{24} + a_{13}\, a_{34})\,(1 - cos\, \varphi) - a_{14}\, sin\, \varphi]\, x_4;$$

obdobně x_2', x_3' a x_4'.

2. Produkt dvou rotací kolem rovin jdoucích počátkem jest opět pohyb prostoru čtyřrozměrného, při němž je aspoň počátek invariantní. Dejme tomu, že první rotace děje se kolem roviny $\varrho\ (a_{hk})$ o úhel φ, druhá kolem roviny $\sigma\ (b_{hk})$ o úhel ψ. Výsledný pohyb prostoru čtyřrozměrného má rovnice tvaru

$$x_h' = c_{h1}\, x_1 + c_{h2}\, x_2 + c_{h3}\, x_3 + c_{h4}\, x_4\ \text{pro}\ h = 1, 2, 3, 4.$$

Koeficienty c_{hk} jsou ovšem složeny z koeficientů v rovnicích obou rotací-složek a tedy z veličin a_{hk}, b_{hk}, φ, ψ a jsou poněkud delší; stačí, všimneme-li si dvou z nich, na př. c_{11} a c_{12}. Nalezneme:

$$\begin{aligned}
c_{11} = {} & 1 - (a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2) - (b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{14}^2) + (a_{12}^2 + a_{13}^2 + {} \\
& + a_{14}^2) \cos \varphi + (b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{14}^2) \cos \psi + [(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2)(b_{12}^2 + b_{13}^2 + {} \\
& + b_{14}^2) + (a_{23} a_{31} + a_{24} a_{41})(b_{13} b_{32} + b_{14} b_{42}) + (a_{32} a_{21} + a_{34} a_{41})(b_{12} b_{23} + {} \\
& + b_{14} b_{43}) + (a_{42} a_{21} + a_{43} a_{31})(b_{12} b_{24} + b_{13} b_{34})] (1 - \cos \varphi)(1 - \cos \psi) - {} \\
& - [(a_{23} a_{31} + a_{24} a_{41}) b_{12} + (a_{32} a_{21} + a_{34} a_{41}) b_{13} + (a_{42} a_{21} + a_{43} a_{31}) b_{14}] \,. \\
& . (1 - \cos \varphi) \sin \psi - [a_{21} (b_{13} b_{32} + b_{14} b_{42}) + a_{31} (b_{12} b_{23} + b_{14} b_{43}) + a_{41} (b_{12} b_{24} + {} \\
& + b_{13} b_{34})] \sin \varphi (1 - \cos \psi) + (a_{21} b_{12} + a_{31} b_{13} + a_{41} b_{14}) \sin \varphi \sin \psi .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{12} = {} & (a_{13} a_{32} + a_{14} a_{42})(1 - \cos \varphi) + (b_{13} b_{32} + b_{14} b_{42})(1 - \cos \psi) - {} \\
& - [(a_{13} a_{32} + a_{14} a_{42})(b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{14}^2) + (a_{21}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2)(b_{13} b_{32} + b_{14} b_{42}) - {} \\
& - (a_{31} a_{12} + a_{34} a_{42})(b_{12} b_{23} + b_{14} b_{43}) - (a_{41} a_{12} + a_{43} a_{32})(b_{12} b_{24} + b_{13} b_{34})] \,. \\
& . (1 - \cos \varphi)(1 - \cos \psi) - a_{12} \sin \varphi - b_{12} \sin \psi + [(a_{21}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2) b_{12} - {} \\
& - (a_{31} a_{12} + a_{34} a_{42}) b_{13} - (a_{41} a_{12} + a_{43} a_{32}) b_{14}] (1 - \cos \varphi) \sin \psi + [a_{12} (b_{12}^2 + {} \\
& + b_{13}^2 + b_{14}^2) - a_{32} (b_{12} b_{23} + b_{14} b_{43}) - a_{42} (b_{12} b_{24} + b_{13} b_{34})] \sin \varphi (1 - \cos \psi) + {} \\
& + (a_{32} b_{13} + a_{42} b_{14}) \sin \varphi \sin \psi .
\end{aligned}$$

Koeficienty v rovnicích výsledného pohybu se velmi zjednoduší v případě, že roviny složek ϱ a σ jsou k sobě absolutně kolmé: roviny takové mají společný jeden bod (zde počátek soustavy) a resultující pohyb je *rotace* prostoru čtyřrozměrného *kolem bodu* (počátku).

Dvě roviny v prostoru čtyřrozměrném slují absolutně k sobě kolmými, jestliže každý prostor položený jednou rovinou je kolmý ke každému prostoru jdoucímu rovinou druhou. Majíce na zřeteli, že rovina ϱ (a_{hk}) je průsekem prostorů $\Sigma a_k x_k = 0$ a $\Sigma a_k' x_k = 0$, rovina σ (b_{hk}) pak průsekem prostorů $\Sigma b_k x_k = 0$ a $\Sigma b_k' x_k = 0$, můžeme podmínky absolutní kolmosti rovin ϱ a σ psáti čtyřmi rovnicemi

$$\Sigma a_k b_k = 0, \quad \Sigma a_k b_k' = 0, \quad \Sigma a_k' b_k = 0, \quad \Sigma a_k' b_k' = 0.$$

Vyloučíme-li třebas koeficient a_2 z rovnice 1. a 2., potom a_2' z 3. a 4., obdržíme dvě rovnice

$$a_1 b_{12} + a_3 b_{32} + a_4 b_{42} = 0, \quad a_1' b_{12} + a_3' b_{32} + a_4' b_{42} = 0;$$

eliminujeme-li odtud třebas b_{42}, dostaneme rovnici

$$a_{14} b_{12} + a_{34} b_{32} = 0 \text{ čili } a_{14} b_{12} - a_{34} b_{23} = 0 \text{ čili } b_{12} : a_{34} = b_{23} : a_{14}.$$

Způsobem zcela obdobným dostaneme řadu takových rovnic nebo úm ¿ z nichž vyplývá

$$b_{12} = \lambda a_{34}, \; b_{13} = \lambda a_{42}, \; b_{14} = \lambda a_{23}, \; b_{23} = \lambda a_{14}, \; b_{34} = \lambda a_{12}, \; b_{42} = \lambda a_{13}.$$

Jestliže rovnice tyto umocníme dvěma a sečteme, nalezneme, protože součet čtverců veličin a_{hk} a rovněž veličin b_{hk} rovná se 1, $\lambda^2 = 1$ a tedy $\lambda = \pm 1$; zvolíme-li $\lambda = +1$, máme pro souřadnice roviny σ (b_{hk}) absolutně kolmé k rovině ϱ (a_{hk}) relace

$$b_{12} = a_{34}, \; b_{13} = a_{42}, \; b_{14} = a_{23}, \; b_{23} = a_{14}, \; b_{34} = a_{12}, \; b_{42} = a_{13}.$$

Vyšetřme nyní, jak se redukují výrazy pro c_{hk} (spec. c_{11}, c_{12}) pro pohyb složený ze dvou rotací kolem rovin absolutně kolmých. Ve výrazu pro c_1 první tři členy dávají 0; koeficient při $(1 - \cos\varphi)$ $(1 - \cos\psi)$, obsahující po provedení naznačených výkonů 21 členů, lze upraviti na součet ze čtverce $(a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23})^2$ a ze šesti dvojic tvaru $a_{12}{}^2\, a_{42}{}^2 - a_{12}{}^2\, a_{42}{}^2$, jest tedy celý roven 0; koeficient při $(1 - \cos\varphi) \sin\psi$ upravíme na součet tří součinů tvaru $a_{21}\,(a_{32}\, b_{13} + a_{42}\, b_{14}) = a_{21}\,(a_{32}\, a_{42} + a_{42}\, a_{23})$, jež jsou jednotlivě rovny 0; obdobně vymizí člen obsahující $\sin\varphi\,(1 - \cos\psi)$; konečně poslední člen má koeficient $-(a_{12}\, b_{12} + a_{13}\, b_{13} + a_{14}\, b_{14}) = -(a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23}) = 0$. Zbude tedy

$$\begin{aligned} c_{11} &= (a_{12}{}^2 + a_{13}{}^2 + a_{14}{}^2) \cos\varphi + (b_{12}{}^2 + b_{13}{}^2 + b_{14}{}^2) \cos\psi \\ &= (a_{12}{}^2 + a_{13}{}^2 + a_{14}{}^2) \cos\varphi + (a_{23}{}^2 + a_{34}{}^2 + a_{42}{}^2) \cos\psi. \end{aligned}$$

Ve výrazu pro c_{12} sloučí se první dva členy v jeden $(a_{13}\, a_{32} + a_{14}\, a_{42})\,.\,(\cos\psi - \cos\varphi)$; koeficient při $(1 - \cos\varphi)$ $(1 - \cos\psi)$ obsahuje po vynásobení 20 členů, jež se všechny navzájem zruší; koeficient při $(1 - \cos\varphi)\,.\,\sin\psi$ lze uvésti na tvar $a_{12}\,(a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23}) + a_{34}\,(a_{23}{}^2 + a_{24}{}^2 - a_{24}{}^2 - a_{23}{}^2)$, jest tedy roven 0; obdobně vymizí člen obsahující $\sin\varphi\,.\,(1 - \cos\psi)$; konečně koeficient při $\sin\varphi \sin\psi$ jest $a_{32}\, a_{42} + a_{42}\, a_{23} = 0$. Zbývá tedy

$$c_{12} = (a_{13}\, a_{32} + a_{14}\, a_{42})\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{12} \sin\varphi - a_{34} \sin\psi,$$

kde a_{34} v posledním členu položeno místo b_{12}.

Rotace prostoru čtyřrozměrného kolem bodu (počátku), produkt dvou rotací kolem rovin absolutně kolmých, kolem roviny $\varrho\,(a_{hk})$ o úhel φ a kolem roviny $\sigma\,(b_{hk} = a_{ij})$ o úhel ψ, jež převádí bod $P\,(x_k)$ v bod $P'\,(x_k')$, má tedy tyto rovnice:

$$\begin{aligned} x_1' = {} & [(a_{12}{}^2 + a_{13}{}^2 + a_{14}{}^2) \cos\varphi + (a_{23}{}^2 + a_{34}{}^2 + a_{42}{}^2) \cos\psi]\, x_1 + \\ & + [(a_{13}\, a_{32} + a_{14}\, a_{42})\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{12} \sin\varphi - a_{34} \sin\psi]\, x_2 + [(a_{12}\, a_{23} + \\ & + a_{14}\, a_{43})\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{13} \sin\varphi - a_{42} \sin\psi]\, x_3 + [(a_{12}\, a_{24} + a_{13}\, a_{34})\,. \\ & (\cos\psi - \cos\varphi) - a_{14} \sin\varphi - a_{23} \sin\psi]\, x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2' = {} & [(a_{23}\, a_{31} + a_{24}\, a_{41})\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{21} \sin\varphi - a_{43} \sin\psi]\, x_1 + \\ & + [(a_{21}{}^2 + a_{23}{}^2 + a_{24}{}^2) \cos\varphi + (a_{13}{}^2 + a_{34}{}^2 + a_{41}{}^2) \cos\psi]\, x_2 + [(a_{21}\, a_{13} + \\ & + a_{24}\, a_{43})\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{23} \sin\varphi - a_{14} \sin\psi]\, x_3 + [(a_{21}\, a_{14} + a_{23}\, a_{34})\,. \\ & .\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{24} \sin\varphi - a_{31} \sin\psi]\, x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3' = {} & [(a_{32}\, a_{21} + a_{34}\, a_{41})\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{31} \sin\varphi - a_{24} \sin\psi]\, x_1 + \\ & + [(a_{31}\, a_{12} + a_{34}\, a_{42})\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{32} \sin\varphi - a_{41} \sin\psi]\, x_2 + [(a_{31}{}^2 + \\ & + a_{32}{}^2 + a_{34}{}^2) \cos\varphi + (a_{12}{}^2 + a_{24}{}^2 + a_{41}{}^2) \cos\psi]\, x_3 + [(a_{31}\, a_{14} + a_{32}\, a_{24})\,. \\ & .\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{34} \sin\varphi - a_{12} \sin\psi]\, x_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4' = {} & [(a_{42}\, a_{21} + a_{43}\, a_{31})\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{41} \sin\varphi - a_{32} \sin\psi]\, x_1 + \\ & + [(a_{41}\, a_{12} + a_{43}\, a_{32})\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{42} \sin\varphi - a_{13} \sin\psi]\, x_2 + [(a_{41}\, a_{13} + \\ & + a_{42}\, a_{23})\,(\cos\psi - \cos\varphi) - a_{43} \sin\varphi - a_{21} \sin\psi]\, x_3 + [(a_{41}{}^2 + a_{42}{}^2 + a_{43}{}^2)\,. \\ & .\,\cos\varphi + (a_{12}{}^2 + a_{23}{}^2 + a_{31}{}^2) \cos\psi]\, x_4. \end{aligned}$$

3. Obecný pohyb prostoru čtyřrozměrného s invariantním bodem (počátkem) jest vyjádřen, jak uvedeno, rovnicemi, jež obsahují 16 konstant c_{hk}; protože však při uvažované transformaci platí $\Sigma x_k'^2 = \Sigma x_k^2$, existuje mezi konstantami c_{hk} řada relací, a to 4 rovnice

$$c_{1k}^2 + c_{2k}^2 + c_{3k}^2 + c_{4k}^2 = 1 \quad (\text{pro } k = 1, 2, 3, 4) \text{ a 6 rovnic}$$
$$c_{1h}\, c_{1k} + c_{2h}\, c_{2k} + c_{3h}\, c_{3k} + c_{4h}\, c_{4k} = 0 \quad (\text{pro } h, k = 1, 2, 3, 4,\ h \neq k),$$

všech 10 nezávislých. Jest tedy obecný pohyb prostoru čtyřrozměrného s invariantním bodem určen *šesti* (nezávislými) konstantami, a všechny tyto pohyby tvoří (kontinuitní) grupu transformací s ∞^6 členy.

Takovým obecným pohybem prostoru o čtyřech rozměrech jest rotace kolem bodu, jejíž rovnice v předešlém odstavci byly odvozeny a vypsány. Jako (nezávislé) konstanty rotace kolem bodu jsou tam čtyři ze šesti souřadnic a_{hk} roviny ϱ (nebo čtyři souřadnice roviny σ absolutně kolmé k ϱ) a dva úhly rotační φ, ψ (úhly rotace kolem roviny ϱ resp. σ).

Proti tomu speciální jest rotace prostoru čtyřrozměrného kolem roviny, určená *pěti* konstantami (čtyři a_{hk} a úhel rotace φ); její rovnice obsaženy jsou v hořejších rovnicích rotace kolem bodu pro $\psi = 0$, jak hned zjistíme.

Je-li rotace kolem bodu (nebo spec. rotace kolem roviny) dána čtyřmi rovnicemi pro x_k' s 16 konstantami c_{hk}, můžeme ovšem určiti souřadnice a_{hk} roviny ϱ (a souřadnice b_{hk} roviny σ absolutně kolmé k ϱ), jakož i úhly rotační φ a ψ.

Sečteme-li předně všechny koeficienty c_{hh} pro $h = 1, 2, 3, 4$, dostaneme, protože součet šesti a_{hk}^2 jest roven 1, pro neznámé dva úhly φ a ψ rovnici

$$\cos\varphi + \cos\psi = \frac{1}{2}\,(c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44}).$$

Tato rovnice stačí v případě rotace kolem roviny ke stanovení jejího úhlu

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\,(c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44}) - 1.$$

Abychom nalezli druhou rovnici pro φ a ψ, určíme napřed

$$a_{hk} = \frac{(c_{hk} - c_{kh})\sin\varphi - (c_{ij} - c_{ji})\sin\psi}{2\,(\sin^2\psi - \sin^2\varphi)},$$

kde ke dvojicím indexů 12, 13, 14 pro hk příslušejí dvojice 34, 42, 23 pro ij. Z výrazů pro a_{hk} utvoříme pak součet součinů $a_{12}\, a_{34} + a_{13}\, a_{42} + a_{14}\, a_{23}$, rovný — jak z dřívějšího známo — nule.

Odtud obdržíme

$$\frac{\sin^2\varphi + \sin^2\psi}{\sin\varphi\sin\psi} =$$
$$= \frac{(c_{12} - c_{21})^2 + (c_{13} - c_{31})^2 + (c_{14} - c_{41})^2 + (c_{23} - c_{32})^2 + (c_{34} - c_{43})^2 + (c_{42} - c_{24})^2}{(c_{12} - c_{21})\,(c_{34} - c_{43}) + (c_{13} - c_{31})\,(c_{24} - c_{42}) + (c_{14} - c_{41})\,(c_{23} - c_{32})}.$$

Tuto rovnici můžeme upraviti, chceme-li, na tvar

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q^2}}{2\,q},$$

kde p je čitatel a q jmenovatel předcházejícího zlomku, nebo na tvar

$$\left(\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi}\right)^2 = \frac{p + 2\,q}{p - 2\,q}$$

a tím na tvar

$$\left(\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi}\right)^2 =$$

$$= \frac{(c_{12} + c_{34} - c_{21} - c_{43})^2 + (c_{13} + c_{42} - c_{31} - c_{24})^2 + (c_{14} + c_{23} - c_{41} - c_{32})^2}{(c_{12} - c_{34} - c_{21} + c_{43})^2 + (c_{13} - c_{42} - c_{31} + c_{24})^2 + (c_{14} - c_{23} - c_{41} + c_{32})^2}.$$

Z obou rovnic nalezených pro φ a ψ můžeme určiti tyto dva úhly; jich lze použíti potom v uvedených vzorcích k stanovení souřadnic a_{hk} jedné i druhé z obou rovin k sobě absolutně kolmých.

4. V prostoru čtyřrozměrném existuje přirozeně *čtvero souměrností*: souměrnost podle prostoru, podle roviny, podle přímky a podle bodu.

Souměrnost podle prostoru jdoucího počátkem $\sum\limits_1^4 a_k\, x_k = 0$ má rovnice, uvedené v odst. 1., totiž

$$s^2\, x_h{}' = (s^2 - 2a_h^2)\, x_h - 2\, \Sigma\, a_h\, a_k\, x_k$$

pro $h = 1, 2, 3, 4$; k (v součtu) nabývá tří z hodnot $1, 2, 3, 4$ vyjma h.

Souměrnost podle roviny $\sum\limits_1^4 a_k\, x_k = 0$, $\sum\limits_1^4 a_k{}'\, x_k = 0$ je zvláštním případem rotace kolem roviny pro $\varphi = \pi$; její rovnice obdržíme z rovnic odst. 1. ve tvaru

$$x_h{}' = (1 - 2\, \Sigma\, a_{hk}^2)\, x_h - 2\, \Sigma\, (a_{hi}\, a_{ki} + a_{hj}\, a_{kj})\, x_k$$

pro $h = 1, 2, 3, 4$; k (v součtech) nabývá tří z hodnot $1, 2, 3, 4$ vyjma h; i, j jsou zbývající dvě z těchže čtyř čísel mimo h, k.

Produkt dvou souměrností podle rovin absolutně kolmých jest souměrnost podle bodu oběma rovinám společného. O tom se přesvědčíme, dosadíce do rovnic odst. 2. pro produkt dvou rotací kolem rovin absolutně kolmých (pro rotaci kolem bodu) $\varphi = \pi$, $\psi = \pi$. Obdržíme rovnice

$$x_h{}' = -\, x_h$$

pro $h = 1, 2, 3, 4$, jež patrně vyjadřují souměrnost podle bodu (počátku).

Rovnice souměrnosti podle přímky můžeme odvoditi přímo (obdobně jako rovnice souměrnosti podle prostoru v odst. 1.). Učiníme-li tak, zjistíme správnost věty:

Produkt souměrnosti podle prostoru a souměrnosti podle bodu v něm ležícího jest souměrnost podle přímky kolmé k prostoru prvé souměrnosti v bodě druhé souměrnosti. Rovnice souměrnosti podle přímky jdoucí počátkem ve směru $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ jsou totiž

$$s^2 x_h' = (2a_h^2 - s^2) x_h + 2 \Sigma a_h a_k x_k$$

pro $h = 1, 2, 3, 4$; k (v součtu) nabývá tří z hodnot 1, 2, 3, 4 mimo h.

Tvoří tedy souměrnosti prostoru čtyřrozměrného dvě trojčlenné grupy transformací: jednu tvoří souměrnosti podle prostoru, podle přímky k němu kolmé a podle bodu oběma společného, druhou pak dvě souměrnosti podle rovin k sobě absolutně kolmých a souměrnost podle bodu jim společného.

Souměrnosti podle roviny a podle bodu nemění smyslu útvarů geometrických (determinant z koeficientů $= + 1$), kdežto souměrnosti podle prostoru (trojrozměrného) a podle přímky mění smysl útvarů (determinant z koeficientů $= - 1$).

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 21.

O jistém komplexu 4. řádu G_{ab}.

Napsal

Dr. **Josef Klobouček.**

(Předloženo dne 15. dubna 1921.)

Sborcený přímkový element (p), nehledíc k jeho poloze v prostoru jest dán, jakmile vytkneme projektivní vztah (π) mezi svazkem tečných rovin a řadou příslušných bodů dotyčných na přímce p; tím jest vlastně vytčena lineární kongruence parabolická přímek, jejíž dvě reálné osy nekonečně blízké p, p^* omezují onen sborcený element.

Vytkneme-li přímku p pevnou, lze na ní voliti ještě ∞^3 různých vztahů (π) mezi body a tečnými rovinami, takže tato pevná přímka p může s pohyblivou soumeznou přímkou p^* určiti ∞^3 elementů sborcených. Element (p) můžeme určiti tím, že vytkneme polohu centrálního bodu C, polohu centrální roviny σ a parametr torse $\varkappa$ rovnicí

$$lim \frac{\Delta h}{\Delta \alpha} = \varrho \,.\, tg\, \varphi = \varkappa, \qquad \text{pro } lim\, \Delta h = lim\, \Delta \alpha = 0,$$

kde Δh jest nejkratší vzdálenost obou soumezných mimoběžek p, p^*, $\Delta \alpha$ jejich ostrý úhel, ϱ značí vzdálenost dotyčného bodu libovolné tečné roviny od bodu centrálního a φ úhel její s rovinou asymptotickou.

Volíme-li polohu centrálního bodu a centrální roviny, může parametr torse nabýti ∞^1 hodnot; šinutím a otočením takto vzniklých ∞^1 elementů kolem přímky p obdržíme všecky ∞^3 elementy, které přísluší přímce p. Celkem jest ∞^7 sborcených elementů v prostoru.

Volme dvě pevné mimoběžné přímky a, b a třetí pohyblivou přímku p. Tyto tři přímky stanoví, je-li p s a, b mimoběžná, jistou sborcenou neredukovanou plochu druhého stupně H, která určí přímkou p^*, soumeznou k p, sborcený element (p), daný konstruktivně zcela určitou polohou centrálního bodu i centrální resp. asymptotické roviny a zcela určitou hodnotou parametru torse $\varkappa$.

Hledejme geometrické místo všech přímek p, které pomocí přímek a, b, právě naznačeným způsobem určují shodné sborcené elementy, to jest elementy o stejné hodnotě parametru $\varkappa^*$.

Jest přímo patrné, že přímky p určují jistý komplex G_{ab}; neboť vytkneme-li v prostoru pevný bod M, prochází jím ∞^2 ploch H, které obsahují všecky příčku m přímek a, b, jdoucí zvoleným bodem M. Avšak na každé ploše H nacházejí se obecně 4 shodné sborcené elementy (p); příslušné přímky p vytvoří tedy jistou kongruenci přímek protínajících vesměs přímku m a bodem M bude tedy procházeti ∞^1 přímek p, které vytvoří komplexový kužel bodu M.

Označme homogenní pravoúhlé souřadnice pevných přímek a_i, b_i, souřadnice pohyblivé přímky c_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$; libovolná další přímka q, téže soustavy jako přímky a, b, c na sborcené ploše 2. stupně H, která jest těmito třemi přímkami určena, bude míti souřadnice, označíme-li $*$ faktor úměrnosti

$$* \, q_i = \lambda \, a_i + \mu \, b_i + c_i,$$

předpokládajíce, že parametry λ, μ hoví podmínce

$$\lambda \, \mu \, . \, \omega \, (a \, b) + \lambda \, . \, \omega \, (a \, c) + \mu \, . \, \omega \, (b \, c) = 0,$$

kde

$$\omega \, (a \, b) \equiv \sum_{i=1}^{6} a_i \, b_{i+3}, \quad \omega \, (a \, c) \equiv \sum_{i=1}^{6} a_i \, c_{i+3}, \quad \omega \, (b \, c) \equiv \sum_{i=1}^{6} b_i \, c_{i+3}, \quad (i \; mod. \; 6).$$

Jelikož předpokládáme, že přímky a, b, c jsou spolu mimoběžné, nevymizí žádný z těchto výrazů; značme výrazy ty krátce

$$\omega \, (a \, b) = C, \qquad \omega \, (a \, c) = B, \qquad \omega \, (b \, c) = A.$$

Vyloučíme-li parametr μ, můžeme položiti q do tvaru

$$* \, q_i = \lambda^2 C \, a_i + \lambda \, (A \, a_i - B \, b_i + C \, c_i) + A \, c_i.$$

Tím jsou souřadnice povrchových přímek soustavy $(a \, b \, c)$ vyjádřeny jednoznačným parametrem λ.

Avšak parametr torse libovolné přímky sborcené plochy, jejíž povrchové přímky jsou dány analytickými funkcemi $p_i \, (\lambda)$ parametru λ, za předpokladu

$$\sum_{i=1}^{3} p_i \, p^{i}{}_{+3} = 0,$$

dán jest výrazem

$$\varkappa^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{3} p_i' \, p'_{i+3}}{\sum\limits_{1}^{3} p_i'^2},$$

při čemž současně

$$\sum_{i=1}^{3} p_i^2 = 1 \quad \text{a} \quad p_i' = \frac{\partial p_i}{\partial \lambda}.$$

V našem případě budou souřadnice q_i, vyhovíme-li druhé podmínce, aby $\sum^{3} q^{2} = 1$, míti tvar

$$q_i = \frac{\lambda^2 C a_i + \lambda (A a_i - B b_i + C c_i) + A c_i}{\sqrt{\sigma}},$$

kde

$$\sigma = \sum_{j=1} [\lambda^2 C a_j + \lambda (A a_j - B b_j + C c_j) + A c_j]^2$$

Potom jest

$$q_i' = \sigma^{-\frac{1}{2}} (2 \lambda C a_i + A a_i - B b + C c_i) -$$
$$- \frac{1}{2} [\lambda^2 C a_i + \lambda (A a_i - B b_i + C c_i) + A c_i] \, \sigma^{-\frac{3}{2}} . \sigma'.$$

Chceme-li stanoviti nyní parametr torse přímky c, třeba ve výrazech těchto položiti $\lambda = 0$, tedy

$$\sigma_0 = A^2 \sum_1^3 c_j^2, \quad \sigma_0' = 2 A \left(A \sum_1^3 a_j c_j - B \sum_1^3 b_j c_j + C \sum_1^3 c_j^2\right)$$

a tedy pro souřadnice p_i přímky c máme dále

$$p_j = \frac{c_i}{\left(\sum_1^3 c_j^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{a} \quad p_i' = \sigma_0^{-\frac{1}{2}} (A a_i - B b_i + C c_i) - \frac{1}{2} A c_i \sigma_0^{-\frac{3}{2}} \sigma_0',$$

čili

$$p_i' = \frac{1}{A \left(\sum_1^3 c_j^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left[(A a_i - B b_i + C c_i) \sum_1^3 c_j^2 - \right.$$
$$\left. - c_i \left(A \sum_1^3 a_j c_j - B \sum_1^3 b_j c_j + C \sum_1^3 c_j^2\right)\right],$$

neboli

$$p_i' = \frac{1}{A . \left(\sum_1 c_j^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left[A \left(a_i \sum_1^3 c_j^2 - c_i \sum_1^3 a_j c_j\right) - B \left(b_i \sum_1^3 c_j^2 - c_i \sum_1^3 b_j c_j\right)\right].$$

Utvořme nyní výraz

$$\sum_1^3 p_i'^2 = \frac{1}{A^2 \cdot \left(\sum\limits_1^3 c_i^2\right)^2} \Big\{ A^2 \Big[\sum_1^3 a_i^2 \cdot \sum_1^3 c_i^2 - \Big(\sum_1^3 a_i c_i\Big)^2 \Big] +$$

$$+ B^2 \Big[\sum_1^3 b_i^2 \cdot \sum_1^3 c_i^2 - \Big(\sum_1^3 b_i c_i\Big)^2 \Big] - 2 A B \Big[\sum_1^3 c_i^2 \cdot \sum_1^3 a_i b_i -$$

$$- \sum_1^3 a_i c_i \cdot \sum_1^3 b_i c_i \Big] \Big\}$$

a výraz

$$\sum_1^3 p_i' \, p_{i+3}' = \frac{1}{A^2 \cdot \left(\sum\limits_1^3 c_i^2\right)^3} \Big\{ A^2 \Big[\Big(\sum_1^3 c_i^2\Big)^2 \cdot \sum_1^3 a_i a_{i+3} + \Big(\sum_1^3 a_i c_i\Big)^2 \cdot$$

$$\cdot \sum_1^3 c_i c_{i+3} - \sum_1^3 c_i^2 \cdot \sum_1^3 a_i c_i \cdot B \Big] + B^2 \Big[\Big(\sum_1^3 c_i^2\Big)^2 \cdot \sum_1^3 b_i b_{i+3} + \Big(\sum_1^3 b_i c_i\Big)^2$$

$$\cdot \sum_1^3 c_i c_{i+3} - \sum_1^3 c_i^2 \cdot \sum_1^3 b_i c_i A \Big] - A B \Big[\Big(\sum_1^3 c_i^2\Big)^2 \cdot C + 2 \sum_1^3 a_i c_i \cdot \sum_1^3 b \; c_i \cdot$$

$$\cdot \sum_1^3 c_i c_{i+3} - \sum_1^3 c_i^2 \cdot \sum_1^3 a_i c_i \cdot A - \sum_1^3 c_i^2 \cdot \sum_1^3 b_i c_i \cdot B \Big] \Big\},$$

poněvadž ale

$$\sum_1^3 a_i a_{i+3} = \sum_1^3 b_i b_{i+3} = \sum_1^3 c_i c_{i+3} = 0,$$

jest

$$\sum_1^3 p_i' \, p_{i+3}' = - \frac{B C}{A \sum\limits_1^3 c^2} .$$

Pak bude parametr torse přímky *c* dán výrazem

$$\varkappa^* = - \frac{A \cdot B \cdot C \cdot \sum\limits_1^3 c_i^2}{A^2 \Big[\sum\limits_1^3 a_i^2 \cdot \sum\limits_1^3 c_i^2 - \Big(\sum\limits_1^3 a_i c_i\Big)^2 \Big] + B^2 \Big[\sum\limits_1^3 b_i^2 \cdot \sum\limits_1^3 c_i^2 - \Big(\sum\limits_1^3 b_i c_i\Big)^2 \Big] - 2 A B \Big[\sum\limits_1^3 c_i^2 \cdot \sum\limits_1^3 a_i b_i - \sum\limits_1^3 a_i c_i \sum\limits_1^3 b_i c_i \Big]} .$$

Píšeme-li nyní místo $c_i \dots p_i$, jsou $A = \omega\,(b\,p)$, $B = \omega\,(a\,p)$ výrazy lineární vzhledem k p_i, C jest konstanta, stanovící velikost momentu přímek a, b.

Bude tedy

$$\varkappa^* = -\frac{A\,.\,B\,.\,C\,.\sum\limits_1^3 p_i^2}{A^2\Big[\sum\limits_1^3 a_i^2 \sum\limits_1^3 p_i^2 - \Big(\sum\limits_1^3 a_i\,p_i\Big)^2\Big] + B^2\Big[\sum\limits_1^3 b_i^2 \sum\limits_1^3 p_i^2 - \Big(\sum\limits_1^3 b_i\,p_i\Big)^2\Big] - 2\,A\,B\Big[\sum\limits_1^3 a_i\,b_i \sum\limits_1^3 p_i^2 - \sum\limits_1^3 a_i\,p_i\,.\sum\limits_1^3 b_i\,p_i\Big]}.$$

Volíme-li $\varkappa^*$ pevné a stanoví-li p_i souřadnice pohyblivé přímky, stanoví poslední rovnice jistý *komplex 4. stupně* G_{ab}. *V tomto komplexu jest každý paprsek lineární kongruence, jejíž osami jsou dané dvě pevné přímky* a, b, *dvojným paprskem.* Jest to patrné především geometrickou úvahou, neboť sborcená plocha H rozpadá se, volíme-li přímku p různoběžnou s přímkami a, b, na svazky paprskové, položené v rovinách $a\,p$ resp. $b\,p$ a o vrcholích položených na přímkách b resp. a, nebo na přímkách a resp. b pro druhou soustavu povrchových přímek. Přímka p jsouc dvojnou přímkou plochy H, obsahuje svazek tečných rovin, jichž dotyčné body mají libovolnou polohu na přímce p; můžeme si je tedy mysliti tak uspořádány, aby parametrem torse byla kterákoliv, tedy také daná hodnota $\varkappa^*$.

Počtem vyplývá poznatek tento tímto způsobem: Položme

$$\frac{\omega\,(a\,b)}{\varkappa^*} = 2\,m,$$

pak rovnice komplexu může se psáti ve tvaru

$$F\,(p) \equiv A^2\Big[\sum_1^3 a_i^2 \sum_1^3 p_i^2 - \Big(\sum_1^3 a_i\,p_i\Big)^2\Big] - 2\,A\,B\Big[\sum_1^3 a_i\,b_i \sum_1^3 p_i^2 - \sum_1^3 a_i\,p_i \sum_1^3 b_i\,p_i - m \sum_1^3 p_i^2\Big] + B^2\Big[\sum_1^3 b_i^2 \sum_1^3 p_i^2 - \Big(\sum_1^3 b_i\,p_i\Big)^2\Big] = 0.$$

Z rovnice této jest patrno, že každý paprsek, který protíná současně obě přímky a, b, náleží komplexu, neboť souřadnice takového paprsku hoví podmínkám

$$A = 0, \quad B = 0.$$

Avšak paprsky tyto jsou současně dvojné, neboť souřadnice jejich anullují současně všech 6 hodnot

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}.$$

Skutečně položíme-li rovnici komplexu do tvaru

$$F(p) \equiv A^2 L - 2\,A\,B\,P + B^2 Q,$$

jest pro $i = 1,\ 2,\ 3$

$$\begin{aligned} F_i \equiv 2\,A\,L\,b_{i+3} + 2\,B\,Q\,a_{i+3} + A^2 L_i + B^2 Q_i - 2\,A\,P\,a_{i+3} - \\ - 2\,B\,P\,b_{i+3} - 2\,A\,B\,P_i, \end{aligned}$$

pro $i_{+3} = 4,\ 5,\ 6$

$$F_{i+3} \equiv 2\,A\,L\,b_i + 2\,B\,Q\,a_i - 2\,A\,P\,a_i - 2\,B\,P\,b_i.$$

Poněvadž souřadnice h_i resp. k_i přímek rovnoběžných s přímkami a resp. b jsou

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6, \quad \text{resp.} \quad b_1,\ b_2,\ b_3,\ q_4,\ q_5,\ q_6,$$

při čemž současně platí vztahy

$$\omega(a\,h) = 0, \qquad \omega(b\,k) = 0,$$

bude, vložíme-li souřadnice h_i resp. k_i do rovnice komplexu,

$$F(h) \equiv \omega(a\,h)^2 \Big[\sum_1^3 a_i^2 \sum_1^3 b_i^2 - \Big(\sum_1^3 a_i b_i\Big)^2\Big] + \frac{1}{\varkappa^*}\,\omega(a\,h)\,.\,\omega(b\,h)\,.\,\omega(a\,b) \sum_1^3 a_i^2,$$

$$F(k) \equiv \omega(b\,k)^2 \Big[\sum_1^3 a_i^2 \sum_1^3 b_i^2 - \Big(\sum_1^3 a_i b_i\Big)^2\Big] + \frac{1}{\varkappa^*}\,\omega(a\,k)\,.\,\omega(b\,k)\,.\,\omega(a\,b) \sum_1^3 b_i^2.$$

tedy dle hořejších úvah

$$F(h) = F(k) = 0.$$

Dle toho *každý paprsek rovnoběžný s jednou nebo druhou hlavní přímkou náleží ke komplexu.*

Současně lze také ukázati, že *každý nekonečně vzdálený paprsek jest také dvojným paprskem komplexu.*

Skutečně volíme-li Plückerovy souřadnice roviny $(u,\ v,\ w)$, má nekonečně vzdálená přímka této roviny paprskové souřadnice l_i: $0,\ 0,\ 0,\ u,\ v,\ w$. Avšak pro tyto hodnoty souřadnic p_i vymizejí všecky tři formy $L,\ P,\ Q$, jakož i jejich derivace $L_i,\ P_i,\ Q_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$, to jest, platí

$$\begin{aligned} L\ (h) = P\ (h) = Q\ (h) = 0, \\ L_i\,(h) = P_i\,(h) = Q_i\,(h) = 0. \end{aligned}$$

Geometricky jest výsledek tento opodstatněn tím, že každý bod přímky h jest tečným bodem roviny $b\,h$, a všechny ostatní roviny vedené přímkou h mají své tečné body v nekonečně vzdáleném bodě této přímky.

Vyšetřme nyní rovnici komplexu $G_{a\,a}$ pro ten případ, že hlavní přímky $a,\ b$ jsou soumezné. Mysleme si za tím účelem, že hodnoty a_i jsou funkcemi parametru t takové, že možno pro ně použíti rozvinutí Taylorovo.

Položme tedy

$$b_i = a_i + \varDelta t\,.\,a_i' + \frac{\varDelta t^2}{2}\,a_i'' + \ldots;$$

potom

$$A = \omega\,(b\,p) = \omega\,(a\,p) + \varDelta\,t\,.\,\omega\,(a'\,p) + \ldots, \qquad B = \omega\,(a\,p),$$

neboli

$$A = B + \varDelta\,t\,.\,\omega\,(a'\,p) + \ldots$$

Avšak

$$C = \omega\,(a\,b) = \frac{\varDelta\,t^2}{2}\,\omega\,(a\,a'') + \ldots,$$

poněvadž

$$\omega\,(a\,a) = \omega\,(a\,a') = 0.$$

Vložíme-li tyto hodnoty do výrazu pro $\varkappa^*$, máme po krátké úpravě a po vymezení pro $\lim \varDelta\,t = 0$,

$$\varkappa^* = -\frac{B^2\,.\,\frac{1}{2}\,\omega\,(a\,a'')\,.\,\sum_1^3 p_i^2}{B^2\Big[\sum_1^3 a_i'^2 \sum_1^3 p_i^2 - \Big(\sum_1^3 a_i'\,p_i\Big)^2\Big] + B'^2\Big[\sum_1^3 a_i^2 \sum_1^3 p_i^2 - \Big(\sum_1^3 a_i\,p_i\Big)^2\Big] - 2\,B\,B'\Big[\sum_1^3 a_i\,a_i' \sum_1^3 p^{\,2} - \sum_1^3 a_i\,p_i \sum_1^3 a_i'\,p_i\Big]}$$

značíce při tom

$$B' = \omega\,(a'\,p).$$

Do tohoto výrazu můžeme zavésti ještě parametr torse $\varkappa$ elementu určeného hlavními přímkami, neboť platí,

$$\omega\,(a\,a'') + 2\sum_1^3 a_i'\,a_{i+3}' = 0$$

a

$$\sum_1^3 a_i'\,a_{i+3}' = \varkappa \sum_1^3 a_i'^2;$$

potom

$$\varkappa^* = \frac{\varkappa\,B^2 \sum_1^3 a_i'^2 \sum_1^3 p_i^2}{B^2\Big[\sum_1^3 a'^2 \sum_1^3 p_i^2 - \Big(\sum_1^3 a_i'\,p_i\Big)^2\Big] + B'^2\Big[\sum_1^3 a_i^2 \sum_1^3 p_i^2 - \Big(\sum_1^3 a_i\,p_i\Big)^2\Big] - 2\,B\,B'\Big[\sum_1^3 a_i\,a_i' \sum_1^3 p_i^2 - \sum_1^3 a_i\,p_i \sum_1^3 a_i'\,p_i\Big]}.$$

Volíme-li tedy veličiny a_i a s nimi související a_i' pevné, jakož i hodnoty parametru torse $\varkappa^*$, $\varkappa$, máme rovnici komplexu

$$\Phi(p) \equiv B^2 \left[\left(1 - \frac{\varkappa}{\varkappa^*}\right) \sum_1^3 a_i'^2 \sum_1^3 p_i^2 - \left(\sum_1^3 a_i' \, p_i\right)^2\right] + B'^2 \left[\sum_1^3 a_i^2 \sum_1^3 p_i^2 -\right.$$

$$\left. - \left(\sum_1^3 a_i \, p_i\right)^2\right] - 2\, B\, B' \left[\sum_1^3 a_i a_i' \sum_1^3 p_i^2 - \sum_1^3 a_i \, p_i \sum_1^3 a_i' \, p_i\right] = 0.$$

Applikací úvah vyvinutých v obecném případě pro dvě libovolné mimoběžné přímky vychází přímo, *že každý paprsek lineární kongruence parabolické dané dvěma hlavními soumeznými přímkami, jest dvojným paprskem komplexu* a podobně jest *každý paprsek rovnoběžný s danou hlavní přímkou také dvojným paprskem komplexu.*

Jest patrno, že má-li přímka p protínati obě soumezné hlavní přímky, musí, až na hodnoty nekonečně malé vyššího stupně, platiti

$$B = B' = 0,$$

a současně souřadnice těchto paprsků anullují všecky hodnoty

$$\Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}.$$

Rovnoběžný paprsek s přímkou a má souřadnice $h_i \ldots a_1,$, a_2, a_3, p_4, p_5, p_6 takové, že současně $\omega(a\, h) = 0$.

Ale pro hodnoty h_i redukuje se levá strana rovnice komplexu na tvar

$$\Phi(h) \equiv \omega(a\, h)^2 \left[\left(1 - \frac{\varkappa}{\varkappa^*}\right) \sum_1^3 a_i'^2 \sum_1^3 a_i^2 - \left(\sum a_i a_i'\right)^2\right]$$

a tedy

$$\Phi(h) = 0.$$

Avšak každý paprsek h_i anulluje současně všecky hodnoty Φ_i; skutečně můžeme psáti, znamenajíce H, K, L příslušné formy,

$$\Phi(p) \equiv B^2 . H - 2\, B . B' . K + B'^2 . L.$$

Utvoříme-li $\Phi_i(p)$ a vložíme-li za p souřadnice h_i, jest

$$B(h) = K(h) = L(h) = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial p_i} = 0, \quad \text{pro } i = 1, 2, 3,$$

ale

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial K}{\partial p_i} = \frac{\partial L}{\partial p_i} = 0, \quad \text{pro } i = 4, 5, 6.$$

Proto platí pro každé i a h

$$\Phi_i(h) = 0.$$

V případě obecném, kdy hlavní přímky nejsou soumezny, tomu tak není, to jest, platí

$$F_i(h) \lessgtr 0 \quad F_i(k) \lessgtr 0\,;$$

proto také každý paprsek h resp. k jest jenom jednoduchým paprskem.

Z dřívějších úvah zůstává, že také *každý nekonečně vzdálený paprsek jest dvojným paprskem komplexu.*

Odvodíme nyní rovnici komplexu ve zvláštní poloze a sice pro případ druhý, že obě hlavní přímky jsou soumezné.

První hlavní přímku položme do osy Y, rovina asymptotická budiž rovina $X\,Y$, centrální bod budiž počátek souřadnic.

Druhá hlavní přímka bude tedy protínati osu Z ve vzdálenosti Δh od počátku, bude rovnoběžná s rovinou $X\,Y$ a bude svírati s osou Y úhel $\Delta \alpha$; souřadnice obou přímek budou tyto:

p	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
a	0	1	0	0	0	0
b	$\sin \Delta \alpha$	$\cos \Delta \alpha$	0	$-\Delta h \,.\, \cos \Delta \alpha$	$\Delta h \,.\, \sin \Delta \alpha$	0

Dělíme-li všecky hodnoty b_i $\cos \Delta \alpha$ a zavedeme-li pro nekonečně malé hodnoty $\Delta \alpha$ místo $\operatorname{tg} \Delta \alpha$ pouze $\Delta \alpha$ a uvážíme-li, že

$$\lim \frac{\Delta h}{\Delta \alpha} = \varkappa,$$

máme pro souřadnice přímek a, b toto schema:

p	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
a	0	1	0	0	0	0
b	$\Delta \alpha$	1	0	$-\varkappa \,.\, \Delta \alpha$	$\varkappa \,.\, \Delta \alpha^2$	0

Považujeme-li $\Delta \alpha$ za přírůst parametru Δt, můžeme v rovnici komplexu $G_{a\,a}$ nahraditi derivace a_i' postupně hodnotami

a_1'	a_2'	a_3'	a'_4	a_5'	a'_6
1	0	0	$-\varkappa$	0	0

Pak jest

$$B = \omega(a\ p) \equiv p_5,$$
$$B' = \omega(a'\ p) \equiv p_4 - \varkappa\, p_1;$$

po krátké úpravě a redukci obdržíme rovnici komplexu ve tvaru

$$\varkappa^* = \frac{\varkappa\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\, p_5^2}{p_3^2\, p_5^2 + (p_3\, p_6 + \varkappa\, p_1^2)^2 + (p_4 - \varkappa\, p_1)^2\, p_3^2}\,.$$

Diabasový aplit z Housiny u Zdic v Čechách.

Podává

Odolen Kodym, v Praze.

(S mapkou a obrazem v textu.)

(Předloženo dne 22. dubna 1921.)

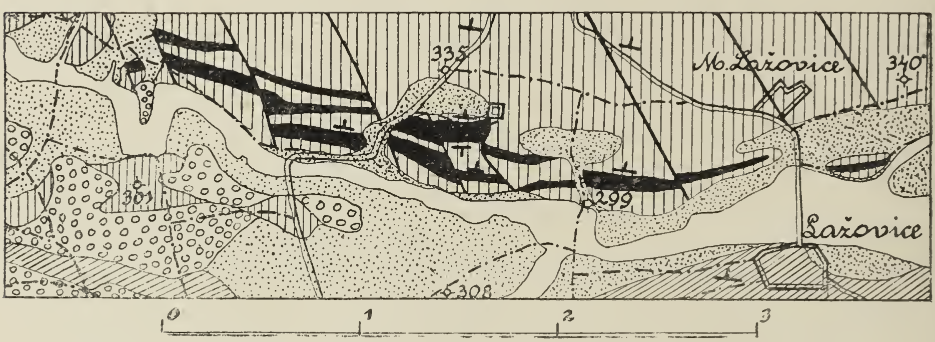
Na jižním svahu kopcoviny svrchnosilursko-devonské jižně od *Berouna* na stráni zvané *Housina,* svažující se do *Hostomické kotliny,* vystupuje táhlý hřbet budovaný horninou, jíž dle petrografického složení nazývám *diabasovým aplitem.* Tato hornina vystupuje v pruhu asi 6 *km* dlouhém (srovnej mapku obr. 1) na pravém břehu potoka *Chumavy* od *Lažoviček* směrem k *Libomyšli* severně od *Hostomic.* Jak z přiložené mapky jest patrno, tvoří diabasový aplit pruh v břidlicích *králodvorských* $d\zeta_1$ spodního siluru¹) směru celkem východ-západ, který jest několikráte přerušován příčnými poruchami. *Geologický tvar* tohoto tělesa lze označit za *ložní žílu,* případně *lakolit typu cedrového,* neboť jest uloženo *konkordantně* v okolních břidlicích a způsobuje *zřetelnou kontaktní metamorfosu* svého nadloží. Při tom jest celé těleso *zvrásněno* souhlasně s okolními břidlicemi, tvoříc místní vrásu, která též podmiňuje, že žíla vychází na povrch dvakrát i třikrát. Mocnost této žíly odhaduji na 30—50 *m.*

Doba intruse jest patrna z poměrů geologických. Diabasový aplit z *Housiny* vnikl do vrstev *kralodvorských* $d\zeta_1$, tedy do nejmladší etaže spodního siluru a jelikož své nadloží metamorfuje, musíme jej pokládati za mladší spodního siluru. Jelikož však byl vrásněn současně s okolními vrstvami v době variské, musíme klásti dobu jeho vzniku před začátek karbonu. Diabasový aplit housinský intrudoval tedy nevyhnutelně buď ve *svrchním siluru* nebo v *devonu.* V této periodě vznikaly v Barrandienu ložní žíly a lože *diabasová* doprovázená *tufy,* jejichž erupce se udály v době sedimentace pásma liteňského e α, a to jeho střední a svrchní části. Jest tudíž velmi pravděpodobno, že *diabasový aplit housinský* náleží k *magma-*

---

¹) Užívám nového označování vrstev v Barrandienu. Srovnej: *R. Kettner-O. Kodym,* Nová stratigrafie Barrandienu, Čas. Musea 1919.

tickému krbu svrchnosilurských diabasů a jest *kyselou odštěpeninou diabasového magmatu*, čemuž nasvědčuje i petrografická a chemická povaha horniny samé, jak níže bude ukázáno. Diabasový aplit vnikl tedy pravděpodobně do vrstev kralodvorských jako *periferický lakolit* (neb ložní žíla) v době *vulkanického maxima* svrchnosilurského v době sedimentace vrstev liteňských.



Obr. 1. Geologická mapka okolí Housiny. (Vysvětlivky viz str 12.)

Housinský diabasový aplit jest znám již delší dobu a je uváděn J. Krejčím[2]), J. Krejčím a K. Feistmantelem[3]), B. Katzerem[4]), J. N. Woldřichem[5]), A. Liebusem[6]) a j. Všichni tito autoři klasifikují horninu jakožto *minettu*, jíž se naše hornina snad poněkud makroskopicky podobá hojnými vrostlicemi biotitovými, avšak naprostý nedostatek orthoklasu, jakož i geologický výskyt a příslušnost k magmatu diabasovému vyžadují si pojmenování jiného. Svrchu jmenovaní autoři buď vůbec nepodávají popisu horniny, neb uvádějí toliko neúplnou a nesprávnou charakteristiku. Nejobšírnější popis horniny podává Katzer ve své Geologii, jenž ji klade mezi „*lamprofyrické horniny žilné* a to mezi *syenitické lamprofyry*". Krejčí-Feistmantel a po nich Katzer uvádějí, že „minetta" housinská jest spiata s „*tufovými útvary*". Mám za to, že se tento údaj zakládá na omylu, jak jest patrno již z nepochybně *intrusivní povahy* této žíly. Také jsem nikde tufů této horniny nenašel.

Housinský diabasový aplit jest otevřen v několika menších lomech, dnes vesměs opuštěných. Užívalo se této horniny ku štěrkování silnic a jakožto stavebního kamene do základů a do zdí, s nevalným prospěchem, neboť hornina brzy větrá.

---

[2]) J. Krejčí: Geologie čili nauka o útvarech zemských, Praha 1877, str. 416, 470.

[3]) J. Krejčí—K. Feistmantel: Orografický a geotektonický přehled atd. Archiv pro přír. proz. Čech 1890, str. 55.

[4]) B. Katzer: Geologie von Böhmen, Praha 1892 str. 977—978.

[5]) J. N. Woldřich: Všeobecná geologie III. Praha 1905, str. 220.

[6]) Das Gebiet des Roten und Jalový-Baches um Komorau und das Schieferterrain von Lochowitz. Verhandlungen d. k. k. geolog. R. A. 1904.

Popis horniny.

Čerstvá nezvětralá hornina má barvu *šedou* s nádechem do olivové. Na povrchu bývá však vždy zvětralá, měníc barvu do *žluté*, při dalším větrání do *světle hnědé* až *tmavohnědé*. Hnědá barva zvětralé horniny podmíněna jest limonitem, který se tvoří z biotitu.

Stavba horniny jest všesměrná. *Hustota horniny* určena metodou hydrostatickou na 2·55—2·65. Jelikož toto číslo jest nápadně nízké, byla hornina ve vodě vyvařena, a touž metodou určena pak hustota na 2·68.

Při větrání horniny lze pozorovat zřetelný sklon k rozpadu *kulovému* jako u diabasů.

Sloh horniny jest *jemně zrnitý*, zrna jsou makroskopicky dobře rozeznatelná. Lupou lze zjistit šupinky *biotitu* a daleko převládající zrna i lišty *živce*. Místy nabývají některá zrna neb lišty živcové větších rozměrů nežli ostatní součásti, čímž sloh stává se porfyrovitým.

Výbrus z čerstvého vzorku horniny má barvu žlutavě šedou; lupou lze ve výbruse spatřiti veliké množství zakalených dlouze lištovitých průřezů *živcových*, jež tvoří nejpodstatnější část horniny. Mezi nimi jsou lupínky *biotitu* a zrnitá hmota *živcová* jako tmel. Četné všemi směry prostupující lišty živcové upomínají na *sloh diabasový*. Převahou živců nad biotitem má hornina ráz vysloveně leukokrátní.

Ve výbrusu v drobnohledu lze konstatovati jako podstatné součástky: *živce, biotit, chloritické a vápencové pseudomorfosy*. Nepodstatné jsou tu: *křemen, apatit* a *ruda*.

Biotit tvoří lupénky z části dokonale *idiomorfních obrysů*, z části však též na krajích *laločnaté*, allotriomorfní, omezené jen na basi idiomorfně. Poměr lupénků omezených *idiomorfně* k individuím *allotriomorfně* omezeným v různých výbrusech velmi kolísá. — Mnohdy i omezení podle base není úplně krystalové, tak že i lištovité průřezy lupénků příčně proříznutých mají omezení nedokonale idiomorfní. Idiomorfie biotitu přibývá s klesajícími rozměry jedinců. Veliké lupénky bývají tu a tam zřetelně *korrodovány*.

V obyčejném světle jest barva lupénků dle base říznutých temně *červeno-hnědá*, lupénků příčných světle *šedohnědá*, s tonem do červena. Nad dolním nikolem jeví řezy příčné intensivní *pleochroismus* mezi barvou temně kaštanově hnědou s tonem do červena (|| k 001) a žlutohnědou (⊥ k 100). Lupénky, zvláště větší, bývají často zvlněny a zkrouceny, jak z undulosního pleochroismu příčných průřezů lze snadno poznati.

V lupéncích biotitu jest vrostlá *černá ruda* v podobě vrstviček, uložených rovnoběžně s basí; na příčných průřezech lze dobře viděti přesně parallelní obrysy těchto vrstviček s basálními plochami biotitu. Okrajní obrysy rudních vložek bývají časem idiomorfní, časem allotriomorfní, jak lze viděti zvláště na lupéncích dle base říznutých. Tu a tam vniká proužek rudní do biotitu i napříč. Též něco zrnek *titanitu* a sloupků *apatitu* nalezeno.

Od krajů mění se biotit v *chloritický nerost* jemně šupinkatý, v obyčejném světle barvy šedozelené; nad dolním nikolem jeví na příčných řezech zřetelný pleochroismus mezi barvou šedozelenou až modravě šedozelenou dle base, bledě žlutozelenou až rezavě zelenou ⊥ k basi. Anomalní barvy nebyly pozorovány. Někde jsou změněny ve chlorit sotva okraje biotitových lupénků, jinde proměna postoupila hlouběji, až najdeme i dokonalé pseudomorfosy chloritické, v nichž tu a tam bývá zachováno něco biotitu, vytrácejícího se znenáhla do chloritu.

Místy se pseudomorfosy zakalují rezavě šedozeleně až skorem do neprůhledna, jindy uzavírají v sobě hojně šedého neprůhledného zákalu v podobě drobounkých zrnek. V pseudomorfosách chloritových zastižena byla zrnka *titanitu*, nápadná svým vysokým lomem i dvojlomem. Jejich vznik jest zajisté druhotný z podílu Ti, obsaženého v biotitech.

Chlorit pseudomorfující biotit má lom > 1·5830; dle toho a dle středně vysokého dvojlomu dosahujícího asi dvojlomu křemene dlužno počítati jej ku *klinochloru*.

Vedle proměny ve chlorit vzniká rozkladem biotitu též *hnědel*, jenž barví okolní součástky, vnikaje od větrajícího lupénku biotitového po puklinkách daleko do okolní horniny. Při větrání vytvořují se uvnitř lupénků biotitových šupinky *čiré slídy* s vysokými interferenčními barvami.

Pseudomorfosy chloritové po biotitu větráním stávají se téměř neprůhledné, při čemž pleochroismus jejich mizí.

Lupénky biotitu dosahují velikosti až 3 *mm*, v některých zvláště hrubozrnných partiích až 8—9 *mm*; průměrná velikost jest 0·4 *mm*, klesajíc až na 0·06 *mm*.

Místy lze spatřiti vedle chloritických peudomorfos po biotitu též *pseudomorfosy*, tvořené hlavně *uhličitanem* a *chloritem*, které se liší od oněch již svým obrysem. Jejich rozšíření v hornině není stejnoměrné, neboť v některých výbrusech byly velmi hojně zastiženy, v jiných scházejí úplně. Dle idiomorfních obrysů těchto pseudomorfos lze souditi na pyroxen jakožto nerost původní. *Vápenec* tvořívá uvnitř pseudomorfos jedno neb několik málo velikých zrn, zakalených často velmi jemně práškovitou rudou a prostoupených nerostem chloritickým zelenavé barvy, velmi jemně šupinkatým. V některých průřezech převládá *vápenec*, v jiných *chlorit*. Tyto pseudomorfosy bývají zhusta obrostlé lupénky *biotitu*, jež v době krystalisace horniny byly kol velikých vrostlic pyroxenu mechanicky nahromaděny.

Pseudomorfosy chloritové a vápencové dosahují velikosti až 1·2 *mm*, průměrnou velikost lze odhadnout na 0·4 *mm*.

Živce náleží několika generacím, odlišným dobou vzniku, habitem i vlastnostmi chemickými a fysikálními.

Velká individua živcová skýtají průřezy místy široce tabulkovité, skoro isometrické, většinou však dlouze lištovité. Podoba živců je tabulkovitá dle (010), orientace v hornině různá; velikost měřených krystalů dosahuje až 5·5 *mm*, průměrně 1—2 *mm*. Vnější omezení jest dosti dokonale idiomorfní. Tyto vrostlice skládají se ze živců dvojí povahy: allotriomorfního vždy kalnějšího jádra a čistšího až ve výbruse zcela čistého okraje. Omezení jader dokazuje, že byla před vytvořením idiomorfně omezené zony okrajové (resp. současně s jejím vznikem) silně *korrodována*. Často najdeme jádro na okrajích rozštěpené v úzké, ostře ukončené laloky, ba i partie, jež s jádrem souvisejí útržkovitě toliko úzkými proužky.

Jelikož není myslitelno, že by se mohly v magmatu uchovati tak intensivně korrodované okraje bez porušení, lze souditi, že byla patrně perioda mezi korrosí jader a tvořením obrub velmi malá, tak že obojí proces dál se téměř současně. Korrose jader postoupila místy tak daleko, že z nich zbývají toliko nedokonale související neb ve výbrusu oddělené partie, které dokumentují svou sounáležitost toliko současným zhášením. Kde jádra jsou celokrajná neb nejvýše vlnitých okrajů, kde korrose byla slabá, tam jest okrajní zona úzká. Čím jest korrose jader patrnější a silnější, tím více vzrůstá okrajní zona na účet jader. Jádra v užších řezech bývají zpravidla *dvojčatěna* podle zákona karlovarského; velmi spoře bylo pozorováno polysyntetické lamelování. Též okrajní zony živce bývají spoře a zřídka lamelovány, lamely bývají pak dosti široké. Častěji bylo pozorováno, že shášení neděje se současně, leč souvisle od středu ke krajům, upomínajíc na shášení *undulosní*. Zvláštností naší horniny jest, že *jádra živců jsou kyselejší okrajů*. Lom světelný u jader jest z části větší, z části menší než 1·5403; náleží tudíž *oligoklasalbitu*, jak dokazuje i *positivnost rázu* jejich, kde řez je veden ⊥ k ose nebo k ostré středné. Okraje jsou rázu vždy *negativního*, mají lom větší než 1·5403, menší než 1·5492 (bližší této hodnotě) i náležejí tudíž basičtějšímu *oligoklasu*. Všude ve výbrusu lze se přesvědčiti (Beckeho methodou), že lom jader je značně nižší nežli lom okrajů.

Zákal živcových jader způsobují jemné šupinky *muskovitu*. Rozklad jader udál se zajisté buď před korrosí, nebo současně s ní, není však výsledkem větrání utuhlé horniny, jak svědčí neporušená (ač basičtější) zona vnější. Jádra vrostlic živcových uzavírají v sobě vedle tyčinek *apatitu* i *chloritické pseudomorfosy* po biotitu, resp. tyto do jader vnikají. Jádra živcová jsou pak oproti pseudomorfosám omezena alotriomorfně. Z toho lze souditi, že biotity začly se tvořiti dříve, nežli jádra živcová, jejich vylučování však potrvalo i za vzniku mladších okrajů živcových, jak zřejmo ze vzájemného omezení součástí těch. Možno, že ony starší biotity změněny byly ve chlorit (snad účinkem mineralisatorů v magmatu obsažených) současně s proměnou jader živcových.

Drobnozrnější hmota, spojující velké lištovité krystaly živcové, obsahuje vedle drobných šupin *biotitu*, spojených přechody s lupénky velkými, něco *chloritu* a součástí nepodstatných hlavně ještě *dva druhy živce*. Jsou to jednak většinou *idiomorfní zcela čirá individua anorthoklasu*, jednak tmelící je, vždy v propadajícím světle *zakalený kyselý plagioklas*.

Průřezy anorthoklasu mívají podobu obdélníkovou až kosodélníkovou, dosahujíce průměrně velikosti 0·1 *mm*. Najdeme však i zrna dosahující až 0·45 *mm* velikosti. Jejich nápadná čerstvost a čistota, jíž se podobají okrajům velikých vrostlic, odlišuje se ihned při spuštění kondensoru od tmelícího je plagioklasu. Vznikly současně s obrubami porfyrických vrostlic živcových, neboť místy do nich vnikají, místy naopak obrys anorthoklasů řídí se krystalovým omezením plagioklasů. Anorthoklasové krystaly jsou velmi zřídka zdvojčatěny dle karlovarského zákona, nikdy však u nich nebylo pozorováno lamelování mnohočatné. Lom anorthoklasů je nižší, nežli lom tmelících je plagioklasů, z části o něco větší, z části o něco menší nežli 1·5313, jak bylo zjištěno methodou immersní. Řezy kolmé k ose i ku ostré středné prokázaly optický ráz *negativní*.⁷)

Z výbrusu byla isolována část, bohatá na anorthoklasové krystaly a prostá živců porfyrických i temných součástí, a zkoumána methodou Bořického. Nepodařilo se ovšem anorthoklasy úplně odděliti od větrajícího tmelícího plagioklasu, výsledek mikrospopické analysy je však i tak poučný. Poskytl veliké (daleko převládající) množství *Na*, něco *K* a *Ca*. Tento poslední prvek spolu s částí *Na* zajisté pochází z tmelícího plagioklasu; ostatek *Na* a malé nalezené množství *K* pocházejí z *anorthoklasu.*

Tmelící živec, nahnědle zakalený jest *kýselý oligoklas*; lom jeho je větší nežli lom *anorthoklasu*, menší nežli lom čistých obrub velikých vrostlic plagioklasových. Jest vždy *alotriomorfní* a vyplňuje jakožto nejmladší součást v základní hmotě mezery mezi součástkami ostatními, hlavně mezi jedinci anorthoklasovými. Tu a tam najdeme kolem krystalů anorthoklasových nebo kolem velkých vrostlic paprsčitě vláknité agregáty sférolitické, tvořené tímto plagioklasem.

K součástem nepodstatným náleží *křemen*, jenž tvoří allotriomorfní sporá zrna nepatrné velikosti (průměrně 0·2, nejvýše 0·5 *mm*), vyplňující poslední mezery tuhnoucí horniny. Toliko jednou bylo nalezeno zrnko omezené idiomorfně.

Apatit tvoří štíhlé sloupky, vrostlé v ostatních součástech, dosahující velikosti průměrně 0·15 *mm*, někdy však až 0·44 *mm*. Jest nejstarší součástí horniny.

Ruda tvoří idiomorfní zrnka a hůlky obrysu skoro čtvercového, obdélného i kosočtvercového, z části též zrnka alotriomorfní, laločnatá. Velikost zrnek kolísá od 0·5 *mm* do 0·015 *mm*, průměrně 0·2 *mm*. V napadajícím světle jest ocelově šedá, v HCl na odkrytém výbrusu se nerozpouští, (ani při zahřátí), místy mění se v *leukoxen*. Dle toho dlužno rudu považo-

---

⁷) Nepochybně zjištěný ráz jest příčinou, proč označuji živec tento jakožto anorthoklas, ač jeho lom světelný jest o něco málo vyšší, nežli průměrné udávané hodnoty pro anorthoklasy; v literatuře však lze též nalézti doklady o lomu anorthoklasu, souhlasícím s lomem našeho živce (viz H. Rosenbusch, Mikrosk. Physiographie I. Bd. 2. Hälfte 327).

vati za *ilmenit.* Ježto vniká do všech součástí horniny, lze souditi, že jest alespoň z části s apatitem nejstarší součástí aplitu. Místy však jest oproti biotitu omezena zřetelně alotriomorfně, z čehož plyne, že doba vzniku rudy částečně se kryje s periodou, kdy se tvořil biotit.

Kromě toho nalezen v některých výbrusech *pyrit* ve velikých zrnech.

Hojnost rudy jest velmi proměnlivá. V některých výbrusech najdeme jen tu a tam malá zrnka, jinde tvoří podstatnou součást horniny.

* * *

Hirschwaldovým okulárem měřen byl v procentech poměr součástek horniny ve výbruse a shledáno bylo: *Tmavých součástek* (biotitu + pseudomorfos) je 2 %, *ostatku* je 73%. Z toho připadá na *anorthoklasy* asi 11%, na *křemen* (měřeno po zbarvení živců methylenovou modří) 3·7%. Jak patrno, jest hornina značně *leukokrátní.* Aby byl zjištěn poměr živců basičtějších ku kyselejším, byl výbrus leptán pomocí HF a na to zbarven *methylenovou modří.* Zbarvily se okraje vrostlic (basičtější) kdežto jádra jejich a anorthoklasy zůstaly nezbarveny. Obruby vrostlic místy nezbarvily se stejnoměrně; intensivnější zbarvení najdeme blíže jádra, na důkaz, že jsou i obruby živcových vrostlic stavěny *zonárně.*

Jednotlivé nerosty v hornině krystalovaly při tuhnutí asi v tomto pořádku: Po vytvoření *apatitu* a části *rud* vznikal *biotit, jádra živcových vrostlic* a minerál přeměněný dnes ve *chlorit* a *vápenec* (*diopsid*?). Tu však fysikální poměry při tuhnutí magmatu se změnily a nastala *korrose* jader živcových. *Přeměna biotitu* dotud vytvořeného ve chlorit dála se asi též v této době a byla podmíněna pravděpodobně součinností plynů a par v magmatu obsažených. Pak teprve vyloučil se *ostatní biotit.* Během krystalisace se hmota živcová neutuhlého ještě magmatu ještě rozštěpila. Část basičtější isomorfně vykrystalisovala na *korrodovaných jádrech,* vytvořivši obrubu vrostlic, část kyselejší dala vznik *anorthoklasům.* Poslední mezery mezi jednotlivými součástkami horniny byly vyplněny alotriomorfně omezeným *kyselým oligoklasem* a *křemenem.*

Petrografický ráz horniny jest v celé ložní žíle jednotný. Toliko partie blízké kontaktu (z kraje žíly) jsou poněkud *kyselejší,* jak patrno z hojnějšího výskytu *křemene,* a poněkud *jemnozrnější.* Zejména velké vrostlice živcové nedosahují tu těch rozměrů, jako ve středu žíly.

* * *

Diabasový aplit housinský byl analysován panem dr. J. Šplíchalem v chemické laboratoři *Státního geologického ústavu Č. S. R.* Výsledek analysy uvádím ve sloupci I.[8]) Ve sloupci II. uvádím tutéž analysu, přepočtenou na 100 po vynechání součástí zcela nepodstatných, jakož i H_2O a CO_2. Ve sloupci III. udávám molekulární objemy podle sloupce II., přepočítané na 100.[9]) Ve sloupci IV. uvádím na srovnání tytéž molekulární objemy minetty od *Strašnic* vých. od *Prahy*, vypočítané z analysy K. Preisovy[10]). Tato minetta totiž svým *geologickým výskytem* je zcela podobná diabasovému aplitu housineckému a přičítám jí týž význam geologický.)

---

[8]) FeO zvláště nestanoveno.

	I.	II.	III.	IV.
SiO_2	56·42	60·28	63·06	59·28
TiO_2	0·83	0·89	0·70	—
Al_2O_3	11·72	12·51	7·70	6·12
Fe_2O_2	4·59	4·90	3·84 *	7·35 *
MnO	1·62	1·73	1·53	0·64
CaO	9·30	9·94	11·14	9·92
MgO	4·26	4·55	7·14	8·02
Na_2O	3·86	4·13	4·18	3·22
K_2O	1·00	1·07	0·71	5·45
S	0·37	100·00	100·00	100·00
P_2O_5	0·46			
CO_2	2·68			
H_2O do 105°	0·39			
H_2O chem. váz.	2·52			
Cl	0·09			
	100·11			

* Přepočteno na FeO.

Z této analysy vyplývají hodnoty Osanovy uvedené pro diabasový aplit z *Housiny* ve sloupci I., pro *minettu ze Strašnic* ve sloupci II. Při tom nebylo lze vypočítat hodnoty *A*, *C*, *F* a *a*, *c*, *f* pro *minettu ze Strašnic*, poněvadž tu *alkalie* převládají nad *alluminiem*.

s = Si + Ti	63·76	59·28
A = $(KNa)_2\ Al_2O_4$	9·78	—
C = $Ca\ Al_2O_4$	5·66	—
F = (MnFe Ca) O	20·82	—
SAl F = $(SiO_2 + FiO_2) : (Al_2O_3) : (RO)$	20 : 2·5 : 7·5	19·5 : 2 : 8·5
AlC Alk = $(Al_2O_3) : (CaO) : (Na_2O + K_2O)$	10 : 14 : 6	7·5 : 12 : 10·5
m = (Mg) : (Ca + Mg)	4	4·5
n = Na : (K + Na)	8·5	3·8
a =	5·4	—
c =	3·1	—
f =	11·5	—

---

[9]) Fe_2O_3 přepočítáno na FeO. Taktéž se stalo ve sloupci IV.

[10]) K. Preis: Über die Minette aus der Umgebung von Prag. Sitzungsber. d. kön. b. Gesellsch. der Wissenschaften in Prag 1871.

[11]) Srovnej: O. Kodym: Zpráva o geologickém mapování na listu Praha mezi Prahou, Modřany a Kunraticemi. Sborník Stát. geolog. úst. ČSR. 1920.

Ze srovnání obou analys vyplývají mnohé podobnosti obou hornin. V obou jeví se veliká převaha kalcia nad alkaliemi i nad alluminiem, hojnost magnesia, málo alluminia a dostatek alkalií. Rozdíly mezi oběma horninami spočívají ve větší basicitě minetty, v různém poměru K a Na u obou hornin a ve větším bohatství minetty na Fe.

Analysa housinského diabasového aplitu jest nápadna *neobyčejně vysokými čísly pro* CO_2 a H_2O, jež dávají tušiti, že v analysovaném vzorku bylo velmi mnoho *pseudomorfos vápencových* a *chloritických*, jimiž lze vysvětliti značný podíl *kysličníku uhličitého* a podíl *vody* v analyse. Přes to nebyl vápník, připadající na CO_2 z analysy odčítán, jelikož lze s určitostí tvrditi, že vápník pochází z *původního*, později pseudomorfovaného *nerostu horninového*. Jsouť všechny okolní horniny — jílovité břidlice — *vápence téměř prosty* a jest tudíž infiltrace vápencem z hornin okolních vyloučena. Jest ovšem možno připustiti, že snad část vápníku byla relativně nahromaděna v analysovaném vzorku z okolních partií aplitových a tím že byl podmíněn neobyčejně vysoký podíl Ca v analyse (srovnej sloupec III.).

Dále je z analysy patrna poměrně značná *kyselost horniny* a velmi patrná převaha *Na* nad *K*. Osannovy hodnoty vypočítané ze sloupce III. jsou velmi pozoruhodné, odůvodňujíce též mnou volený název *diabasového aplitu* proti staršímu názvu „*minetta*“, neboť naše hornina má proti minettám značně vyšší s (= 63·76) (s *minett* pohybuje se asi od 53—59).[12] Vedle toho minetty bývají oproti naší hornině poměrně bohatší na *dvojmocné prvky*, mezi alkaliemi pak buď převládá u nich *K* nad Na, nebo převaha *Na* jest nepatrná. Charakter naší horniny vyplývá z vyšší hodnoty c a n a z nižší hodnoty f oproti minettám. Též u *kyselejších kersantitů*, jejichž s blíží se s *diabasového aplitu z Housiny*,[13] shledáváme vesměs daleko nižší hodnoty pro CaO, vyšší pro Al_2O_3, FeO, MgO. Též K_2O u *kersantitů* vykazuje podstatně vyšší hodnoty, nežli shledáváme u našeho diab. aplitu jenž poměrem *Na : K rozhodně se blíží horninám alkalickým.*

Osannovy hodnoty SAl F, Al C Alk. rovněž poukazují na odlišný ráz našeho aplitu vzhledem k lamprofyrům a potvrzují jeho poněkud výlučné postavení vůbec. Nápadný jest totiž poměr *Al C Alk = 10, 14, 6*, v němž *Ca* silně převládá. Srovnáme-li však horninu naši s hodnotami uvedenými v kritické práci Osannově,[14] shledáme, že horniny s takto převládajícím vápníkem jsou skoro vesměs *značně basičtější* a *femičtější.* Totéž vidíme na tab. V. citované práce, kde jest naznačena *vzájemná závislost hodnot S Al F* a *AlC Alk.* Projekční bod naší horniny v trojice Al C Alk padne tam, kde jsou umístěny horniny mající S Al F = 15·5, 2·5, 12. Uvedená zvláštnost může míti do jisté míry příčinu svoji v okolnosti dříve již vytčené, že totiž v analysovaném vzorku se nahromadilo *více pseudomorfos vápencových,* čímž pravý obraz původní chemické skladby této horniny byl poněkud skreslen. Přes to kdybychom i odečtli část *Ca,* byl by podíl vápníku v hornině stále ještě vysoký a zůstal by charakteristickým znakem horniny, jež i tím poukazuje na blízkou příbuznost s diabasy.

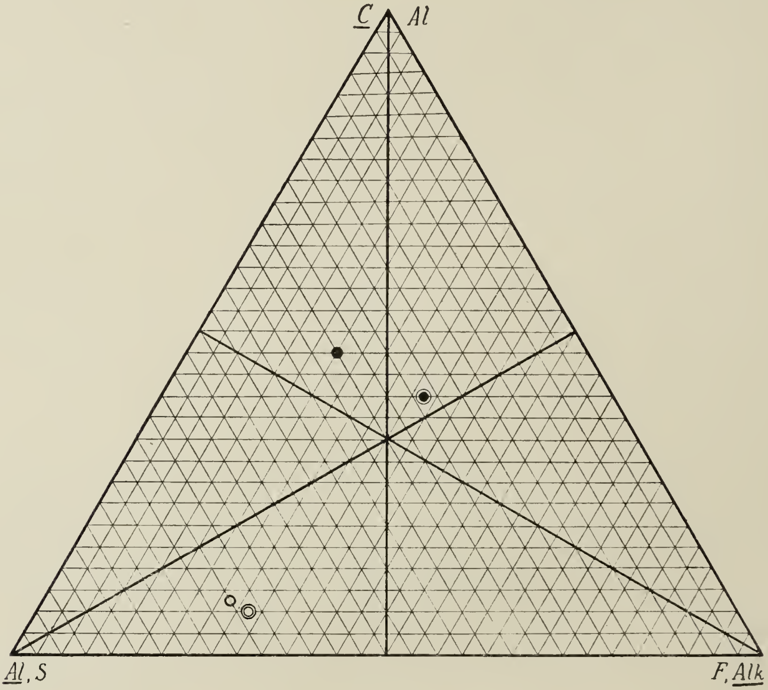
---

[12] Srovnej A. Osann: Versuch einer chem. Classification der Eruptivgesteine. III. Tscherm. Min. u. petr. Mit. XXI. 1902.

[13] l. c. 12. str. 440, anal. 119, 120, 122, 125.

[14] Petrochemische Untersuchungen I. 1913 str. 112—114, Abhandlungen der Heidelberger Ak. d. Wissensch. 2.

Zaneseme-li hodnoty horniny housinské do Osannovy projekce (srovnej obr. č. 2) *S Al F,* padne projekční bod její k *dolním hranicím pole* do blízkosti typických hornin *alkalických.* Též na projekčním poli v trojúhelníku *Al C Alk* umístí se bod diabasového aplitu housinského v úseku hornin *výslovně alkalických* v místech *leucitických a nefelinických basaltů.*



Obr. 2.

Těmto hodnotám v Osannových projekcích odpovídá též v hornině zjištěný *obsah anorthoklasu,* jenž řadí housinský aplit mezi horniny *alkalické* i po stránce *mineralogické.* Jest tudíž zajisté odůvodněn názor, podepřený i *geologickým postavením horniny,* že *housinský diabasový aplit, geneticky náleží k magmatu diabasovému,* jehož jest *kyselou* a *alkalickou odštěpeninou.* Z toho důvodu pokládám název *diabasový aplit,* třeba neobvyklý, za *nejpřiléhavější,* poněvadž vystihuje vedle *mineralogických znaků horniny* též její *sloh, alkalickou povahu* a *sounáležitost genetickou k diabasům.*

Myšlenku, že *diabasy českého siluru* jsou povahy *alkalické,* vyslovil již Mácha ve své práci o diabasu od *Hodkoviček*[15]). Žel, že není po ruce

---

[15]) Srovnej: B. Mácha. O žilných horninách od Záběhlic a diabasu od Hodkoviček. Věstník král. č. spol. náuk XIII. 1900.

analys, jež by tuto doměnku potvrdily. Bude záhodno v tom směru znalosti naše o silurských diabasech doplniti, a není pochyby, že podrobnou diskussí osvětlen bude poměr jejich ku *starším eruptivním celkům* (keratofyrům) i *mladšímu vulkanismu hlubinnému* (žulám). Též poměr diabasů k různým lamprofyrům podobným žilám našeho siluru bude nutno náležitě osvětliti.

Ke konci připomínám, že *kontaktní rohovec housinského aplitu* byl analysován a studován spolu s neproměněnými jílovitými břidlicemi V. Veselým, k jehož práci odkazuji.[16])

Resumé.

Výsledky práce lze shrnout v těchto větách:

1. Hornina ze stráně *Housiny* u *Lažoviček* blíže *Zdic* jest *ložní žilou,* která jest zřetelně konkordantně uložena v břidlicích králodvorských d ζ spodního siluru, kontaktně přeměňujíc *své nadloží.* Jelikož žíla byla vrásněna v době *variské* a intrudovala v době po usazení *spodního siluru,* spadá doba její intruse pravděpodobně do *svrchního siluru.* Pokládám pak diabasový aplit housinský za *alkalickou a kyselou* odštěpeninu *diabasového magmatu* silurského vulkanismu.

2. Hornina jest slohu jemně zrnitého místy porfyrovitého s přechodem do barvy šedé, po zvětrání žluté až hnědé. Obsahuje tyto součástky *podstatné*: *biotit, živce* a *pseudomorfosy* (patrně po pyroxenu); *vedlejší*: *křemen, apatit* a *rudy.*

3. *Biotit* tvoří celkem idiomorfně omezené lupénky různých velikostí. Začal se vytvářet nejdříve ze součástek podstatných, perioda jeho vzniku potrvala však delší dobu. V biotitu jest zarostlá ruda, uložená většinou do destiček rovnoběžných s (001) biotitu. Biotit je částečně pseudomorfován *klinochlorem,* při čemž přeměnu tu možno snad z části přičísti i změnám v hornině samé během tuhnutí. Část pseudomorfos vápencových a chloritových náleží však *minerálu jinému* (pyroxenu).

4. *Živce* náleží několika generacím. Nejstarší zakalená individua *živcová* mají složení *oligoklasalbitu.* Tato byla později *korrodována* a korrodované zbytky byly isomorfně obrůstány čirým *oligoklasem.* Zajímavo jest, že *jádra těchto vrostlic jsou kyselejší obrub.* Současně s okraji živcových vrostlic krystalisovaly hypidiomorfně omezené *anorthoklasy,* průřezů kosočtverečných, vesměs čiré. Tmelící hmota mezi jednotlivými vrostlicemi tvořena jest allotriomorfně omezeným zakaleným *oligoklasem.*

5. *Křemen* tvoří řídce allotriomorfně omezená zrna. *Apatit* v dlouhých jehličkách jest spolu s částí *rud* nejstarší částí horniny. Ruda náleží většinou *ilmenitu,* částečně pyritu.

---

[16]) V. Veselý: O kontaktech diabasu se sedimenty středočeského siluru. Čas. Musea 1921. Praha.

6. Z analysy horniny vyplývá její *leukokratnost* a *alkalická povaha*. Značný podíl H_2O a CO_2 jest patrně způsoben nahromaděním pseudomorfos vápencových a chloritických. Pozoruhodný jest veliký podíl *Ca* v hornině, dále neobyčejná převaha *Na* nad *K*. Hornina byla dříve nazývána *minettou*, avšak minetty bývají basičtější a *K* spíše u nich převládá nad *Na*. Poměr *Al C Alk* i poměr *S Al F* svědčí též pro *alkalickou povahu horniny* pro příbuznost její s diabasovým magmatem, jehož jest kyselou a alkalickou odštěpeninou. Tímto vztahem jest též dobře odůvodněno mnou volené pojmenování „*diabasový aplit*", naznačující též výstižně geologickou závislost naší horniny na diabasech.

* * *

Ku konci vzdávám upřímný dík panu prof. Dru. V. Rosickému, pod jehož vedením jsem vykonal tuto práci, za jeho neobyčejnou práci a obětavost, s níž se mi věnoval. Rovněž děkuji panu inž. doktoru J. Šplíchalovi za ochotu, s níž mi provedl analysu horniny.

Petrografický výzkum horniny byl proveden v roce 1919.

V Praze, v březnu 1921.

Mineralogicko-petrografický ústav
university Karlovy v Praze.

Vysvětlivky k obrázkům v textu.

Obr. 1., str. 2. Šikmo šrafováno = $d\zeta$, svisle šrafováno = $e\alpha$, černě = diabasový aplit, kroužkováno = štěrky, tečkováno = hlína a ssuť, bíle = alluvium.

Obr. 2., str. 10. Osannova projekce diabasového aplitu housinského a minetty od Strašnic. Kroužek jednoduchý = *S Al F* diabasového aplitu; kroužek dvojitý = táž hodnota minetty; kroužek plný = *Al C Alk* aplitu; kroužek plný dvojitý táž hodnota minetty.

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 23.

O trilineárních systémech čar na ploše a projektivní aplikaci ploch.

Napsal Dr. **Eduard Čech.**

Předloženo dne 15. dubna 1921.

1. Analytickou basi našich úvah tvoří pět pojednání Wilczynského: „Projective differential geometry of curved surfaces (Trans. Amer. Math. Soc., roč. 8—12, 1907—1911).1)

Buď dána nerozvinutelná plocha S_y systémem diferenciálních rovnic v kanonickém tvaru2)

$$\begin{aligned} y_{uu} + 2\,b\,y_v + f\,y &= 0, \\ y_{vv} + 2\,a'\,y_u + g\,y &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

tak, že základní semikovarianty3) jsou

$$z = y_u,\ \varrho = y_v,\ \sigma = y_{uv}. \tag{2}$$

Buď τ daná funkce u, v. Výraz

$$\vartheta = z + \tau\,\varrho \tag{3}$$

znamená pak pro pevná u, v bod P_ϑ,4) ležící v tečné rovině plochy S_y v P_y, takže přímka $P_y P_\vartheta$ jest tečnou S_y v P_y. Měníme-li u, v, máme takto v každém bodě plochy S_y stanovenu určitou tečnu, čímž jest na S_y definována soustava ∞^1 (C_ϑ) křivek C_ϑ. Budeme hledati oskulační rovinu křivky C_ϑ v P_y. Z rovnic (1), (2) plyne

$$z_u = -f\,y - 2\,b\,\varrho,\ z_v = \sigma,\ \varrho_u = \sigma,\ \varrho_v = -g\,y - 2\,a'\,z. \tag{4}$$

Zvětšíme-li u a v o nekonečně malé hodnoty δu, δv, přejde y, ϑ v $y + \delta y$, $\vartheta + \delta\vartheta$, kde

$$\begin{aligned} \delta y &= y_u\,\delta u + y_v\,\delta v = \delta u\,z + \delta v\,\vartheta, \\ \delta\vartheta &= (\tau_u\,\delta u + \tau_v\,\delta v)\,\varrho + z_u\,\delta u + z_v\,\delta v + \tau\,(\varrho_u\,\delta u + \varrho_v\,\delta v), \end{aligned} \tag{5}$$

---

1) Budu je krátce citovati M_1, M_2, ...

2) M_1, § 5.

3) M_1, § 6.

4) M_2, § 1.

čili dle (4)

$$\begin{aligned}\delta\,\vartheta = -(\delta\,u + \tau\,\delta\,v)\,y - 2\,\tau\,\delta\,v\,.\,a'\,z + \\ (\tau_u\,\delta\,u + \tau_v\,\delta\,v - 2\,\delta\,u\,.\,b)\,\varrho + (\tau\,\delta\,u + \delta\,v)\,\sigma.\end{aligned} \tag{6}$$

Bod $P_{\vartheta + \delta\vartheta}$ leží na tečně v $P_{y+\delta y}$ ku příslušné křivce soustavy (C_ϑ). Volíme-li však $\delta\,u$, $\delta\,v$ tak, aby $P_{y+\delta y}$ byl bod soumezný s P_y na C_ϑ, bude $P_{\vartheta + \delta\vartheta}$ patrně bod oskulační roviny křivky C_ϑ v P_y. Porovnáním rovnic (3) a (5) dostaneme, že v tomto případě jest klásti $\delta\,v = \tau\,\delta\,u$. Dosadíme-li do (6), obdržíme

$$\delta\,\vartheta = -(\delta\,u + \tau\,\delta\,v)\,y + \vartheta'\,\delta\,u,$$

kde

$$\vartheta' = -2\,\tau^2\,a'\,z + (\tau_u + \tau\,\tau_v - 2\,b)\,\varrho + 2\,\tau\,\sigma, \tag{7}$$

a také bod $P_{\vartheta'}$ náleží hledané oskulační rovině. Jsou-li x_1, x_2, x_3, x_4 bodové souřadnice pro souřadný tetraedr $P_y\,P_z\,P_\varrho\,P_\sigma$[1]), mají body P_y, P_ϑ $P_{\vartheta'}$, resp. souřadnice

$$P_y\,(1,\,0,\,0,\,0)\,;\;P_\vartheta\,(0,\,1,\,\tau,\,0)\,;$$
$$P_{\vartheta'}\,(0,\,-2\,\tau^2\,a',\;\tau_u + \tau\,\tau_v - 2\,b,\;2\,\tau)$$

a hledaná rovnice oskulační roviny křivky C_ϑ v P_y jest

$$2\,\tau^2\,x_2 - 2\,\tau\,x_3 + (\tau_u + \tau\,\tau_v - 2\,b + 2\,\tau^3\,a')\,x_4 = 0. \tag{8}$$

Poznamenejme ještě toto: Je-li v funkcí u podél C_ϑ, jest

$$\frac{d\,v}{d\,u} = \tau,\; \frac{d^2\,v}{d\,u^2} = \tau_u + \tau\,\tau_v.$$

2. Jsou-li $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $y^{(4)}$ čtyři lineárně nezávislá řešení systému (1), označme $\bar{y}^{(1)}$, $\bar{y}^{(2)}$, $\bar{y}^{(3)}$, $\bar{y}^{(4)}$ minory matice

$$\left\Vert \begin{matrix} y^{(1)} & y^{(2)} & y^{(3)} & y^{(4)} \\ y_u^{(1)} & y_u^{(2)} & y_u^{(3)} & y_u^{(4)} \\ y_v^{(1)} & y_v^{(2)} & y_v^{(3)} & y_v^{(4)} \end{matrix} \right\Vert .$$

$\bar{y}^{(i)}$ jsou pak souřadnice tečné roviny plochy S_y v P_y. V rovinových souřadnicích jest tedy S_y definována systémem[2])

$$\begin{aligned}\bar{y}_{uu} - 2\,b\,\bar{y}_v + (f + 2\,b_v)\,\bar{y} = 0,\\ \bar{y}_{vv} - 2\,a'\,\bar{y}_u + (g + 2\,a'_u)\,\bar{y} = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Základní kovarianty systému (9) jsou

$$\bar{y},\; \bar{z} = \bar{y}_u,\; \bar{\varrho} = \bar{y}_v,\; \bar{\sigma} = \bar{y}_{uv}. \tag{10}$$

Stejně jako výraz $x_1\,y + x_2\,z + x_3\,\varrho + x_4\,\sigma$, kde $x_1 \ldots x_4$ jsou funkce u, v, znamená pro každé (u, v) bod, znamená výraz $\xi_1\,\bar{y} + \xi_2\,\bar{z} + \xi_3\,\bar{\varrho} + \xi_4\,\bar{\sigma}$

---

[1]) M_2, § 1.

[2]) M_1, § 8. Rovnice $\bar{f} = f$, $\bar{g} = g$ l. c. (str. 259) jsou zřejmě nesprávné a mají zníti $\bar{f} = f + 2\,b_v$, $\bar{g} = g + 2\,a'_u$. Naproti tomu jest $\bar{h} = h$, $\bar{k} = k$, jsou-li h, k, *invarianty* (M_1, str. 250, rovn. (50)).

pro každé (u, v) rovinu, specielně jsou $\bar{y}, \bar{z}, \bar{\varrho}, \bar{\sigma}$ roviny souřadné tohoto nového lokálního systému souřadnic. Jaká je souvislost mezi souřadnicemi x_i a souřadnicemi $\bar{\xi}_i$? Snadno se zjistí, že minory matice

$$\left\| \begin{matrix} y^{(1)} & y^{(2)} & y^{(3)} & y^{(4)} \\ z^{(1)} & z^{(2)} & z^{(3)} & z^{(4)} \\ \varrho^{(1)} & \varrho^{(2)} & \varrho^{(3)} & \varrho^{(4)} \\ \sigma^{(1)} & \sigma^{(2)} & \sigma^{(3)} & \sigma^{(4)} \end{matrix} \right\| \tag{11}$$

tvoří matici (adjungovanou)

$$\left\| \begin{matrix} \bar{\sigma}^{(1)} - 4\,a'\,b\,\bar{y}^{(1)} & \bar{\sigma}^{(2)} - 4\,a'\,b\,\bar{y}^{(2)} & \bar{\sigma}^{(3)} - 4\,a'\,b\,\bar{y}^{(3)} & \bar{\sigma}^{(4)} - 4\,a'\,b\,\bar{y}^{(4)} \\ -\bar{\varrho}^{(1)} & -\bar{\varrho}^{(2)} & -\bar{\varrho}^{(3)} & -\bar{\varrho}^{(4)} \\ -\bar{z}^{(1)} & -\bar{z}^{(2)} & -\bar{z}^{(3)} & -\bar{z}^{(4)} \\ \bar{y}^{(1)} & \bar{y}^{(2)} & \bar{y}^{(3)} & \bar{y}^{(4)} \end{matrix} \right\| . \tag{12}$$

Z toho však následuje bezprostředně, že platí, jsou-li $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ rovinové souřadnice příslušné k bodovým x_i, t. j. takové, že $\Sigma\, x_i\, \xi_i = 0$ je podmínka incidence,

$$\bar{\xi}_1 = -4\,a'\,b\,\xi_1 + \xi_4,\ \bar{\xi}_2 = -\xi_3,\ \bar{\xi}_3 = -\xi_2,\ \bar{\xi}_4 = \xi_1. \tag{13}$$

Geometricky můžeme tuto souvislost takto vyjádřiti: Polární rovinou bodu $x_1\,y + x_2\,z + x_3\,\varrho + x_4\,\sigma$ vzhledem ke kvadrice

$$x_1\,x_4 - x_2\,x_3 + 2\,a'\,b\,x_4^2,$$

t. j. vzhledem k Licově kvadrice bodu P_y[1]) jest rovina $x_1\,\bar{y} + x_2\,\bar{z} + x_3\,\bar{\varrho} + x_4\,\bar{\sigma}$. Tato poznámka může býti leckdy užitečná.

3. Na základě předchozího shledáváme, že rovina spojující $P_y\,P_\sigma$ s tím bodem na $P_z\,P_\varrho$, který spolu s bodem P_ϑ dělí $P_z\,P_\varrho$ harmonicky, je dána výrazem

$$\bar{\vartheta} = \bar{y}_u + \tau\,\bar{y}_v. \tag{14}$$

Buď Γ_ϑ rozvinutelná plocha, opsaná ploše S_y podél C_ϑ. Pak obdržíme rovnici bodu vratu na té vytvořující přímce Γ_ϑ, jež jde bodem P_y, jednoduše tím, že v (8) místo $x_1, x_2, x_3, x_4, a', b$ píšeme $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, \bar{\xi}_4, -a', -b$. Zavedeme-li ještě ξ_i substitucí (13), bude rovnice tohoto bodu

$$-2\,\tau^2\,\xi_3 + 2\,\tau\,\xi_2 + [\tau_u + \tau\,\tau_v + 2\,b - 2\,\tau^3\,a']\,\xi_1 = 0. \tag{15}$$

Klademe-li nyní místo τ jiné libovolné funkce u, v: τ', τ'', obdržíme další dvě soustavy ∞^1 křivek, $(C_{\vartheta'})$, $(C_{\vartheta''})$. Definujme nyní: Soustavy (C_ϑ), $(C_{\vartheta'})$, $(C_{\vartheta''})$ tvoří *trilineární systém,* když 1. žádné dvě z nich nejsou identické, 2. žádná z nich neskládá se z křivek asymptotických,[2]) 3. *v každém bodě plochy oskulační roviny křivek C_ϑ, $C_{\vartheta'}$, $C_{\vartheta''}$ jím jdoucích procházejí touž přímkou;* 4. *body vratu rozvinutelných ploch Γ_ϑ, $\Gamma_{\vartheta'}$, $\Gamma_{\vartheta''}$ dotýkajících*

---

[1]) M_2, § 2, rovn. (11). Wilczynski nazývá Licovu kvadriku osculating hyperboloid.

[2]) Vyloučené případy jsou triviální.

se S_y podél C_ϑ, $C_{\vartheta'}$, $C_{\vartheta''}$ leží na téže přímce. Rovnice (8), (15) podávají ihned podmínky pro trilineární systém

$$\begin{aligned} | \tau^2,\ \tau,\ b - \tau^3 a' \, | &= 0, \\ | \tau^2,\ \tau,\ \tau_u + \tau \, \tau_v \, | &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

kde levé strany jsou determinanty, v nichž pouze prvý řádek jest vypsán. K nim přistupuje nerovnost $\tau\,\tau'\,\tau'' \, | \tau^2, \tau, 1 \, | \neq 0$, která dovoluje prvou z těchto podmínek nahraditi jednodušší podmínkou

$$\tau\,\tau'\,\tau''\,a' - b = 0. \tag{16}$$

Pro $a' = b = 0$ jest S_y kvadrika¹) a rovnice (16) je splněna identicky. Tento případ vyloučíme. Pro $a' = 0$, $b \neq 0$ (i pro $a' \neq 0$, $b = 0$) je plocha S_y zborcená²) a trilineární systémy neexistují. Můžeme tedy předpokládati $a'\,b \neq 0$. Rovnice (16) pak praví: Trojice tečen ke křivkám trilineárního systému v každém bodě plochy náleží (kubické) dvojmocné involuci tečen apolárních s tečnami, konjugovanými s tečnami Darboux-Segreovými.²) Neboť pro Darboux-Segreovy tečny jest³)

$$\tau^3 a' + b = 0. \tag{17}$$

Dle podmínky (16) jsou τ, τ', τ'' kořeny kubické rovnice

$$\tau^3 + r\,\tau^2 + s\,\tau - \frac{b}{a'} = 0. \tag{18}$$

Pro r, s obdržíme pak snadným výpočtem podmínku

$$\begin{aligned} &2\,t\,(3\,r\,t - s^2)\,r_v - 3\,t\,(3\,t + r\,s)\,(r_u + s_v) \\ &+ 2\,t\,(3\,s + r^2)\,(s_u + t_v) + (5\,s^2 + 5\,r^2\,s - 6\,r\,t)\,t_u = 0 \quad \left(t = -\frac{b}{a'}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

4. Podmínka (16) jest patrně splněna, jsou-li (C_ϑ), $(C_{\vartheta'})$, $(C_{\vartheta''})$ tři soustavy čar konjugovaných s čarami Darboux-Segreovými, neboť pak jest

$$\tau = P,\ \tau' = \omega P,\ \tau'' = \omega^2 P,\ P = \sqrt[3]{\frac{b}{a'}},\ \omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

Podmínka (15) jest v tomto případě

$$| \tau^2,\ \tau,\ \tau_u + \tau\,\tau_v \, | = P^3 \begin{vmatrix} 1, & 1, & P_u + P\,P_v \\ \omega^2, & \omega, & \omega\,P_u + \omega^2\,P\,P_v \\ \omega, & \omega^2, & \omega^2\,P_u + \omega\,P\,P_v \end{vmatrix} = 0$$

a je tudíž také splněna; máme tedy výsledek: *Na každé nepřímkové ploše*

---

¹) M_1, str. 260.

²) Tato podmínka jest tedy, jak ukazuje snadná úvaha, pouhý korolár věty, kterou jsem odvodil v pojednání „O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru" „Časopis", roč. 50, str. 219 a n., v části I, odst. 7, vztahujeme-li ji na transformaci Σ_{-3}. Viz též odst. 2. tamtéž; tam zmíněná involuce I_2^3 jest konjugovaná s naší involucí (16).

³) M_5, § 1, a M_2, § 6, rovn. (99). Wilczynski užívá Darbouxova názvu tangentes à osculation quadrique.

tvoří čáry konjugované s čarami Darboux-Segreovými trilineární systém. Rovnice tří oskulačních rovin jsou v tomto případě dle (9)

$$
\begin{aligned}
&2\,P^2\,x_2 - 2\,P\,x_3 + (P_u + P\,P_v)\,x_4 = 0,\\
&2\,\omega^2 P^2\,x_2 - 2\,\omega\,P\,x_3 + (\omega\,P_u + \omega^2\,P\,P_v)\,x_4 = 0,\\
&2\,\omega\,P^2\,x_2 - 2\,\omega^2\,P\,x_3 + (\omega^2\,P_u + \omega\,P\,P_v)\,x_4 = 0.
\end{aligned}
$$

Procházejí tedy vskutku touž přímkou l, jejíž rovnice jsou

$$6\,a'\,b\,x_2 + (a'\,b_v - a'_v\,b)\,x_4,\quad 6\,a'\,b\,x_3 - (a'\,b_u - a'_u\,b)\,x_4 = 0. \tag{20}$$

Stejně nalezneme z (15) pro přímku l', na níž leží tři body vratu,

$$6\,a'\,b\,\xi_3 - (a'\,b_v - a'_v\,b)\,\xi_1 = 0,\quad 6\,a'\,b\,\xi_2 + (a'\,b_u - a'_u\,b)\,\xi_1 = 0. \tag{21}$$

Přímky l, l' jsou ovšem reciproké poláry vzhledem k Licově kvadrice. Položme si otázku: *Pro jaké plochy splynou naše přímky l, l' s Wilczynského řídícími přímkami d, d'*, t. j. s řídícími přímkami lineární kongruence společné oskulačním lineárním komplexům obou asymptotických čar v každém bodě P_y? Obdržíme podmínky¹)

$$2\,a'\,b_v + a'_v\,b = 2\,a'_u\,b + a'\,b_u = 0,$$

čili

$$\frac{\partial}{\partial v}\,a'\,b^2 = \frac{\partial}{\partial u}\,a'^2\,b = 0. \tag{22}$$

Avšak z toho plyne,²) že lze substitucí $\overline{u} = \alpha\,(u)$, $\overline{v} = \beta\,(v)$ docíliti $a' = b = 1$. Diferenciální rovnice Darboux-Segreových čar jest potom $d\,\overline{u}^3 + d\,\overline{v}^3 = 0$. *Žádaná vlastnost jest tedy charakteristická pro plochy, vyšetřované Wilczynskim,*³) připouštějící grupu projektivních transformací o dvou parametrech.

5. Z rovnic (15), (16) můžeme bez jakéhokoli počtu vyčísti větu: *Nutná a postačující podmínka, aby v korespondenci mezi dvěma* (*nepřímkovými*) *plochami S_y, S_η každému trilineárnímu systému na jedné příslušel trilineární systém na druhé, jest, aby si v této korespondenci odpovídaly čáry Darboux-Segreovy* (*všech tří soustav*). Neboť především musí involuci (16) odpovídati analogická involuce tečen S_η a tedy řečená podmínka jest nutná. Že však také stačí, vysvítá z fakta, že *rovnice* (15) *neobsahuje koeficientů diferenciálního systému* (1). Také platí: Jsou-li S_y, S_η tak na sebe zobrazeny, že si odpovídají křivky asymptotické (obou soustav) a *jednomu* trilineárnímu systému odpovídá stejný, pak *každému* trilineárnímu systému odpovídá trilineární systém. Jsou-li vůbec dvě plochy S_y, S_η na sebe zobrazeny tak, že si odpovídají oboje čáry asymptotické a je-li S_y dána systémem (1), jest S_η dána systémem téhož tvaru

$$
\begin{aligned}
&\eta_{uu} + 2\,\beta\,\eta_v + \varphi\,\eta = 0,\\
&\eta_{vv} + 2\,\alpha'\,\eta_u + \gamma\,\eta = 0;
\end{aligned}
\tag{23}
$$

---

¹) Porovnáním naší rovnice (18) s rovnicemi (70^b) v M_2, str. 95.

²) M_1, str. 250, rovn. (51) a (52).

³) Wilczynski, On a certain set of self-projective surfaces, Trans. Amer. M. S., vol. 14, str. 421—443.

při tom si odpovídají body příslušné týmž hodnotám (u, v). Naše podmínka jest vyjádřena rovnicí

$$\frac{b}{a'} = \frac{\beta}{\alpha'}. \tag{24}$$

Ptejme se nyní: *Jaké jsou podmínky pro takové zobrazení dvou nerozvinutelných ploch S_y, S_η, aby si odpovídaly oboje čáry asymptotické a aby v každém páru odpovídajících si bodů tvořily oskulační roviny odpovídajících si křivek dva kolineární trsy?* Ukáže se, že tyto podmínky mají za důsledek vlastnost duální a tedy i podmínku (24), t. j. korespondenci čar Darboux-Segreových. Z rovnice (8) nalezneme, jsou-li $(0, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ souřadnice roviny trsu P_y vztažené na tetraedr $P_y P_z P_\varrho P_\sigma$ a $(0, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4)$ analogické souřadnice příslušné roviny trsu P_η,

$$\begin{aligned} \lambda \xi_2 &= \tau^2, & \lambda' \xi'_2 &= \tau^2, \\ \lambda \xi_3 &= -\tau, & \lambda' \xi'_3 &= -\tau, \\ \lambda \xi_4 &= \bar{\tau} - 2b + 2\tau^3 a', & \lambda' \xi'_4 &= \bar{\tau} - 2\beta + 2\tau^3 \bar{a}', \end{aligned}$$

a tedy po vyloučení τ, $\bar{\tau}$

$$\begin{aligned} \mu \xi'_2 &= \xi^2_2 \xi_3, \\ \mu \xi'_3 &= \xi_2 \xi_3^2, \\ \mu \xi'_4 &= \xi_2 \xi_3 \xi_4 - 2(\beta - b)\xi_3^8 - 2(\alpha' - a')\xi_2^3. \end{aligned} \tag{25}$$

Obecně, t. j. je-li pouze ta podmínka splněna, že si odpovídají asymptotické čáry obou soustav, jest (25) *kubická* Cremonova transformace; redukuje se na *kvadratickou*, je-li *jedna* z veličin $\alpha' - a'$, $\beta - b$ rovna nule, specielně jsou-li obě plochy zborcené a vytvořující přímky si odpovídají; a konečně na *kolineaci*, je-li

$$\alpha' = a', \quad \beta = b. \tag{26}$$

Rovnice (26) mají vskutku za důsledek rovnici (24). Jest však velmi snadno poznati, že v případě, kdy rovnice (26) jsou splněny, jest korespondence mezi S_y a S_η *projektivní aplikace* definovaná Fubinim, t. j., jsou-li P_y, P_η odpovídající si body, že možno S_η nahraditi kolineární plochou S'_η tak, že příslušné si čáry ploch S_y, S'_η v P_y mají styk druhého řádu.¹) Vidíme, že *i na základě Wilczynského teorie můžeme zcela dobře studovati projektivní aplikaci.* Zejména: *Ty z invariantů Wilczynského teorie, které závisejí pouze na a', b a jejich derivacích (ne na f, g), nemění se při projektivní aplikaci.*

Připomeňme ještě, že nejen projektivní aplikace, ale i obecnější transformace, hovící pouze podmínce (24), není možná mezi libovolně předepsaným párem ploch.

---

¹) Stačí provésti takovou kolineaci, jež vede k tetraedru $P_y P_z P_\varrho P_\sigma$ od analogického tetraedru plochy S_η, jak plyne z rovnic v M_2, str. 100, následujících po rovnici (83) pro $a' b = 0$ a z rovnic (13) v M_3, str. 296, pro plochy zborcené. Pojednání, v němž Fubini zavedl projektivní aplikaci, jest Applicabilità proiettiva di due superficie (Palermo Rendiconti, sv. 41, 1916).

Nová měření antimonitu příbramského.

Podává

B. Ježek v Příbrami.

Se 4 obr. v textu.

(Předloženo dne 6. května 1921.)

Český antimonit byl goniometricky studován pouze jednou Jarošem r. 1907 a výsledky měření uveřejněny v těchto Rozpravách.[1]) Jaroš měřil plochami velmi chudý antimonit milešovský a pak bohatší antimonit příbramský, pocházející vesměs z Bohutína.

V této zprávě uvádím měření poměrně vzácných krystalů antimonitu příbramského, jež náležejí všechny starším nálezům bohutínským.

Celkem bylo tu následujících 21 tvarů:

b (010) $0\,\infty$, a (100) $\infty\,0$, h (310) $3\,\infty$, n (210) $2\,\infty$, m (110) ∞, χ (250) $\infty\,\frac{5}{2}$, q (130) $\infty\,3$, z (101) 10, s (113) $\frac{1}{3}$, p (111) 1, δ (4. 5. 12) $\frac{1}{3}\,\frac{5}{12}$, τ (343) $1\,\frac{4}{3}$, Γ_1 (236) $\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}$, e (123) $\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}$, $\mathfrak{f}$ (263) $\frac{2}{3}\,2$, ψ (146) $\frac{1}{6}\,\frac{2}{3}$, * (293) $\frac{2}{3}\,3$, * (4. 3. 16) $\frac{1}{4}\,\frac{3}{16}$, α (434) $1\,\frac{3}{4}$, * (2. 1. 12) $\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}$, σ (213) $\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}$.

Pyramidy označené hvězdičkou * jsou nové. Nedávám jim zatím signatury, poněvadž jednak pokračuji ve studiu antimonitu z nalezišť jiných a uvedu vhodnou signaturu po ukončení práce té, jednak jsou to tvary vzácné, jejichž signování nemám za příliš důležité, zejména u nerostu s tak bohatou řadou krystalovou jako antimonit, u něhož jsou již všechny jednoduché signatury dávno zadány.[2])

V pásmu vertikálním měřil jsem všechny tvary Jarošovy, z pyramid již z Příbramě známých, jen e (123), ψ (146) a novou Jarošovu brachypyramidu Γ_1 (236). Nenalezl jsem na svém materiálu nových Jarošových $\mathfrak{x}_1$ (15. 20. 12), $\mathfrak{H}_1$ (1. 2. 12) a ψ_1 (4. 17. 27), za to však makrodoma z, obě nejčastější pyramidy řady základní *s*, *p*, dále ještě pět pyramid již známých a konečně tři další nové vzácné. Celkem bylo zakončení mých krystalů mnohem bohatší než zakončení příbramského antimonitu poprve měřeného.

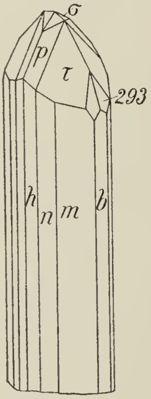
---

[1]) Zd. Jaroš, Příspěvek k morfologii antimonitu českého. Rozpr. Čes. Akad. Třída II., XVI, čís. 14.

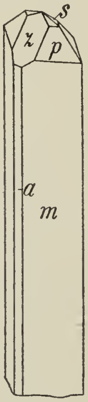
[2]) Pyramidu (293) $\frac{2}{3}\,3$ nalezl zatím již O. Neff na antimonitu z Baia Sprie a signoval ji $x^{\bullet}$ (293). — O. Neff, Über Antimonit von Felsöbanya. Goldschmidt's Beitr. zur Kryst. u. Min. 1916.

Měřené krystaly byly ze dvou kusů sbírky Vys. školy příbramské a z jedné skupiny krystalů ze sbírky prof. Osvalda. Antimonit tento jest jako každý habitu sloupcového až jehličkovitého a jeví u krystalů z každého z těchto tří vzorků zvláštní ráz daný jejich zakončením.

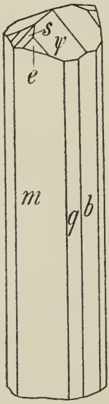
I. Antimonit ze sbírky Vys. školy báňské, Bohutín, čís. 382. Ve skleněné nádobce uloženy jsou větší i menší, až 4 *cm* dlouhé úlomky krystalů většinou zprohýbané a kolénkovitě ohnuté. Mezi úlomky nalezeny byly dva tence jehličkovité s plochami terminálními. Ráz těchto krystalů charakterisují pyramidy příkřejší a největší plochy zakončení náležejí pyramidě *τ*.



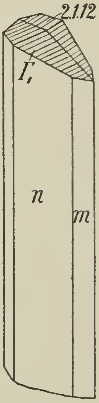
Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.



Obr. 4.

Celkem nalezeny tu tvary:

b (010), *h* (310), *n* (210), *m* (110), *p* (111), *τ* (343), 𝔣 (263), * (293) *α* (434), *σ* (213).

Oba měřené krystalky byly zakončeny:

Čís. 1.: *τ*, *σ*, *p*, * (293); obr. 1.
Čís. 2.: *τ*, *σ*, *p*, * (293), *α*.

Nová příkrá brachypyramida * (293) $\frac{2}{3}$ 3 byla nalezena na obou krystalech pěti plochami sice drobnými ale ostře ohraničenými a velmi dobře reflektujícími, a mám ji proto za tvar jistý ale celkem vzácný. Dána jest svými posičními úhly, které s vypočtenými dobře souhlasí:

	φ		ϱ		Počet
	měř.:	vyp.:	měř.:	vyp.:	ploch:
* (293)	12° 29′	12° 37′	72° 21′	72° 16½′	5

II. Skupina větších krystalů na konci ulámaných ze sbírky Vys. školy příbramské, Bohutín, čís. 383. Do dutin čněly vzácně krystalky terminálně zakončené, jichž bylo měřeno 8. Ráz zakončení všech krystalků z této skupiny jest opět stejný, plochami chudý s převládající pyramidou základní *p* nebo brachypyramidou τ a s makrodomatem *z*. Obr. 2. Pro tento druhý ráz jest nejcharakterističtější makrodoma *z* (101), jež nikdy neschází. Jinak bývá tu rozsáhlá pyramida základní *p* (111) nebo brachypyramida τ (343), drobnými plochami též *s* (113) a σ (213).

Pásmo vertikální bývá obyčejně plochami chudé, nejčastěji vyniká jen hranol základní *m* (110) a makropinakoid *a* (100). V tom případu reflektovaly tyto plochy vždy znamenitě. Celkem pozoroval jsem na krystalech tohoto rázu následující tvary:

a (100), *m* (110), *h* (310), *n* (210), *q* (130), χ (250), *z* (101), *p* (111), *s* (113), τ (343), σ (213).

Měřené krystaly byly zakončeny:

Čís. 3. a 4.: *z*, *p*, *s*. Obr. 2.
Čís. 5. a 6.: *z*, *p*, τ.
Čís. 7. a 8.: *z*, τ, σ.
Čís. 9.: *z*, *p*, *s*, τ.
Čís. 10.: *z*, τ.

III. Krystaly získané ze soukromé sbírky prof. Osvalda. Měřeny byly 4 krystalky mající opět zakončení stejného rázu charakterisované nízkými pyramidami. Byly ze všech měřených plochami nejbohatší:

b (010), *n* (210), *m* (110), *q* (130), *s* (113), *p* (111), δ (4. 5. 12). τ (343), Γ_1 (236), *e* (123), ψ (146), * (4. 3. 16), * (2. 1. 12).

Měřené krystalky byly zakončeny následujícími tvary:

Čís. 11.: ψ, *e*, *s*. Obr. 3.
Čís. 12.: *s*, ψ, *e*, *p*, τ, δ.
Čís. 13.: *s*, ψ, *e*, * (4. 3. 16).
Čís. 14.: Γ_1, * (2. 1. 12). Obr. 4.

Dvě nové pyramidy, jež mám sice za tvary jisté ale velmi vzácné, byly dány následujícím měřením:

	φ		ϱ		Počet
	měř.:	vyp.:	měř.:	vyp.:	ploch:
* (2. 1. 12)	$63^0\,50'$	$63^0\,36'$	$20^0\,45'$	$20^0\,53'$	2
* (4. 3. 16)	$53^0\,14'$	$53^0\,20'$	$23^0\,5'$	$23^0\,5'$	3

Zajímavý jest krystal čís. 14, zakončený pouze čtyřmi plochami dvou velmi nízkých pyramid; dvě plochy mnohem rozsáhlejší náležejí Jarošově brachypyramidě Γ_1 a jsou vyvinuty plochami (236) a $(\bar{2}36)$, dvě užší patří nové ještě nižší makropyramidě * (2. 1. 12) a jsou tu vyvinuty plochami $(2.\,\bar{1}.\,12)$ a $(\bar{2}.\,\bar{1}.\,12)$. Všechny čtyři plochy jsou velmi jemně ale docela zřetelně rýhovány dle směru jednoho páru svých kombinačních hran. Obr. 4.

Antimonit.

Čís. 1—4 Jaroš 1907; čís. 5—7 Ježek 1921.

Čís.	Sign.	Gdt.	Miller	φ	ϱ	ξ_0	η_0	ξ	η	x	y	d
1	$\mathfrak{x}_1$	$\frac{5}{4}\ \frac{5}{3}$	15.20.12	37° 04	61° 48·	52° 02	59° 29	33° 03	46° 13	1·2814	1·6964	2·1259
2	Γ_1	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$	236	33 53	31 31	18 52·	26 58·	16 56·	25 43	0·3418	0·5089	0·6132
3	$\mathfrak{H}_1$	$\frac{1}{12}\ \frac{1}{6}$	1.2.12	26 44	10 44·	4 52·	9 37	4 47·	9 35	0·0853	0·1696	0·1897
4	ψ_1	$\frac{4}{27}\ \frac{17}{27}$	4.17.27	13 08·	33 21	8 30·	32 39	7 11·	32 22	0·1496	0·6408	0·6581
5	*	$\frac{2}{3}\ 3$	293	12 37	72 16·	34 21	71 52	12 07	68 21	0·6836	0·3054	3·1290
6	**	$\frac{1}{4}\ \frac{3}{16}$	4.3.16	53 20	23 05	18 52·	14 17	18 20	13 32·	0·3418	0·2533	0·4262
7	***	$\frac{1}{6}\ \frac{1}{12}$	2.1.12	63 36	20 53	18 52·	9 37·	18 37	9 07	0·3418	0·1696	0·3815

K otázce „Vltavského zlomu“.

Napsal

Alois Matějka v Praze.

(Předloženo dne 6. května 1921.)

V základních svých pracích o tektonice středočeského staršího paleozoika rozlišili jak známo J. Krejčí, K. Feistmantel a R. Helmhacker celkem trojí druh tektonických linií. Jsou to především dislokace směru sv—jz, pak mladší poruchy směru přibližně k prvnímu systému kolmého, tedy sz—jv, a konečně zlomy směru severojižního. Novější práce zabývající se studiem tektoniky Barrandienu, potvrzují vesměs toto rozdělení tektonických linií do tří kategorií, jež stanovili starší badatelé, ač zároveň ukazují, že stavba jeho daleko není tak jednoduchá, jak zdálo by se snad vyplývati z fakta, že poruchy jím prostupující probíhají celkem třemi směry.

Pokud se týče specielně poruch *směru severojižního,* jest zajímavo, že Krejčí, Helmhacker a Feistmantel nezmiňují se o tom, jaké pohyby podle nich se udály, nýbrž poukazují pouze na to, že směrem jejich probíhají jisté části vodních toků ve středních Čechách, a vytýkají tedy pouze jejich důležitost pro vývoj vodní sítě Barrandienu. Za největší zlom tohoto systému pokládají pak tektonickou linii, podle níž řídí se Vltava severně a jižně od Prahy, a podle ní nazvali pak i celý systém severojižních poruch v Barrandienu vystupujících *soustavou zlomů vltavských.*

Přímo v terénu *„zlomu vltavského“* tito badatelé ovšem nezjistili, neboť ve vysvětlivkách ku geologické mapě okolí pražského výslovně uvádějí, že soustava zlomů severojižních vůbec málo je odkryta a tak soudí na jeho existenci hlavně jen podle morfologického rázu vltavského údolí, jehož přímočarost nedovedli si vysvětliti jinak než tektonicky. Směrem severojižní dislokace řídí se podle nich Vltava mezi *Vraným* a

Prahou, a pak mezi *Podbabou* a *Roztoky*.[1] Mezi *Hodkovičkami* a *Vyšehradem*, u *Zlíchova* a na *Letné* v Praze vyskytující se menší pukliny směru přibližně severojižního pokládají za podružné poruchy provázející hlavní poruchu, která má býti ukryta přímo v řečišti vltavském. Pokud se týče geologického jejího stáří, usuzují, že vltavská soustava zlomů je mladší středočeských uloženin mladopaleozoických, neboť i tam jsou poruchy směru severojižního, avšak starší útvaru křídového, neboť křídová tabule transgreduje přes tyto vrstvy aniž by těmito poruchami směru S—J byla porušována.

Od let osmdesátých až do doby nedávné nemění se na těchto starších názorech ničeho a většina geologů přijímá prostě názor Krejčího a jeho spolupracovníků, jiní pak jej poněkud doplňují. Klvaňa[2]) uvádí pro existenci vltavského zlomu severně od Prahy ten důvod, že žíly intrusivních vyvřelin algonkiem prostupujících nepřestupují na druhý břeh, a pak nestejný počet žil na obou březích zdá se mu nasvědčovati tektonické poruše. Katzer[3]) ve své geologii Čech domnívá se, že poruchy směru severojižního, k nimž zařazuje vltavský zlom, tvoří jakousi přechodní soustavu poruch mezi systémem tektonických linií směru rudohorského a sudetského, a klade vznik jeho do doby pokřídové. Důvodu pro své tvrzení však neuvádí. Počta[4]) v geologické studii o půdě města Prahy vysvětluje přítomností vltavského zlomu přetržení středního pruhu drabovských křemenců *d δ* v místě, kde přestupuje tento Vltavu. Ostatní uvádějí většinou názor o vltavském zlomu beze změny. Jsou to hlavně J. V. Daneš,[5]) J. N. Woldřich,[6]) F. Počta,[7]) K. Schneider[8]) a jiní.

Teprve v době nejnovější po rozsáhlých mapovacích pracích ve středních Čechách je zřejmo, že dislokace severojižního směru v Barrandienu nenáležejí jednomu systému poruchovému, nýbrž že máme tu co činiti s několika skupinami, jak stářím tak jakostí pohybu, jež se podle nich udály, odlišnými, a dále se ukazuje, že *názor o existenci zlomu vltavského je nadále neudržitelný*.

Studiem oblasti vltavského toku mezi *Vraným* a *Zbraslaví* zabýval se R. Kettner.[9]) V prvních pracech týkajících se tohoto území sice vysvětluje přetržení diabasových a porfyrových žil a závistského přesmyku jižně od *Závisti* jako následek severojižní poruchy probíhající tu vltavským údolím, avšak po definitivním ukončení geologických prací v této krajině upouští od tohoto výkladu a dospívá k názoru, že přerušování to je zpusobováno v Barrandienu obvyklými poruchami příčnými směru sz—jv.[10])

---

[1]) Krejčí — Helmhacker: Vysvětlivky ku geol. mapě pražského okolí. Archiv pro přír. výzkum Čech 1885.

Krejčí — Feistmantel: Orografický a geotektonický přehled území silurského ve stř. Čechách. Tamtéž 1890.

[2]) Klvaňa: Údolí Vltavské mezi Prahou a Kralupy. Tamtéž 1893.

[3]) Katzer: Geologie von Böhmen 1892.

[4]) Počta: Der Boden der Stadt Prag. Sitzungsb. d. k. böhm. Gesell. d. Wissensch. 1904.

[5]) Daneš: Morfologický vývoj středních Čech. Sborník čes. spol. zem. 1913.

[6]) J. N. Woldřich: Geologie. III. díl. 1905.

[7]) Počta: Stručný přehled geologie Čech.

[8]) Schneider: Zur Orographie u. Morphologie Böhmens. Praha 1908.

[9]) Kettner: O terasách vltavských mezi Svatojanskými proudy a Zbraslaví. Sborník čes. spol. zeměvědné 1913.

Týž: Ein Beitrag zur Kenntnis der geologischen Verhältnisse der Umgebung von Königsaal. Verhandl. d. gel. Reichsanstalt Wien 1914.

Týž: O lakkolitových intrusích porfyrů mezi Mniškem a Vltavou. Rozpr. Č. Akad. XXIII.

V části vltavského toku mezi *Zbraslaví* a *Prahou* rovněž není dokladů pro to, že by vltavské údolí sledovalo směr severojižní poruchy. Ostatně tu ani údolí vltavské samo nemá vždy směru S—J. Mezi *Závistí* a *Hodkovičkami* je existence tektonické poruchy, jež by probíhala údolím řeky, naprosto vyloučena, neboť spodnosilurská pásma *d* ε a *d* ζ i vrstvy svrchnosilurské přestupují s jednoho břehu Vltavy na druhý buď zcela neporušeně, anebo jest posun jejich způsobován příčnými poruchami směru sz—jv. V souhlasu s tím přestupují i směrné přesmyky, jež podmiňují tu vznik „*kolonií*", s jednoho břehu na druhý většinou neporušeně.

Od *Hodkoviček* až k *Vyšehradu* teče Vltava směrem SSV—JJZ, a proráží tu mimo jiné zvláště vzdornými vápenci svrchnosilurskými a devonskými. Nejlepším důkazem, že není třeba předpokládati tu vltavský zlom, je místo u Bráníka, kde bránické vápence *g* α přestupují zcela neporušeně na pravý břeh budujíce bránickou skálu. Teprve východně od ní probíhá porucha směru *ssz—jjv*, která odděluje vápence bránické od vrstev silurských. Tuto poruchu sleduje pak Vltava ve svém toku až k ústí údolí *Radlického*. Proražení erosí poměrně vzdorných vrstev událo se tu vlivem morfologických podmínek vývoje vltavského údolí v době mezi prvou a druhou terasou diluviální.[11])

V části vltavského toku severojižního směru v *Praze samé* rovněž není duvodu pro existenci severojižní poruchy. Tomu svědčí i údaj Počtův ve výše již zmíněné práci,[12]) kde píše: „Die süd-nördliche Richtung des Flusses bis in die Mitte der Stadt . . . . ist in einem Bruche gelegen. Wie bekannt, konnte Krejčí im mittelböhmischen silurischen Bassin dreierlei Bruchrichtungen erkennen und einer von diesen, von S nach N hinziehenden, verläuft die Moldau. Diese Bruchspalte hat den südlichen Quarzitzug gar nicht, den mittleren jedoch ziemlich bedeutend gestört, denn in demselben dürfte die Ursache zu suchen sein, dass die östliche Partie des mittleren Quarzitzuges durch Verwerfung um etwa 200 *m* südlicher zu liegen kam als die westliche . . . ." Je zřejmo, že toto porušení středního pruhu drabovských křemenců *d* δ jest i zde zpusobeno příčnou poruchou směru sz—jv, následkem čehož jižní pruh není dislokován v místech, kde přestupuje Vltavu, jak by tomu bylo při poruše směru severojižního.

V části údolí mezi *Karlínem* a *Starou Libní* použila Vltava rovněž příčného zlomu směru sz—jv, jenž vystupuje zřejmě v spodnosilurských vrstvách u *Kobylis*, a nikoliv zlomu severojižního rovněž Počtou odtud uváděného.

---

[10]) Kettner: Über die Eruptionsfolge u. die gebirgsbildenden Phasen etc. Jahrb. d. geol. Reichsanstalt Wien 1917. Též dle jeho ústního sdělení.

[11]) Viz Kodym-Matějka: Geologicko-morfologický příspěvek k poznání štěrků a vývoje říčních toků ve stř. Čechách. Sborník čes. spol. zem. 1920.

[12]) l. c. 4) str. 30 a 31.

Pokud se týče vltavského údolí mezi *Podbabou* a *Roztoky*, ani tu není důvodu pro existenci tektonické poruchy. Nestejný počet intrusivních vyvřelin na březích vltavských nelze vysvětliti tím, že by tu byla vyvinuta nějaká porucha. Ani okolnost, že většina žil nepřestupuje s jednoho břehu na druhý, nesvědčí tektonickému výkladu vltavského údolí mezi *Podbabou* a *Roztoky*, uvážíme-li, že mocnost jejich je poměrně nepatrná a délka jejich většinou tak malá, že při směru jejich, který není kolmý na směr toku řeky, nýbrž svírá s ním větší nebo menší úhel, je téměř vyloučeno, že by mohly některé z nich přesahovati s jednoho břehu na druhý. Rovněž při detailním mapování této krajiny nebylo získáno důkazu pro existenci vltavského zlomu v těchto místech, naopak v údolí vltavském mezi *Klecánkami* a *Husincem*, kde ve stráni by musil býti odkryt jeho výchoz, žádná větší severojižní porucha zjištěna nebyla. Přímočarý tok řeky *není tu tedy tektonický*, nýbrž nutno hledati pro jeho výklad vysvětlení jiné — *morfologické*. V době nejstaršího diluvia tekla tu Vltava po odnesení křídových vrstev po transgresní ploše křídové, a neerodovala v algonkickém podkladu. Teprve při oživené erosivní činnosti na počátku středního diluvia prořízla se štěrkovými nánosy I. terasy a vyhloubila si nové úzké řečiště v praekambrických břidlicích a drobách, bez ohledu na směr vrstev. Jest tedy vltavské údolí v těchto místech vznikem svým *epigenetické*.

Z uvedených fakt vyplývá zřejmě, že *vltavské údolí severně a jižně od Prahy není nikde založeno na tektonické linii severojižního směru* a dlužno tedy názor o existenci vltavského zlomu pokládati za vyvrácený.

* * *

Pokud se týče ostatních *severojižních*[13]) *dislokací* v Barrandienu, jež Krejčí, Helmhacker a K. Feistmantel zařazovali v soustavu zlomů vltavských, je dnes zřejmo, že jedná se tu o tektonické linie, jež jednak podle svého relativního stáří, jednak podle povahy pohybů, jež dle nich nastaly, nemohou býti shrnovány v jediný systém poruchový.

Nejstaršími z nich jsou menší poruchy směru severojižního nebo nepatrně odchylného lokálně omezené na brachysynklinální uzavírání pánve Barrandienu v *Hlubočepech* a *Přídolí*, nazvané Kodymem *poruchami točivými*. Vznikem svým spadají do doby, kdy z původních synklinál a antiklinál vznikaly brachyantiklinály a brachysynklinály, čili na počátek druhé fáze vrásnění variského.[14])

---

[13]) Některé z těchto poruch nemají přesně směru severojižního, nýbrž uchylují se poněkud buď k východu nebo k západu.

[14]) Kodym: Tektonická studie v údolí Prokopském a jeho okolí u Prahy. Rozpravy Č. Akad. XXVII č. 6.

Týž: Předběžná zpráva o účincích druhé fáze variského vrásnění v Barandienu. Rozpravy Č. Akad. XXVIII č. 7.

Týž: Tektonika staršího paelozoika v okolí Slivence, zejména v Přídolí, jižně od Prahy. Rozpravy Č. Akad. XXIX č. 25.

Do druhé skupiny náležejí některé *dislokace příčné,* jež svým směrem v některých případech značně blíží se směru severojižnímu. Jsou mladší než zmíněné poruchy a pohyby dle nich nastavší jsou tytéž jako u ostatních poruch příčných; naproti příčným poruchám obvyklého směru SZ—JV jsou celkem vzácné.

Konečně známe severojižní poruchy vyskytující se zvláště v *širším okolí příbramském.* Severně od *Příbramě* kreslí je na přehledné geologické mapce příbramského okolí již Pošepný,[15]) a nověji dokázány byly Kettnerem[16]) při geologickém mapování Příbramska v počtu daleko hojnějším. Kromě těchto severojižních poruch příbramských vyskytují se tu a tam v Barrandienu ojediněle severojižní zlomy na př. u *Sv. Ivana* u *Karlova Týna,* severozápadně od *Zdic,* kde zjištěna mohutná severojižní porucha při důlních pracích na *Hroudě,* mezi *Babou* a *Hřebeny,* a jinde. Pokud se týče jejich stáří, je dosud nejisto, zda náleží ještě do doby vrásnění variského, či zda nutno je aspoň částečně již čítati k zlomům povariským. Podle některých z nich nastaly pohyby poklesné, a je možno, že náleží k onomu systému tektonických linií, jenž dislokuje vrstvy našich středočeských mladopaleozoických pánví uhelných. Definitivní rozřešení této otázky nutno tu ovšem ponechati dalším výzkumům.

* * *

Jak bylo již výše uvedeno, zařadil Katzer *„vltavský zlom“* mezi poruchy stáří *pokřídového.* Částečně přejal jeho názor Dědina, který ve svých studiích o morfologickém vývoji české tabule křídové klade vznik tohoto Katzerova systému dislokací do mladšího pleistocénu,[17]) a nazývá je poruchami *vltavsko-jizerskými.*

Tektonika křídového útvaru v středních Čechách jest dosud málo prozkoumána, ale přes to již nyní se ukazuje, že není jednoduchá, a že vyskytují se tu poruchy různých směrů a odlišného stáří. Výzkum jejich je však zvláště v širším okolí pražském značně stížen jednak tím, že nutno tu bráti v úvahu nerovnosti předkřídového terénu, jež způsobují, že stratigraficky si odpovídající vrstvy křídové transgredují v různých výškách, jednak tím, že vrstvy křídové v některých oblastech podlehly úplnému odnosu, v jiných pak poskytují tak málo příhodných odkryvů, že nalézti poruchy jimi prostupující, je velice nesnadno. Přes to je zřejmo, že *ani pro existenci pokřídového zlomu, jenž by probíhal vltavským údolím, není dokladů. Jižně od Prahy* jest přítomnost jeho vyloučena. Jest sice zajímavo, že přímo v pražském okolí vých a záp. od Prahy jest transgressní plocha křídových vrstev na levém břehu Vltavy v údolí šáreckém a na pravém mezi *Kobylisy* a *Prosekem* v různé výši, ale vysvětlení tohoto zjevu není nikterak třeba hledati v přítomnosti poruchové linie pokřídového stáří, jež by tu probíhala vltavským údolím. Příčiny tohoto zjevu jsou hlavně dvě. Předně jedná se tu o primární výškový rozdíl, který existoval již v době tvoření se našich nejstarších uloženin křídových, a který způsoben byl nerovností předkřídového terénu, jenž na levém břehu Vltavy byl vyšší než na pravém. Tomu nasvědčuje i nestejná mocnost vrstev I. pásma v *údolí šáreckém* a v okolí *Proseka*. Sladkovodní uloženiny křídové nestačily k vyrovnání tohoto rozdílu, ač značně jej zmírnily, takže rozdíl mezi výškami mořské transgresse vrstev korycanských je značně menší (asi o polovinu), než rozdíl mezi transgressními výškami vrstev pásma I. Druhou příčinou je přítomnost celé řady *pokřídových poklesů*, podle nichž nastaly poklesy ker východnějších proti západním. Tyto zlomy zjištěny byly v nejnovější době jednak na levém břehu Vltavy severových. od *Břevnova*, jednak v okolí *Proseka* severně od *Vysočan*. Směr jejich není severojižní, nýbrž blíží se značně směru příčných poruch variského stáří v Barrandienu. Jest zřejmo, že ani pro pokřídový zlom vltavský není důvodů, čemuž zase nasvědčuje mimo zmíněné již důvody i ta okolnost, že v příznivém odkryvu mezi *Klecánkami* a *Husincem* výchoz jeho nebyl zjištěn, ač při jeho existenci v příznivém tamějším odkryvu byla by vyloučena možnost jeho přehlédnutí.

---

[15]) Pošepný: Über die Adinolen von Příbram i. Böhmen. Tschermaks min. u. petrogr. Mitth. 1888.

[16] Podle ústního sdělení.

[17]) Dědina. Příspěvek k poznání morfologického vývoje české tabule křídové Rozpravy Č. Akad. XXIII č. 45.

Jest tedy existence pokřídové poruchy směru vltavského vyloučena. Následkem toho jest nesprávno užívati pro pokřídové poruchy směru přibližně severojižního názvu *zlomy vltavské.*

Z fakt uvedených v této práci vyplývá, že existenci *vltavského zlomu stáří předkřídového nutno pokládati za vyvrácenu.*

Pokud se týče ostatních severojižních, předkřídových poruch v Barrandienu, *nelze jich spojovati v jediný systém,* jak činili staří badatelé, kteří jej nazývali soustavou zlomů vltavských, neboť vyskytují se tu poruchy jak svým stářím, tak jakostí pohybů, jež se dle nich udály, naprosto rozdílné.

Není důvodů pro existenci tektonické linie pokřídového stáří, jež by probíhala údolím vltavským a měla směr přibližně severojižní a nelze tedy pro příště nazývati pokřídové poruchy směru severojižního, nebo tomuto značně sblíženého poruchami vltavskými.

Geologický ústav
českého vysokého učeni technického v Praze.

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 26.

Silvestr Prát:

Isolace hub z vosích hnízd.

Se 4 obr. v textu.

(Práce z ústavu pro fysiologii rostlin Karlovy university.)

(Předloženo dne 3. června 1921.)

V březnu r. 1919 mně pan profesor Dr. B. Němec dal k isolaci hub vosí hnízdo, jehož papírovité obaly byly všude proniknuty jednak myceliem, jednak temnými houbovými sporami. Nejprve jsem provedl orientační pokusy o možnosti růstu hyf a klíčivosti spor. Malé kousky papírovité hmoty z hnízda byly přeneseny do sterilisovaných Petriho misek jednak s vodou, jednak s 2% roztokem saccharosy. Již po 24—48 hodinách bylo možno lupou na okraji papíru pozorovati bělavé štětičky a chomáčky, jež po 2—3 dnech byly patrné i prostým okem. Ve vodě obyčejně dále nerostly, ale v cukerných roztocích (různých koncentrací, 1—20% saccharosy) se po několika dnech tekutina černavě kalila a po delší době bylo celé dno baňky pokryto čirou, černavě zkalenou kompaktní huspeninou. Tento sliz byl povahy uhlohydrátové a reakce na pentosy byly positivní.

22. VII. 1919 byla Erlenmayerova baňka s 3½% roztokem saccharosy v káranské vodě naočkována kouskem papírovitého obalu. 15. V. 1920 byly v temném kompaktním slizu jednotlivé temné spory a černá vlákna. S kousky této huspeniny byly provedeny reakce.

α naftol — H_2SO_4 — slabě růžově, růžově, purpurově, temně purpurově (neprůhledně), fialově, modrofialově;
thymol — H_2SO_4 — oranžově, po chvíli třešňově;
floroglucin — HCl — po zahřátí krásně velmi intensivě purpurově, rychle se tvořila hnědá sraženina;
orcin — HCl — oranžově, purpurově, pak červenohnědá sraženina;
resorcin — HCl — (1: 1) — jen růžově, teprve po chvíli temnější sraženina; tato reakce je pozoruhodná z toho důvodu, že kultivační tekutina, jež nebyla z mycelia vypírána, by musila dávati ihned mnohem intensivnější reakci na fruktosu; pravděpodobně tedy značná část této saccharosové komponenty byla houbou rozložena.;
vanillin — HCl — oranžově do hněda, pak světle hnědě.

Mikroskopicky byla ve slizu pozorována různá světlá i hnědá až černavá houbová vlákna, spletené hyfy a různé spory.

Další kultury z těchto orientačních a často opakovaných pokusů jsem získal jednak odočkováním na živné agarové půdy do zkumavek, jednak litím desek. Obě methody vedly k isolaci dvou druhů hub, jež se konstantně objevovaly a opakovaly ve všech kulturách a byly získány při všech opakovaných isolacích. Vedle nich se dvakráte objevil Mucor, jednou Verticillium a několikráte Aspergillus. Tyto se mohly do kultur dostati infekcí druhotnou (ze vzduchu při očkování), ale i byly-li jejich spory již v původních vosích hnízdech, bylo patrně jejich vyskytování ojedinělé a náhodné, vedle toho neodpovídaly černým sporám a myceliím v papírovitém obalu hnízd pozorovaným. Že temné hyfy a spory v dřevěných vláknech obalu hnízda náležely oněm dvěma druhům hub — Dematium a Alternaria — ukazuje jejich konstantní objevování a černání jejich mycelia i spor vedle přímých pozorování klíčení ve visutých kapkách a pokusů kultur na celulose a dřevě, o nichž bude zmínka dále.

Na deskách, jež obyčejně byly lity z černavého zákalu spor objevivšího se ve zředěných roztocích cukrových asi za týden až 14 dní po naočkování kousku papírovitého obalu, se záhy objevovaly kolonie obou druhů hub a daly se od sebe dobře rozeznati. Nejprve bude popsáno Dematium a jeho chování v kulturách, pak Alternaria.

Dematiaceae se vyznačují temným zabarvením hyf i spor; jejich utváření mycelia i výtrusů neobyčejně variruje podle vnějších podmínek a kulturního substrátu.

Jako příklad isolace byl vybrán jeden pokus:

Mycelium vyklíčené ve 2% cukru bylo 15. III. 1919 naočkováno na filtrační papír v misce s 2% cukrem (kultura A). Nejprve rostlo velice pomalu, po 14 dnech byl roztok zkalen spoustou 1—2buněčných spor rozptýlených v hojném slizu; pak zůstával vzhled kultury nezměněn. Po odočkování do zkumavek, misek nebo lití desek rostly vedle sebe oba zmíněné druhy hub. V červnu plovalo v původní kultuře dlouhé, tenké, větvité mycelium s hojnými kapičkami tuku; odštěpovalo maličké kvasinkovité spory. Na dekoktu smrkových pilin i na sladinkovém agaru klíčily spory hned druhého dne v dlouhé řídké mycelium, identické s myceliem vypěstovaným ze spor, které se vytvořily ve 20% cukru naočkovaném přímo ze zmíněné kultury A. 12. VII. byly spory z kultury A rozity do desek (Liebig-saccharosa), 13. VII. klíčily, 14. VII. už rostly malé kulaté kolonie; 15. VII. dosti veliké kolonie měly slizký povrch ze spousty podlouhlých, kvasinkovitých spor; některé kolonie již černaly, některé byly růžové, většina však leskle bílá. Na zároveň litých deskách s 20% cukr-agarem (bez přidání dusíku) byly kolonie menší, růst pomalejší, spory často žádné nebo jen v malých skupinkách; proto také povrch kolonií nebyl kompaktní a lesklý, nýbrž šedavě-bílý se zřetelnými jednotlivými vlákny. Asi po týdnu až 14 dnech počínaly kolonie od středu černati; temné zbarvení se šířilo pomalu až k okraji, takže konečně vyrostlé kolonie byly celé temné. Někdy bylo možno pozorovati též střídání světlejších a temnějších koncentrických pásků.

Z bílých slizkých povlaků spor vyrostlých na Liebig-saccharose byly 21. VII. (9 dní po naočkování) lity desky, aby mohl býti srovnán růst na různých substrátech:

21. VII. lity desky:	22. VII.	25. VII.	27. VII.
dekokt smrku	klíčí, zprohýbané mycelium	kvasinkovité spory	
sladinka	vesměs klíčí; nevětvené, hodně zprohýbané mycelium	kruhovité kolonie se sliznatým středem; hojně kvasinkovitých spor na krátkých nosičích nebo pučí přímo z hyf	kolonie širší ½ *cm*
Liebig-saccharosa	mycelium hned odškrcuje nové spory nebo samotné spory bez klíčení v hyfy přímo pučí	drobné, větvité, velmi husté kolonie; husté chomáče spor na krátkých nosičích	kolonie asi ½ *cm*

Pro srovnání nality též desky z kultury A:

dekokt smrku		drobné kruhovité kolonie, úzké mycelium, maličké spory	dlouhé řídké mycelium
sladinka		kruhovité kolonie se sliznatým středem	kolonie šir. asi 1 *cm*

24. VII. byly lity desky na:	26. VII.	28. VII.	1. VIII.
20% cukr:	drobné kolonie (asi 1 *mm*), větvité mycelium s množstvím kvasinkovitých spor	kolonie asi 2 *mm*, větvité mycelium, nové hyfy tvoří mnohem méně spor	podobně
dekokt smrku	tenké hyfy	drobné kolonie, rozvětvené hyfy, dosti spor	podobně
Mayer-pepton-saccharosa	drobné paprsčité kolonie (2 *mm*) s hustými skupinami spor	paprsčité kolonie s množstvím spor	podobně
sladinka	drobné kruhovité kolonie, větvité mycelium, lesklý sliz	podobně	počíná černati

Liebig-saccharosa	podobně sladince	podobně	lesklé, sliznaté kolonie
škrob ½%	nepravidelně mycelium, sem tam spory	hyfy černají	
Liebig-pepton	husté kruhovité kolonie (asi 1 *mm*), tlusté hyfy, málo spor	kruhovité kolonie (asi ½ *cm*) silně sliznaté, bíle lesklé	podobně

Na Bezsonoffově koncentrovaném cukerném substrátu rostly spory velmi pomalu a často tvořily na skle (nebo na vloženém filtračním papíru) temný povlak ze samých černých spor s kratičkými bezbarvými hyfami. Po 2 měsících byly v povlaku jenom samé kvasinkovité, 1—2buněčné spory s množstvím tuku, velmi různé velikosti, hnědavé nebo bezbarvé. I po roce (27. V. 1920) byly v této kultuře jen světle hnědé spory vyplněné kapičkami tuku. Přeočkovány na kousky sterilisovaného bramboru, rostly spory špatně, tvořily lesklé povlaky kvasinkovitých výtrusů; bílé mycelium se jen na povrchu splétalo z bílých hyf, do pletiva nevnikalo (22. VII. 1919—15. V. 1920). Pletivo cukrovky však bylo úplně rozrušeno, světlé nebo temné hyfy se skupinami tmavých spor pronikaly celý řízek, cévy (neporušené) byly většinou isolovány a zachovány skoro jedině z celého pletiva.

Obr. 1.

Byl tedy způsob růstu a tvar hyf i vzhled mycelia a spor podle substrátu velmi různý. Temné spory z cukerných roztoků byly ponejvíce tvaru nepravidelně eliptického, kulovitého až vejčitého, jedno nebo dvoubuněčné s lesklými kapkami tuku. Velikosti byly různé: 20 × 8, 14 × 8, 16 × 8, 12 × 9, 10 × 8, 12 × 10 μ. V cukerných roztocích a na agaru s cukrem vyrostlé mycelium bylo velmi nepravidelné, hyfy nepravidelně rozvětvené, často tenké z dlouhých cylindrických buněk, s nimiž se střídaly jednotlivě nebo v řadách zcela nepravidelně nafouklé až kulovité zcela krátké buňky. Na všech půdách s cukrem se záhy objevovalo charakteristické černání kolonií.

Na půdách s dusíkem (s peptonem, s Liebigovým extraktem, na sladince) byl růst nápadně odchylný. Hyfy byly složeny z dosti pravidelných cylindrických buněk délky asi 8—25 μ, šířky 2—8 μ, naplněných kapičkami tuku. Na Liebig-peptonu vyrostlé hyfy byly složeny z buněk na přehrádkách silně zaškrcovaných. Lesklé kolonie byly celkem kruhovité, ale hyfy se ztrácely úplně ve sliznatém povlaku spousty spor tvaru kvasinkovitého, jež ve velmi hustých skupinách pučely buďto přímo z hyf nebo vyrůstaly ve stejně bohatých kulovitých chomáččích na krátkých (asi

10—25 μ dl.), od hlavních větví někdy ani přehrádkou neoddělených konidioforech. Černání kultur se objevovalo jen na půdách s cukrem (na sladince, na Liebig-saccharose), kolonie na substrátech bez cukru zůstávaly světlé.

Na dekoktu ze smrkových pilin vyrostlé mycelium mělo hyfy užší, spory menší na krátkých konidioforech nebo pučící přímo z hyf; ke konci se hyfy ztenčovaly a bez tvoření přehrádek hojně větvily. Někdy na agaru se smrkovým dekoktem vypučela spora v menší (asi o polovinu) dceřinnou buňku, z níž vyrůstalo velmi dlouhé, teničké, nečleněné vlákno nebo sám výtrus přímo se v takové vlákno prodlužoval.

Bezpečně jsem tento druh určiti nemohl, ba i co se týče určování rodu možno při určování podle Rabenhorsta kolísati mezi Dematium a Torula, ano i na Cladosporium některá stadia upomínají (dvoubuněčné spory — Phaeodidymae). Poněvadž nejenom vzhled, barva a velikost hyf, ale i konidioforů a spor se velmi mění podle kulturních podmínek (podle substrátu), není prozatím spolehlivé určení možné.

Druhá houba měla charakter mnohem konstantnější, hlavně se vyznačovala mnohobuněčnými „zďovitými" sporami, podle jejichž tvaru a uspořádání byla určena jako Alternaria. Byla vypěstována zcela konstantně při několikráte opakovaných isolacích z obalu velkého vosího hnízda od pana prof. Dr. B. Němce a z papírovitého obalu malého hnízda od Klatov (sbíral Dr. Jar. Hahn) i z voštiny malého bezobalného hnízda Polistes gallica Fab. (sbírala sl. Dr. M. Khomová). Její isolace a identifikace byla poměrně velmi snadná. Na př.: po vyklíčení ve 2 % cukru (od 17. V. 1919) byla malá část mycelia přenesena (20. V.) na 20% cukragar, kde rychle vyrostlo mycelium a již během týdne vytvořilo veliké spory, jež pro jistotu vyčistění rozlity v serii desek; nebo mohly býti lity desky přímo ze spor vytvořených v 2% cukru, v němž houby ze spor a hyf v naočkovaném materiálu klíčily. Obyčejně se zpočátku v obrysu kruhovité kolonie dosti rychle rozrůstaly, takže po nějaké době se i na dosti řídce vyseté desce jednotlivé kolonie spojovaly v souvislý celek. Hyfy se hojně větvily, ale rozrůstaly se celkem rovně, ne zprohýbaně. Ve zkumavkách (se sladinkou) odočkovaných z mycelia vyrostlého na cukrové desce z jedné spory rychle vyrostlo bílé mycelium, ale již 20. VII. střed počínal hnědnouti od dozrávajících spor, 21. VII. byl zelenavý, 22. VII. byla skoro celá vrstva agaru ve zkumavce potažena zelenavěhnědým, kožovitým povlakem. Ale i zcela mladé mycelium, netvořící ještě výtrusů, se mohlo od Dematia rozeznati rovnějším růstem hyf a pravidelnějším tvarem buněk. Po naočkování na čerstvý substrát spory obyčejně už po 24 hodinách byly jednostranně nebo na dvou i třech stranách sou-

Obr. 2.

časně vyklíčené a hyfy se hned začínaly větviti. Variabilitu v růstu, rychlosti tvoření a množství spor i jejich tvaru ukazuje pokus:

24. VII. byly lity desky ze spor:

	26. VII.	28. VII.	1. VIII.
20% cukr	kruhovité černavé kolonie (asi ½ *cm*) ojediněle spory	černavý povlak ze splývajících kolonií s hojnými řetízky spor	podobně
½% škrob	neklíčí	špatný růst	velmi řídký černavý povlak po celé desce
Liebig-saccharosa	nepravidelné kolonie se zelenavým středem, asi ½ *cm*, hojně rozvětvené hyfy	velké kruhovité kolonie rezavě nebo zelenohnědé, asi 1½ *cm*, řetízky spor	veliké, černavězelené kolonie splývají, ale dosud jednotlivé zřetelně omezené.
Mayer-pepton-saccharosa	kolonie asi ½ *cm*, tlusté, hojně větvené hyfy	černavé kruhovité kolonie (asi 1 *cm*) s řetízky spor	splývající kolonie, jednotlivé ale dosud rozeznatelny
sladinka	nepravidelné kolonie asi 1 *cm*, hyfy hojně rozvětvené	tmavě zelenavé, velké kolonie (asi 1 *cm*) se spoustou spor	kolonie splývají, ale dosud rozeznatelny
Liebig-pepton	hnědé kruhovité kolonie ½—1 *cm*, hyfy hojně rozvětvené	kruhovité hnědé kolonie, ½—1 *cm*, spory jen 1 až 3	podobně řídký povlak
dekokt smrku	kruhovité kolonie menší než ½ *cm*, hyfy hojně rozvětvené	kolonie ½ *cm*, černavé, s dlouhými řetízky spor	řídký, splývající, černavý povlak

Na 20% cukru a na dekoktu smrkových pilin vyrostlé mycelium bylo celkem stejně tlusté (1—6 μ), cylindrické buňky 3—8krát tak dlouhé jako široké, na přehrádkách nezaškrcované, s málo tuku.

V Liebig-saccharose vyrostlé mycelium bylo tlustší (5—8 μ), buňky poměrně kratší než v cukru a na přehrádkách zaškrcované; byly vyplněny drobnými kapičkami tuku. Na sladince vyrostlé mycelium bylo podobné, ale kapky tuku byly obyčejně značně větší, za to ovšem jich bylo méně. V Liebig-peptonu vyrostlé buňky — nejprve krátce cylindrické — se později skoro úplně zakulacovaly nebo se staly hranatě kulovitými; tuku měly málo v podobě velmi drobných kapek.

Velikost spor dosti kolísala, stejně jejich tvar a také počet buněk, z nichž sestávaly, byl dosti různý; na Liebig-saccharose na př. byly hyfy tloušťky 3—8 μ, buňky dlouhé asi 20, 30—50 μ a spory 65 × 14 μ (16 buněk), 41 × 12 μ (12 buněk), 25 × 16 μ (8 b.), 60 × 16 μ (15 b.), 64 × 16 μ (15 b.). Konidiofory z velmi krátce válcovitých buněk.

Na sladince (hyfy 3—8 μ) bylo vedle velmi dlouhých, úzkých spor hodně malých, skoro kulovitých. 16 × 12 μ (4 buňky), 20 × 12 μ (6 buněk), 12 × 12 μ (3 buňky), 40 × 12 μ (10 b.), 45 × 12 μ (10 b.), 65 × 16 μ (13 b.), 24 × 16 μ, 36 × 20 μ, 32 × 16 μ, 50 × 16 μ, 28 × 20 μ.

Na dekoktu smrku byly dlouhé spory často jen jednořadě bunečné, někdy až 8 buněk vedle sebe (jak je význačným znakem Phaeophragmieí proti Phaeodictyeím se zďovitými sporami). Někdy byla vyvinuta jedna podélná přehrádka nebo některé přehrádky šikmo, takže k typickým „zďovitým" sporám zde byly všechny přechody.

20. I. 1920 byla Alternaria z Liebig-saccharosy naočkována do 2% a 20% roztoku saccharosy v Erlenmayerových buňkách. 17. V. 1920 byl roztok růžový, na dně byla hnědavá huspenina. Světle hnědé hyfy s nezřetelnými příčnými přehrádkami měly po celé délce řadu tukových kuliček. Spory různé velikosti sestávaly z různého počtu buněk: 21 × 12 μ (7 buněk), 24 × 16 μ (6 b.), 33 × 12 μ (6 b.), 29 × 16 μ (9 b.), 25 × 16 μ (7 b.), 37 × 21 μ (11 b.), 28 × 24 μ (10 b.).

Na Bezsonoffově cukerném roztoku se tvořil rychle kožovitý, tlustý černý, na povrchu šedivý, nesmočitelný povlak z hyf s velmi různým tvarem buněk a velikými sporami. Na bramboru se rychle rozrůstalo bílé mycelium; do pletiva nevnikalo, jen na povrchu tvořilo pak kožovitý povlak šedivých hyf s intensivně hnědými sporami. U cukrovky však hyfy prorůstaly celé pletivo; světlé, dosti dlouze článkované hyfy tvořily mycelium rostoucí celkem rovně, ale často také hustě propletené a vyplňující všecko kromě isolovaných cév.

Obr. 3.

Podle Boasova rozdělení různých živin ve skupiny působící na vývoj mycelia a konidií různým směrem, patří určité živné roztoky v oddělení:

I. Mycelium roste rychle a také konidie se tvoří rychle a ve značném množství: saccharosa, (škrob), Mayer pepton-saccharosa, Liebig-saccharosa, sladinka.

II. Mycelium roste rychle, konidií se tvoří méně. Liebig-pepton.

III. Růst mycelia pomalý, tvoří se rychle množství konidií. (Sladinka).

IV. Růst mycelia i tvoření konidií zdržováno. (Škrob).

Také v Boasových pokusech s Aspergillem se na substrátech s maltosou (sladinka) tvořilo velmi mnoho konidií. U Dematia byly podobné poměry mezi růstem mycelia a tvořením spor. Roztoky chudé dusíkem (saccharosa, dekokt smrku) odpovídaly asi skupině I. až II., u roztoků s dusíkem (Mayer-pepton-saccharosa, sladinka, Liebig-saccharosa, Liebig-pepton) byl zřejmý nepoměr mezi řídkými hyfami a obalujícím je množstvím spor (skupina III.).

Spory seděly na konidioforech (mnohobuněčných) různé délky a tvořily pro Alternarii význačné řetízky, ale ne jednoduché, nýbrž často opětně rozvětvené, takže na konci konidioforů vznikaly celé nepravidelné, složené vějířky; sem tam byly jednotlivé mnohobuněčné spory nebo jejich skupiny odděleny krátkými vláknitými spojkami. Hnědá blána spor byla na povrchu hladká, ale často též jemně ostnitá nebo ježatá, nejčastěji jen drsná, vrásčitá. Již při přenášení na podložní sklíčko a tím spíše při vložení krycího sklíčka se řetízky rozpadaly v jednotlivé spory, takže je bylo možno pozorovati jen při přímém sledování desek.

Popis žádného Rabenhorstem uváděného druhu se úplně neshoduje, velikost hyf, spor a hlavně barva povlaků dosti kolísala podle živného substrátu. Z hub rostoucích podle Rabenhorsta na dřevě, kůře, větvích, papíře (Alternaria brevicolla Preuss, A. chartarum Preuss, A. tenuis Nees) se zdá nejpodobnější Alternaria tenuis Nees.

Obr. 4.

Aby byla dokázána přímá souvislost vyklíčeného mycelia a isolovaných hub se sporami a vytrvalými hyfami prorůstajícími papírovitý obal hnízd, byly malé kousky rozcupovány a roztřepány ve sterilisované vodě; jednotlivé drobné úlomky byly přeneseny do kapky zředěné sladinky na krycím sklíčku a pozorovány ve vlhkých komůrkách. Klíčení spor a vyrůstání mycelia mohlo býti docela dobře sledováno; malá kapka ovšem nedovolovala plného rozvoje, ale v řadě případů byla pozorována přímo z vlákna papíru vyrůstající vlákna Dematia a také vyklíčené mycelium Alternarie vytvořilo několik, ač málo a špatně vyvinutých spor.

Vedle toho byly provedeny pokusy s naočkováním obou hub na celulosní substrát. Vata, filtrační papír a smrkové piliny byly navlhčeny vodou, k níž bylo přidáno malé množství dusíku (asi 1‰ Liebigova extraktu) a po dvouhodinné sterilisaci byly 23. VII. a 4. VIII. 1919 na tyto substráty naočkovány obě houby z kultur na agaru se sladinkou (přeočkovaných 15. VII.).

Dematium (23. VII. 1919—15. V. 1920) tvořilo na vatě světlé, tenké hyfy a černé skupiny spor, na filtračním papíře šedohnědé nebo zcela světlé, článkované hyfy, jež sem tam měly kapku tuku; velmi zřídka jsem pozoroval případy, že mycelium vrůstalo dovnitř papírových vláken. V kulturách, v nichž byl filtrační papír polit roztokem 20% cukru, nebylo ani po době delší jednoho roku pozorováno vnikání hyf do vláken papíru. Na smrkových pilinách (4. VIII. 1919—15. VII. 1920) vyrostl papírovitý povlak ze světlých hyf, jež obsahovaly hodně tuku; buňky byly velmi nestejného tvaru, tenká vlákna z dlouhých cylindrických buněk byla často naduřelá v krátké kulovité buňky uložené buď jednotlivě nebo v řetízcích mezi dlouze válcovitými, tenkými buňkami.

Alternaria tvořila na vatě, papíře i pilinách temné mycelium i charakteristické spory. Na vatě se mycelium skládalo z temných a světlých hyf tvořených podlouhlými i kulovitými buňkami; tuku obsahovaly málo. Dosti světlé hyfy vrůstaly někdy dovnitř vatových vláken. Černých mnohobuněčných spor bylo na povrchu vatového chomáče dosti mnoho. Rovněž do vláken filtračního papíru vnikaly hyfy naplněné sem tam drobnými kapičkami tuku. A také v úlomcích smrkových pilin byly sem tam patrné do stěn vrostlé řady cylindrických buněk. Vzhled papírových a vatových vláken i dřevěných pilin se vrostlými hyfami byl mikroskopicky úplně stejný s vlákny a úlomky získanými roztřepáním papírovitého obalu vosích hnízd, takže preparáty z nich nebylo skoro možno rozeznati.

Použité živné roztoky:

Saccharosa („kostkový" nebo „krystalový" cukr) různých koncentrací.

Dekokt smrkových pilin — 100 *g* smrkových pilin vařeno v 1 *l* vody 1 hodinu, po vychladnutí červenavá tekutina slita, sfiltrována a sterilisována.

Sladinka ředěna vždy jedním dílem vody.

LP—Liebig-pepton —	pepton	6 *g*
	Liebigův extrakt	4 *g*
	Vody	500 cm^3
LS — Liebig-saccharosa	Liebigův extrakt	5 *g*
	Saccharosa	20 *g*
	Vody	500 cm^3

Agaru užíváno pravidelně 1½%ního, ke sladince přidáváno 2% agaru.

Panu prof. dr. B. Němcovi děkuji za laskavost, s jakou mi dal thema této práce a materiál k ní i za stálou další podporu; panu prof. dr. J. Peklovi děkuji za četné pokyny i za pomoc při určování hub.

Vysvětlení obrázků:

Všecky mikrofotografie jsou zhotoveny Zeissovým obj. DD a okul. 4. Preparáty zhotoveny po zjasnění papírových vláken chloralhydrátem a uzavřeny v glycerinu.

1.) Část papírového obalu vosího hnízda.

2.) Jedno vlákno s hyfami.

3., 4.) Z kultury Alternarie na filtračním papíře; houbová vlákna vrostlá do papíru.

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 27.

Dr. J. Heyrovský:

Kyselina hlinitá.

Příspěvek k theorii amfoterních hydroxydů.

(Předloženo dne 6. května 1921.)

Hydroxyd hlinitý, $Al(OH)_3$, má schopnost neutralisovati louhy a tvořiti tak hlinitany. Všechna fysikálně-chemická kriteria souhlasně ukazují,*) že hydroxyd hlinitý reaguje jako pravá jednosytná kyselina zcela analogicky kyselině borité, a lze jej proto v této funkci nazvati kyselinou hlinitou.

Nejpřesvědčivěji dokazují kyselost hydroxydu hlinitého roztoky hlinitanu ammonného, připraveného působením amalgamovaného aluminia na zředěný ammoniak za nepřístupu atmosferického kysličníku uhličitého; vodivost, osmotický tlak a výsledky vážkového stanovení aluminia v těchto roztocích se shodují přesně s výpočty odvozenými ze zákona působení aktivní hmoty slabé kyseliny hlinité na slabou zásadu ammoniak.

Způsob neutralisace.

Hydroxyd hlinitý jest ve vodě neobyčejně málo rozpustný. K určení jeho rozpustnosti byla ponechána čerstvě nadestilovaná voda, chráněná před atmosferickým kysličníkem uhličitým, po 4 až 5 dní při $0^0 C$ s amalgamovaným aluminiem až obsahovala mnoho čerstvého hydroxydu. Po filtraci a po odpaření asi 200 *g* této vody zůstal na platinové míse toliko nevážitelný zbytek. Vodivost vody nasycené hydroxydem hlinitým nejen že nestoupla, nýbrž vždy znatelně klesla (z 2×10^{-6} na 10^{-6} mho), což lze vysvětliti absorpcí plynů vytvořujícím se hydroxydem hlinitým.

Vzhledem k tak nepatrné rozpustnosti tohoto hydroxydu nemůže pro kyselinu hlinitou platiti Arrhenius-Ostwald-ův výklad kyseliny jakožto sloučeniny odštěpující vodíkové ionty. Na základě zkušeností o rychlostech reakčních a rozpouštěcích nelze očekávati, že by mohl hydroxyd hlinitý tak snadno neutralisovati louh svými skrovnými vodíkovými ionty, vysílá-li vůbec jaké.

---

*) J. Heyrovský, Trans. Chem. Soc. 1920, sv. 117, p 1013.

Přirozenější a vhodnější je výklad, jejž pro podobné reakce navrhl Pfeiffer,[1]) že se hydroxylové ionty spojují s molekulami hydroxydu hlinitého v komplexní anion podle rovnice

$$Al\,(OH)_3 + OH' \longrightarrow [Al\,(OH)_4]',$$

čili že zde primární je associace, naopak Arrheniově představě o dissociaci vždy předcházející reakci kyselin.

Této associaci nasvědčuje též složení krystalických hlinitanů, jež vesměs obsahují celé molekuly hydroxydu hlinitého sloučeny s molekulami louhu, čili jsou sloučeninami typicky additivními.

Affinita louhu k hydroxydu hlinitému.

Podle zákona působení aktivní hmoty obdržíme z uvedené rovnice vztah, že za přítomnosti nerozpuštěného hydroxydu hlinitého

$$\frac{C_{Al(OH)_4'}}{C_{OH'}} = K,$$

kdež C označuje koncentrace a K konstantu. Vedle komplexních iontů $[(Al\,(OH)_4]'$ obsahuje roztok hlinitanu vždy též anionty OH' — neboť reaguje alkalicky — a proto udává konstanta K i velikost této hydrolysy.

Budiž upozorněno, že takováto hydrolysa, toliko vzniklá částečným rozpadem additivní sloučeniny, jest v podstatě odlišná od hydrolysy vykládané Arrheniem akcí iontů vody a dlužno ji označiti podle Walden-a[2]) spíše jakožto solvolysu, vznikající působením prostředí o určité dielektrické konstantě.

Pro zředěné roztoky hlinitanu sodného, které se částečně rozpadají na volný louh a krystalický hydroxyd hlinitý, vychází při 25° *C* výše uvedená konstanta K = 1, t. j. nastává v nich 50% hydrolysa.

Z tohoto poměru lze vyjádřiti affinitu hydroxylového iontu k pevnému hydroxydu, t. j. práci potřebnou k roztržení gram-iontu $[Al\,(OH)_4]'$ na volné ionty OH' a na krystalický hydroxyd. Podle thermodynamiky musí býti tato práce rovna práci potřebné k změně koncentrace hydroxylových iontů $C_{OH'}$, existujících v roztoků hlinitanu, na hodnotu, při níž by byl rozpad hlinitanového iontu úplný, t. j. $C_{Al\,(OH)_4'} + C_{OH'}$ (přijímáme-li podle Ghosh-e, Milner-a a jiných úplnou elektrolytickou dissociaci).

Pak hledaná affinita

$$A = RT\,log_e \frac{C_{OH'} + C_{Al\,(OH)'}}{C_{OH'}} = RT\,log_e\,(K+1).$$

---

[1]) Ber. Ber., 1907, sv. 40, p 4036.

[2]) Zeitsch. phys. Chem., 1920, sv. 94, p 295.

Nejvhodnější jest vyjadřovati affinitu A v elektrických jednotkách a to ve volt-faraday (V × F), vztahujících se k jednomu gram-iontu (F = 1), takže obdržíme čísla numericky srovnatelná s měřeními affinity z článků ve voltech.

Tak při $25^0 C$ $A = 0.060 \, log_{10} 2 = 0.0180$ V, což vyznačuje affinitu louhu ku krystalickému hydroxydu hlinitému. Pro čerstvý hydroxyd ve stavu zrodu, vytvořivší se v amorfních shlucích akcí vody na amalgamované aluminium a jevící pod mikroskopem vláknitou strukturu kovu, je affinita A přirozeně mnohem větší, neboť jeho molekuly nejsou pevně poutány v iontové mřížoví jako v krystalech hydroxydu hlinitého. Měření ukazují, že poměr K je pro čerstvý hydroxyd při $25^0 C$ 32krát větší a při $0^0 C$ 70krát větší než u krystalického hydroxydu.

Pak affinita louhu k čerstvému hydroxydu je při 25^0

$$A'_{25} = 0.060 \, log_{10} (32 + 1) = 0.0912 \text{ V.}$$

a při 0^0

$$A'_0 = 0.054 \, log_{10} (70 + 1) = 0.1000 \text{ V.}$$ *)

Určovati hodnotu produktu rozpustnosti nemá v případě kyseliny hlinité významu, pokud není důvodu se domnívati, že vůbec vodíkové ionty odštěpuje. Obdržíme ji z konstanty K prostě násobením iontovým produktem vody; jest však otázkou, můžeme-li všem mathematickým symbolům podkládati skutečné akce iontů v roztoku. Ježto vodíkový ion tu v akci nevstupuje, znamenalo by v tomto případě zavádění produktu rozpustnosti jen početní komplikaci.

Konstituce kyseliny hlinité.

Zbývá otázka, co můžeme označiti za kyselinu hlinitou. Že by to byla obyčejně uváděná kyselina meta-hlinitá, $HAlO_2$, k čemuž svádí jednosytnost takové sloučeniny, nutno považovati za vyloučeno, neboť hydroxyd hlinitý ztrácí molekulu vody teprve při teplotě značně nad $100^0 C$.

Kyselinou hlinitou může býti toliko hypothetická kyselina příslušející hlinitanům, jež dlužno označiti podle způsobu ionisace $Na^{\cdot} [Al(OH)_4]'$ a proto i kyselinu hlinitou $H^{\cdot} [Al(OH)_4]'$. Jest to podle Werner-ovy systematiky kyselina „aquohlinitá“, mající čtyři hydroxylové skupiny v první sféře koordinační kol centrálního atomu aluminia nesoucího patrně negativní náboj iontu.

Toto schematické znázornění ovšem nevysvětluje blíže strukturu aniontu kyseliny hlinité, jehož vnitřní soudržnost rovněž nelze odvoditi podle běžného moderního elektronického pojetí valence. Avšak v Předmluvě II. k „Analyse kvalitativní“ str. 169. podává prof. B. Brauner nové vysvětlení elektronické, poukazuje na to, že hraniční valence — 3 u dusíku, + 3 u bóru nebo aluminia může býti za určitých okolností zvýšena současně o jednu positivní a jednu negativní valenci. V aniontu

---

*) V decinormálních roztocích.

$Al(OH)'_4$ máme tedy + 4 a — 1 valence, kteráž poslední nese negativní náboj iontu, při čemž aluminium svou hraniční valenci + 3 nepřestupuje.

V kysličníku hlinitém jsou kyslíky velmi těsně vázány s atomem aluminia, neboť ekvivalentový objem tohoto kysličníku je (vedle beryllnatého) nejmenším z kysličníků (= 4.1). Můžeme očekávati, že i v kyselině hlinité jsou ony čtyři hydroxyly také těsně semknuty a proto že jest komplexní ion $[Al(OH)_4]'$ stálým, což je příčinou kyselosti hydroxydu hlinitého.

Avšak hydroxylové skupiny jsou v této sféře vždy basické, t. j. neschopné odštěpovati vodíkový ion, a tkví u centrálního atomu kovu (na př. Al) všeobecně tím volněji, t. j. odštěpují se tím snadněji, čím negativnější je potenciál kovu a čím těžší je váha jeho equivalentu. Proto můžeme všeobecně očekávati tím větší kyselinotvornost kovu, čím positivnější je jeho potenciál a čím menší je ekvivalentový objem a váha jeho kysličníku.

Tak lze vysvětliti, že i silně positivní kovy (t. j. s velkou affinitou ke kyslíku) jako aluminium, beryllium a zinek tvoří metallo-kyseliny.

Závěr.

Co bylo tuto odvozeno pro hydroxyd hlinitý, můžeme rozšířiti na všechny anorganické amfoterní hydroxydy:

1. Hydroxylové skupiny těchto hydroxydů jsou vesměs basické (s neionisovatelným vodíkem) a kyselost jejich spočívá v přímém tvoření additivních loučenin s louhy.

2. Ionty těchto solí jsou komplexní a ničím se v principu neliší od komplexních iontů $Ag(CN)_2'$, HgI_4'' atp., jichž tvořením se vykládá rozpouštění sraženin v nadbytku reagencií.

3. Hydrolysa vzniká tu jen rozpadem komplexních iontů zpět na hydroxylové ionty a hydroxyd, bez zasahování iontů vody, a lze ji charakterisovati vhodněji pomocí konstanty tohoto rozpadu než produktem problematických iontů jich hypothetické kyseliny.

4. Reakce amfoterních hydroxydů ukazují, že nerozpustné látky mohou s roztokem reagovati již tím, že jsou v nich molekuly polarisované (t. j. oběma náboji opatřené), aniž by napřed vysílaly ionty do roztoku.

Na uvedené experimentální práce věnovala Česká Akademie hmotnou podporu, za niž autor vzdává uctivý dík.

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 28.

Příspěvek k morfologii antimonitu z Alšaru a z Baia Sprie.

Podává

B. Ježek v Příbrami.

(Se 6 obr. v textu.)

(Předloženo dne 3. června 1921.)

Antimonit z Alšaru v Makedonii.

Antimonit z Alšaru popsal první Foullon[1]) r. 1890 a uvedl pyramidy bez měření, pouze dle směru kombinačních hran určené *s* (113) a *v* (121). Měřen byl Vrbou[2]) r. 1894, který na pěti výborných krystalech zjistil osm již známých tvarů: *b* (010), *q* (130), *m* (110), *ι* (320), *n* (210), *τ* (343), *ψ* (146), *s* (113), jež byly i u krystalů mnou měřených tvary nejčastější. Později antimonit alšarský měřen nebyl a není též jeho vyobrazení.

Měřil jsem methodou dvoukruhovou 7 krystalků alšarských ze druzy ve sbírce Vys. školy báňské v Příbrami a nalezl na nich celkem 25 tvarů:

$b = 0\infty$ (100), *$a = \infty 0$ (100), *$h = 3\infty$ (310), $n = 2\infty$ (210), $\iota = \frac{3}{2}\infty$ (320),
*$k = \frac{4}{3}\infty$ (430), $m = \infty$ (110), *$\varkappa = \infty\frac{6}{5}$ (560), *$r = \infty\frac{4}{3}$ (340), $q = \infty 3$ (130),
*$i = \infty 4$ (140), *$\vartheta = \infty 6$ (160), *$\Theta = \infty 7$ (170), *$N = 0\frac{2}{3}$ (023), $\tau = 1\frac{4}{3}$ (343),
$s = \frac{1}{3}$ (113), *$K = \frac{2}{3}\,1$ (233), *$\sigma = \frac{2}{3}\,\frac{1}{3}$ (213), $\psi = \frac{1}{6}\,\frac{2}{3}$ (146), **$\frac{2}{3}\,\frac{7}{9}$ (679),
**$\frac{1}{3}\,\frac{5}{9}$ (359), **$\frac{1}{7}\,\frac{5}{14}$ (2 . 5 . 14), **$\frac{1}{7}\,\frac{4}{7}$ (147), **$\frac{1}{5}\,\frac{9}{5}$ (195), **$\frac{1}{3}\,\frac{1}{9}$ (319).

Z tvarů těchto jsou jednou hvězdičkou * označené nové pro antimonit z Alšaru, tvary dvěma hvězdičkami označené ** jsou pro tento nerost vůbec nové.

Měřené krystaly byly v pásmu vertikálním dosti hojnoploché, obrysu kruhovitého, a vyznačující se v zakončení stálým převládáním nízkých pyramid, převážně brachypyramidy ψ (146), řídčeji s (113) a konstantní přítomností brachydomatu N (023). Zakončení jest celkem stejné jako u krystalů Vrbou měřených, jenom brachydoma N (023) u mých stále se vyskytující jest zvláštností tohoto typu.

---

[1]) H. v. Foullon, *a*) Über Antimonit und Schwefel aus Macedonien. Verhdlg. Geol. Reichsanstalt, Wien 1890, p. 318.

[2]) K. Vrba, O některých minerálech z Allcharu v Macedonii. Věstník kr. Čes. Spol. Náuk, tř. mat. — přír., 1894, pojedn. 48.

Vyobrazené krystaly jsou kombinace:

Čís. 1.: $b, n, m, q, i, \Theta, N, \tau, s, K, \sigma, \psi$, **(679).

Nová brachypyramida **$\frac{2}{3}\,\frac{7}{9}$ (679) vyskytla se jen na tomto krystalu dvěma poměrně úzkými ale ostře ohraničenými plochami. Reflektovala dobře, a protože i měření dobře s výpočtem souhlasí, mám pyramidu (679) za tvar jistý ale velmi vzácný.

	φ		ϱ		
	měřeno:	vypočteno:	měřeno:	vypočteno:	Počet ploch:
**$\frac{2}{3}\,\frac{7}{9}$ (679)	$41^0\,33'$	$41^0\,21\frac{1}{2}'$	$46^0\,5'$	$45^0\,58'$	2

Čís. 2.: $b, h, n, m, q, N, s, \psi$, **(359), **(195), **(319).

Nová brachypyramida **$\frac{1}{3}\,\frac{5}{9}$ (359) jest vyvinuta pouze jednou plochou v zakončení po převládající ψ (146) největší a dobře reflektující. Jest jemně rýhována ve směru kombinační hrany s s (113). Mám tvar tento za jistý ale velmi vzácný.

	φ		ϱ		
	měřeno:	vypočteno:	měřeno;	vypočteno:	Počet ploch:
**(359)	$31^0\,6'$	$31^0\,9'$	$33^0\,16'$	$33^0\,27'$	1

Nová brachypyramida **$\frac{1}{5}\,\frac{9}{5}$ (195) dána jest třemi drobnými ale dobrými plochami, jež měly posiční úhly:

	φ	ϱ
(195)	$6^0\,2'$	$61^0\,46'$
($\bar{1}$95)	$6^0\,30'$	$61^0\,30'$
($\bar{1}\bar{9}$5)	$6^0\,12'$	$61^0\,15'$

Střední hodnoty měření: $\varphi = 6^0\,15'$ $\varrho = 61^0\,32'$

Vypočteno: $\varphi = 6^0\,23\frac{1}{2}'$ $\varrho = 61^0\,30\frac{1}{2}'$

Mám pyramidu **(195) za tvar jistý, ale vzácný.

Nová makropyramida **$\frac{1}{3}\,\frac{1}{9}$ (319) byla na tomto krystalu vyvinuta celkem třemi plochami. Také ještě na jednom dalším jsem ji nalezl (dvě plochy). Plochy její byly dosti úzké, reflektovaly však velmi dobře.

	φ	ϱ
(3$\bar{1}$9)	$71^0\,51'$	$19^0\,39'$
($\bar{3}$19)	$71^0\,18'$	$19^0\,47'$
($\bar{3}\bar{1}$9)	$71^0\,57'$	$19^0\,36'$

Střední hodnoty měření: $\varphi = 71^0\,42'$ $\varrho = 19^0\,41'$

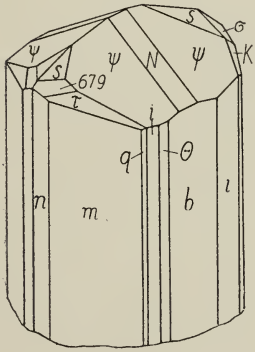
Vypočteno: $\varphi = 71^0\,41'$ $\varrho = 19^0\,48'$

Mám tvar tento mající poměrně jednoduché indexy (319), vyskytnuvší se na dvou krystalech celkem pěti plochami a i v úhlech velmi dobře s theoretickou polohou souhlasící za tvar docela jistý.

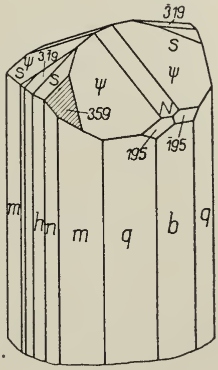
Čís. 3.: *b*, *n*, *m*, *q*, *N*, *s*, ψ, **(2 . 5 . 14).

Nová brachypyramida **$\frac{1}{7}\,\frac{5}{14}$ (2 . 5 . 14) byla vyvinuta dvěma plochami dosti rozsáhlými a dobrými. Je to pyramida vzácná.

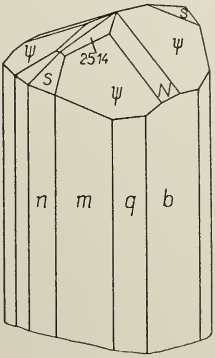
	φ	ϱ
(2 . 5 . 14)	21° 53′	21° 39′
(2 . $\bar{5}$. 14)	22° 00	21° 25′



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

Střední hodnoty měření: $\varphi = 21° 56\tfrac{1}{2}'$ $\varrho = 21° 32'$
Vypočteno: $\varphi = 21° 57'$ $\varrho = 21° 24'$

Čís. 4.: *b*, *n*, *m*, *q*, *i*, *N*, *s*, ψ, **(147).

Mezi plochami terminálními převládá s (113). Nová brachypyramida **(147) byla vyvinuta dvěma plochami. Ležela velmi dobře v pásmu [140 : 001] a uvádím její posiční úhly ve srovnání s úhly blízké důležité ψ (146).

φ		ϱ	
měřeno:		měřeno:	
(146):	(147):	(146):	(147):
14° 11′	14° 10′	34° 55′	30° 42′
14° 14′	14° 12′	34° 59′	30° 30′
14° 2′	—	34° 56′	—
14° 8′	—	34° 54′	—

Střed měření: ϱ (146) = 14° 9′ φ (147) = 14° 11′ ϱ (146) = 34° 56′ ϱ (147) = 30° 36′
Vypočteno: φ = 14° 8′ φ = 14° 8′ ϱ = 34° 59′ ϱ = 30° 57′

Považuji pyramidu **$\frac{1}{7}\,\frac{4}{7}$ (147) za vicinálu blízké brachypyramidy ψ (146).

1*

Antimonit z Baia Sprie v Rumunsku.

O antimonitu z Baia Sprie (Felsöbánya) psal poprvé obšírně Krenner[3]), po padesát let pak nevyšlo žádného většího pojednání o krystalech z tohoto naleziště, až r. 1916 opět obsáhlá práce Neffova[4]). Neff uvádí v přehledu celkem 82 tvarů: z toho pro naleziště nových, jistých 28, nejistých 14, pro antimonit vůbec nových, jistých 16, nejistých 10.

Měřil jsem několik krystalů z tohoto naleziště pocházejících ze sbírky Vys. školy báňské v Příbrami. Náležely vesměs do Neffovy skupiny „chudoplochých" krystalů habitu „kopinatého" a podobají se nejvíce jeho obr. čís. 2 a 3.

Jsou poměrně velmi stálé ve svém zakončení, ale pásmo vertikální jeví dosti nepravidelností, zejména v tom, že bývají některá prismata vyvinuta jen dvěma a často i jen jednou plochou. Stále přítomny jsou *m* (110) a *b* (010), skoro vždy *q* (*130*) a velmi často *n* (210). I vzácnější u antimonitu makropinakoid *a* (100) byl vyvinut na některých krystalech úzkými, ale dobrými plochami. Celkem zjištěny následující tvary, z nichž hvězdičkou * označený je nový pro Baia Sprie, dvěma hvězdičkami ** označený je pak nový pro antimonit:

$$b = 0\infty\,(010),\ a = \infty 0\,(100),\ h = 3\infty\,(310),\ n = 2\infty\,(210),\ \iota = \tfrac{3}{2}\infty\,(320),$$
$$m = \infty\,(110),\ r = \infty\tfrac{4}{3}\,(340),\ d = \infty\tfrac{3}{2}\,(230),\ l = \infty\tfrac{5}{3}\,(350),\ q = \infty 3\,(130),\ p = 1\,(111),$$
$$\varrho = \tfrac{1}{3}\tfrac{5}{3}\,(153),\ ?\,\mathfrak{A},\ {}^{*}\Xi = \tfrac{5}{3}\tfrac{11}{3}\,(5.11.3)\ {}^{**}(234),\ O = \tfrac{10}{21}\tfrac{16}{21}\,(10.16.21).$$

Zakončení jest velmi stálé a charakterisují je následující vždy přítomné pyramidy: základní pyramida *p* (111), jež bývá často nejrozsáhlejší, téměř vždy ale tak dokonalá, že ji možno měřiti s největším zvětšením a poloha reflexů sotva kdy differuje o 2′; velmi příkrá brachypyramida blízká *A* (361) a konečně nízká brachypyramida o symbolu blízkém (234).

Zajímavá jest příkrá brachypyramida blízká *A* (361), jejíž plochy nabývají mezi terminálními někdy i rozsahu největšího. Jest velmi často poněkud zaoblená, často nejednotná, skýtajíc celé světelné skvrny místo reflexů, a vyznačuje se zejména tím, že se posice i poměrně dobrých ploch téhož krystalu navzájem značně liší. Neff uvádí takovou pyramidu na 60 krystalech se 222 plochami. Měřil 180 ploch a po vymýtění hodnot přespříliš odchylných stanovil průměr pro:

φ	ϱ
22° 30′ — 24° 30′	79° 00′ — 80° 30′

Nemohl ji identifikovati s *A* (361) zejména pro velký rozdíl φ a odchylku z pásma [001 : 120], jemuž *A* náleží. Nedává jí symbolu a signuje ji ?$\mathfrak{A}$.

---

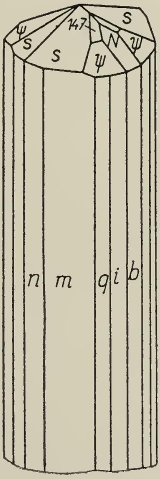
[3]) J. Krenner, Sitzbericht Akad. Wien, 1865, 51.

[4]) O. Neff, Über Antimonit von Felsöbanya, Goldschmidt's Beitr. Kryst. Min., Heidelberg, 1916, Bd. 1., Heft 3.

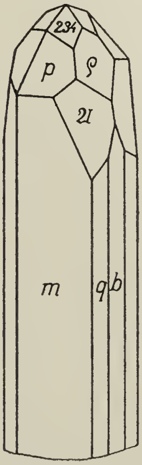
Měřil jsem 20 ploch této pyramidy ?𝔄 a uvádím její posiční úhly ve srovnání s *A* (361):

φ		ϱ	
?𝔄	*A* (361)	?𝔄	*A* (361)
měřeno:	vypočteno:	měřeno:	vypočteno:
23° 56′ — 25° 15′	26° 44′	78° 29′ — 80° 49′	81° 41′
		(nejlepší 80° 10′ — 80° 25′)	

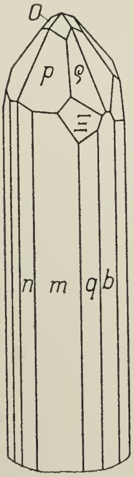
Tato pyramida ?𝔄 nedá se prozatím indexy přesně vyčísliti.



Obr. 4.



Obr. 5.



Obr. 6.

U jednoho (ze 6 měřených) krystalů byla vysoká brachypyramida vyvinuta poněkud menšími plochami než obyčejně u tohoto typu a skýtala reflexy lepší s posicí mnohem stálejší. Je to brachypyramida $\Xi = \frac{5}{3}\,\frac{11}{3}$ (5 . 11 . 3) daná posičními úhly čtyř ploch a pro toto naleziště nová:

φ		ϱ	
měřeno:	vypočteno:	měřeno:	vypočteno:
24° 50′	24° 36′	76° 12′	76° 18′

Krystaly byly vždy zakončeny nízkou brachypyramidou vyvinutou na každém alespoň dvěma plochami. U dvou krystalů (celkem 6 ploch) byla to nová brachypyramida $**\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}$ (234) daná posičními úhly:

φ		ϱ	
měřeno:	vypočteno:	měřeno:	vypočteno:
33° 37′	33° 53′	42° 29′	42° 36′

U ostatních krystalů byla to pyramida blízká Neffově nové $O = \frac{10}{21}\,\frac{16}{21}$ (10 . 16 . 21), jež má theoretickou posici:

$\varphi = 32^\circ\,12'$ $\varrho = 42^\circ\,30'$.

Neff pozoroval tvar tento u 27 krystalů celkem 92 plochami vyvinutý a shodují se jeho měření s výpočtem tak dobře, že ho považuje za tvar docela jistý. Přes to mám za to, že jest tato brachypyramida *O* vicinálou k jednodušší a v důležitých pásmech ležící mé nové (234), s níž se shoduje znamenitě v posičním úhlu ϱ.

Zajímavé jest, že Neff pozoroval tento tvar *O* pouze na „hojnoplochých" krystalech habitu „sloupcovitého" a nikdy u „chudoplochých" „kopinatých", jakými jsou krystaly moje.

Pozorování Neffova i moje nasvědčují tomu, že jak vysoká brachypyramida *A* (361), tak nová nízká (234) jeví význačný sklon vystupovati v plochách vicinálních o poměrně stálé posici:

Antimonit:

$$a : b : c = 0{\cdot}9926 : 1 : 1{\cdot}0179.$$
$$p_0 = 1{\cdot}0253 \,,\; q_0 = 1{\cdot}0179.$$

Čís.	Gdt.	Miller	φ	ϱ	ξ_0	η_0	ξ	η	x	y	d
1	$\frac{2}{3}\ \frac{7}{9}$	679	41°21·	45°58	34°21	37°49·	28°22	32°39·	0·6834	0·7664	1·0343
2	$\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}$	234	33 53	42 36	27 09	37 21·	22 10·	34 11	0·5127	0·7634	0·9196
3	$\frac{1}{3}\ \frac{5}{9}$	359	31 09	33 27	18 52	29 29	16 34	28 09	0·3418	0·5654	0·6606
4	$\frac{1}{7}\ \frac{5}{14}$	2.5.14	21 57	21 24	8 20	19 58·	7 50·	19 47	0·1464	0·3635	0·3919
5	$\frac{1}{7}\ \frac{4}{7}$	147	14 08	30 57	8 20	30 11	7 13	29 55	0·1464	0·5815	0·5996
6	$\frac{1}{5}\ \frac{9}{5}$	195	6 23·	61 30·	11 35	61 21·	5 37	60 51·	0·2051	1·8309	1·8424
7	$\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}$	319	71 41	19 48	18 52	6 27	18 45·	6 07	0·3418	0·1131	0·3600

Vývoj ostrůvků Langerhansových u člověka v době embryonální.

Napsal

MUDr. Jan Wolf,
asistent ústavu pro histologii a embryologii.

S 1 tabulkou.

Práce z ústavu pro histologii a embryologii české lékařské fakulty university Karlovy v Praze. Přednosta prof. Dr. *O. Srdínko.*

Předloženo dne 24. června 1921.

O vztahu ostrůvků Langerhansových ku ostatní žlázové části pankreasu stojí dosud dva názory proti sobě. Tvrdí-li jeden, že ostrůvky L. jsou útvary samostatné, orgány sui generis, zdůrazňuje druhý, že existují přechody mezi tkání insulární a acinosní a supponuje tak přeměnu ostrůvků v aciny, nebo naopak acinů v ostrůvky, nebo obé zároveň (balancement Laguessovo).

Mínění tato rozcházejí se jak v názoru na žlázu dospělou, tak ve studiu poměrů embryonálních. Zejména poslední otázka, speciel. pokud člověka se týče, zdá se mi jeviti četné nesrovnalosti a proto nemyslím, že by revise její byla zbytečnou.

V přítomné práci podávám jen zhuštěné výsledky svého studia vývoje ostrůvků L. u člověka v době embryonální; úplné publikování práce tak, jak byla napsána, není pro obtížné poměry tiskové možno.

Ze studia pankreasů souvislé řady embryí lidských docházím k následujícím resultátům:

Základním stavebním kamenem ostrůvků L. jest buňka kalná. Viděli jsme v původní práci na popisovaných praeparatech našich postupný přechod ostrůvků určitě jako takových charakterisovaných (komplexy buněčné bez lumina, trámčité skladky a typické vaskularisace) v komplexy menší a menší, tvořené právě tak buňkami kalnými až konečně v osamocenou buňku kalnou, pučící z vývodu nebo nedifferencovaného ještě tubulu. Nezbývá tedy, než-li tuto buňku kalnou ve shodě s Laguessem (ovce), později Renautem (člověk 11 *cm*), pokládati za první počátek vznikajícího ostrůvku L., právě tak, jak ji dále Helly (morče), Diamare, Aron u zvířat mají za charakteristickou pro ostrůvky, a jak ji celá řada autorů pokládá za typickou pro žlázu dospělou. Pearse u člověka, ač popisuje z tubulů vyrůstající buňky osamocené světlé nebo eosinofilní, nemyslí, že znamenají první differenciaci ostrůvků a pokládá teprve buňky, charakterisované zrněným eosinofilním protoplasmatem, jež skládají již skupiny buněčné, za buňky kalné a skupiny ty za ostrůvky L. Ostatní autoři však, kteří u člověka vývoj ostrůvků studovali, nenacházejí těchto buněk kalných. Tak na př. Küster ani v časném stadiu, ani později nevidí buněk, jež byly by analogické buňkám kalným; naopak protoplasma buněk těchto (ostrůvkových) nejeví ani stopy po zrnění. Právě tak nezmiňuje se o buňkách kalných Kyrle a Weichselbaum, stejně jako Mironescu: „Nelze nalézti nikde ony autory popisované buňky kalné, jež mají býti prvním základem ostrůvků L.“

Myslím, že proto asi unikla autorům těmto buňka kalná, poněvadž element ten nedovedou zachovati stejně všechny fixace — a tu opět jen u čerstvého materiálu — a ne všechna barvení stejně jej vyzvednou.

Epitheliální původ ostrůvků všemi těmito autory jest uznáván (nehledě ku starším názorům o mesenchymálním jejich původu [Hansemann, Claude], nebo ku dávno odbytým domněnkám o jejich povaze lymfoidní), neboť spojitost prvních základů ostrůvků L. s mateřskými zevně sekretorickými částmi žlazy je příliš evidentní.

Je-li osamocená buňka kalná z vývodu či tubulu žlazy pučící prvním počátkem ostrůvků L., jest její první objevení se hranicí, za níž vývoj ostrůvku L. počíná. Poněvadž první buňku, resp. skupiny jich, mohli jsme zjistiti u embrya 4·5 *cm*, nepozorovali jsme jich však ještě u nejblíže předcházejícího (3·4 *cm*), můžeme míti za to, že tato délka, resp. jí odpovídající stáří jest onou hranicí, u níž počíná vývoj ostrůvků. Vzhledem k tomu však, že u embrya 4·5 *cm* viděli jsme již celé skupinky kalných buněk, můžeme tuto hranici se vší pravděpodobností posunouti ještě o něco níže. Pokud člověka se týká, shodujeme se tu s pozorováním Pearcovým, jenž první ostrůvky vidí u embrya 54 *mm* dl. Küster však uvádí již embryo 14týdenní, tedy stadium mnohem delšímu embryu odpovídajíc, kdy první ostrůvky určitě již mohl zjistiti. Kyrle a Weichselbaum shodují se na embryu 8 *cm*, zatím co Mironescu posunuje tuto hranici nejdále, pozoruje ostrůvky zřetelně teprve u embryí starších 5 měsíců. Co však na druhé straně překvapuje, jest časné objevení se jich u zvířat. Tak u ovce vidí Laguesse první buňky kalné ještě ve stadiu plného stromu žlazového, u emb. 13 *mm*, což i přes rozdíl ve velikosti embryí ovčích a lidských jest nepoměrem nápadným; Helly dokonce vidí u morčete první naznačení buněk kalných ještě v solidním pupenu základu pankreasu pučícího ze střeva.

Pokud popisu této buňky kalné se týče, jest to, aspoň pokud jde o buňku kalnou osamocenou, obyčejně element větší buněk ostatních, s tělem protoplasmatickým vyplněným spoustou jemných granul eosinofilních, tak jemných, že jen silné zvětšení činí je zřetelnými. Granula vůbec nejsou stejně zřetelná; jednou sotva rozeznatelná, jindy velmi distinktní. Jednou je jimi vyplněno celé tělo, jindy jen část, jeden konec buňky nebo periferie, při čemž hranice bývá tak ostrá, že granulovaná část poskytuje dojem samostatného elementu, mnohdy bizarního tvaru. V celku lze říci, že granuly ještě nepříliš zřetelnými se vyznačovaly ony elementy, jež, nejmladší, právě ze stěny vývodu či tubulu počaly pučeti. Buňky však, jež již vypučevše ku stěně mateřského kanálu či tubulu byly přiloženy, charakterisovala granula velmi zřetelná a celé jejich tělo jimi bylo vyplněno; totéž platí o zcela nepatrných skupinách těchto buněk. Větší skupiny buněk a ostrůvky, jež již trámčitá skladba a typická vaskularisace charakterisovala jako takové, chovaly elementy jen z části granulované, jež u ostrůvků větších seskupeny byly hlavně na periferii. Buňky tyto s granuly jednou distinktními, podruhé však sotva znatelnými, tvořily touto variací přechod ku buňkám světlým ostrůvku, jež na formolových preparatech byly bez granul. Buňky tyto, jež v menších ostrůvcích s kalnými dosti nepravidelně byly pomíšeny, tvořily u větších obyčejně centrum a vůbec hlavní hmotu komplexu buněčného. Jádra buněk kalných jsou ve své většině temnější, menší a okrouhlejší jader buněk ostatních.

Tak jeví se buňky tyto při fixaci formolem. Jinak však má se věc tam, kde užito bylo fixace chromovými solemi na mitochondrie, tak formoldvojchromanu podle Regaud-a, nebo fixace podle Bendy. Buňky světlé ostrůvku, jež při předešlých fixacích byly téměř homogenní, jeví se nám tu naplněny jemnými granuly, jež Heidenheinův železitý haematoxylin při této fixaci barví specificky a usvědčuje je tak co elementy mitochondriální, zatím co sekretorická granula, předifferencována, již vymizela. Pravé buňky kalné, resp. jejich kalné partie neliší se tu zřetelně od buněk světlých; je-li tu rozlišení setřeno, vyzvedne je však Dominiciho barvení velmi zřetelně. Vzhledem ku této úzké souvislosti buněk kalných ku buňkám světlým ostrůvku, souvislosti, o níž svědčí jak vznik buněk světlých z původní buňky kalné, jakožto členů téže rodiny, tak přechody kalných partií ve světlé, můžeme usuzovati na příbuznost mitochondriálních elementů buněk světlých ku granulům buněk kalných v tom smyslu, že granula specifická buněk kalných z těchto mitochondr. elementů pocházejí, resp. opět v tyto se mění.

Shodujeme se tedy celkem s popisy autorů, pokud buňku tuto ovšem v době embryonální vůbec nalézají. Tak s podrobnějším popisem z části u Lagnessa, z části u Arona a j., v dospělosti nejnověji pak u Saguchi-ho (20, mitochondr., u dosp. žáby).

Buňka kalná pučí tedy ze souvislého svazku buněk epithelialních výstelky kanálu nebo tubulu. Buňka z počátku jako klín nebo zub do řady epithelialních buněk vklíněná (v. obr. 1.), vytlačena je znenáhla buňkou mateřskou nebo svými sousedy na venek do té míry, že zvenčí ku souvislé řadě buněk epithelialních jen přiléhá. Takové osamocené buňky kalné vidíme obyčejně na jednom, dvou i více místech vystupovati z vývodu jen poněkud většího kalibru příčně říznutého ve stáří, kdy tyto nejčastěji se vyskytují (10·5 *cm*). Podobným způsobem pučí z nedifferencovaných ještě tubulů. Buňka zmíněná vždy oddělena je od lumina. Tak bezpodmínečně vždy, že musíme se domnívati, že toto oddělení jest podmínkou jejího vzniku; neboť kdyby některá buňka oné souvislé výstelky epithelialní vývodu na př. stala se buňkou kalnou dříve, a pak teprve měla tendenci na venek vyrůsti, musili bychom ji přece zastihnouti tu a tam v řadě ostatních buněk epithelialních zařazenou a s luminem v bezprostředním styku, dříve ještě, než měla čas na venek se vystěhovati nebo dáti se vystrčiti sousedy. Buňka nemusí vyrůstati osamocená, nýbrž 2 i 3 najednou mohou pučeti vedle sebe. Buňka právě vyrůstající bývá obyčejně méně sytě zbarvena (Dominici), než ona ku výstelce již zevně jen přiložená.

Přicházíme nyní ku otázce, jakým způsobem ostrůvky dále se vyvíjejí. Buňka kalná, osamocená se dělí; nejednou zastihli jsme ji v mitose. Produktem tohoto dělení jest opět buňka kalná, jak svědčí malé skupiny buněk ze 2, 3 a více elementů složené. Skupiny tyto jeví však již rozličný stupeň sytosti zbarvení buněk kalných — jsouť tu elementy temnější s granuly patrnějšími a hustěji nahromaděnými a světlejší s granuly méně zřetelnými. Čím větší skupina buněčná, tím zřetelněji rozdíl ten vystupuje. Elementy vysloveně kalné, spíše periferně uložené, vyskytují se tu vedle buněk zcela jasných, spíše centrálně ležících, s nimiž udržuje souvislost řada forem přechodních s granuly jen v části těla buněčného nebo na periferii, jak shora bylo popsáno. Leč uvedené barvení na mitochondrie dokáže i v jejich těle jako v buňkách světlých spoustu mitochondr. zmeček. Nápadná je tendence buněk, řaditi se v pásy, trámce buněčné. Velmi často můžeme pak viděti, jak takový trámec, nemoha ovšem růsti přímočaře, stáčí se pod tlakem retikula vazivových ok, do nichž a proti nimž roste; tím způsobem do konkavity jeho oblouku jsou zaujímány, na druhé straně však aktivně též vrůstají elementy vazivové, po př. céva s krvinkami (v obr. 2.). Jde-li tu jen o jednoduchý oblouk trámce, lze nalézti jinde již i silně esovitě zohýbanou figuru; do konkavity obou oblouků jsou zaujímány, resp. i aktivně vrůstají, jak svědčí jádra, vazivové, po př. i cevní elementy. Trámce se dělí, anastomosují, znovu a znovu ohýbají, zaujímajíce mezi sebe vložky vazivové a naopak vazivem a cevami jsouce prorůstány; čím větší je tento komplex buněčný, tím spíše nabývá formy sferické (v. obr. 3.), ovální, po př. ze sferických laloků složené, skuluje své trámcovitě se rozrůstající elementy v klubko pod tlakem vazivové sítě, v níž se rozšiřuje a již roztahuje a napíná, jak svědčí více méně, u větších ostrůvků spíše, znatelné usměrnční elementů vazivových v souhlas s obvodem komplexu.

Jakým způsobem děje se vaskularisace? Již od první chvíle vzniku jsme pozorovali, že ostrůvky téměř přitahují elementy cevní a krevní; tak již ostrůvky stadia 7·5 *cm* jsou z části vaskularisovány. Kapillarní síť obemyká vyvinutý ostrůvek zevně, tak jako uvnitř široké, anastomosující a varikosními výdutěmi opatřené kapillary prokládají spolu s vazivem epithelialní trámce ostrůvku. K ostrůvkům plně vyvinutým (13 až 14 *cm*) směřují silnější cevy krevní, takže se až zdá, jakoby plody visely na stopkách. Jako krvinky rudé leží všude hojně roztroušeny ve vazivu bez endotheliální výstelky, tak nalézáme je mnohdy volně mimo endothel v prostorech mezi trámci ostrůvku.

Že kapilláry v hojné míře do ostrůvků vrůstají, můžeme si vysvětliti jen hojnější potřebou krve těchto rychle rostoucích orgánů, než jakou mají ostatní partie žlazy. Jak však vyložiti ony případy, kdy krvinky leží volně bez kapillár mezi trámci ostrůvku, nebo ony obrazy, kde trámce buněk ostrůvkových ponořeny jsou do jezírka krvinek (na př. emb. 14, 22 *cm*), neomezeném endotheliální výstelkou?

Není pochyby, že útvary tyto nejsou ničím jiným, než ostrůvky krevními, jak je autoři u zvířat popisují. Tak ostrůvky krevní hojně se vyskytují u foetů ovčích (Laguesse, 10—20 *cm*), krysy, vepře, morčete a j.; u člověka však nalézáme je kvalitativně i kvantitativně daleko méně vyvinuty. K otázce, jakým způsobem vznikají, nalézáme v literatuře udání u Laguessa, Retterera a Arona. Podle Laguessa jsou to u foetů ovčích duté ostrůvky, vyplněné krvinkami rudými bez spojení s cevami okolí. Na otázku, jakým způsobem krvinky rudé v centru útvaru se ocitly, odpovídá autor domněnkou, že krvinky, s jádry i bez jader, vnikají jedna za druhou vlastní motilitou nebo proudem tekutiny do dutin, jež vznikají mezi centrálními buňkami, z nichž jedny se rozplynou a tvoří tak dutinu, druhé se transformují ve veliké elementy, které se zmocní jistého počtu krvinek a je zničí; nejsou to tedy elementy haematopoetické.

Retterer popisuje vznik ostrůvků (u hladovějícího králíka, kde provokuje rozmnožení ostrůvků obyčejných i krevních) tak, že buňka acinosní ztrácí charakter mladého protoplasmatu, stane se acidofilní a zatím co se cytoplasma vakuolisuje, barví se jádra oranží jako krvinky. Vymizení cytoplasmatu uvolní jádra, jež stávají se bohatými haemoglobinem a dají tak vznik krvinkám extravaskularním. Konečně tyto houfečky krvinek vcházejí v komunikaci se sítí cevní, jejíž prodloužení do slepa tvoří.

Aron (ovčí embrya) vysvětluje vznik těchto ostrůvků krevních erythroidní transformací elementů insulárních, buněk kalných, následkem slití přečetných mitochondrií v lunu jejich cytoplasmatu. V určitých ostrůvcích obal endokrinní se protrhne a krvinky, uvolněny, vyplynou do vaziva interstitiálního, čímž vykládá autor ono množství velkých shluků krvinek mimo cevy v embryonálním vazivu žlazy. Ve většině případů jsou krvinky pojaty kapillárami orgánu.

Není pochyby, že oba poslední názory velmi překvapují, připisujíce entodermálním epitheliím funkci krvetvornou, ať už přeměnou jejich jader, ať už zkondensováním mitochondrií jejich cytoplasmatu. Vůči těmto domněnkám spíše by se zdál první, Laguesse-ův názor pravděpodobnější.

Všude ve vazivu embryonálním pankreasu nalézáme krvinky volně, bez endotheliální výstelky rozložené. Vedle krvinek zralých je tu však i spousta krvinek nezralých každého stáří, jež seskupeny namnoze v ostrůvky, jsou analogické oněm, jež na př. v jatrech v té době pozorujeme; jsou to ostrůvky haematopoetické, jež zastoupeny všemi formami (haemogonie, haematoblasty I., II. řádu, erythroblasty (nomenklat. Mollier), krvinky polychromatické, z části s Jollyho tělísky) svědčí o živé činnosti haematopoetické pankreasu, jež stejně jako v jatrech k polovině těhotenství dostupuje vrcholu, aby u novorozeněte vyhasla. Vzpomeneme-li pak, že tytéž elementy haematopoetické mohli jsme pozorovati i uvnitř ostrůvku L. mezi trámci, můžeme tyto záhadné ostrůvky krevní vysvětliti velmi prostě. Jde i v ostrůvku L. o haematopoesu vyšlou z elementů mesenchymálních, jež ostrůvek při svém vzrůstu zaujal; tedy o tutéž haematopoesu, jíž v době embryonální pozorujeme mezi trámci jaterními v míře tak hojné; zde ovšem kvantitativně je daleko nepatrnější. Jen tak mohou vzniknouti prostory s krvinkami rudými i bílými uvnitř ostrůvku mimo endotheliální výstelku a jen tak je možno, že trámečky epitheliální buněk ostrůvkových plují v jezírku krvinek, endotheliální výstelkou neomezeném. Toť ona jezírka, jež Aron vykládá jako výlevy z prasklých ostrůvků krevních, kde krvinky byly povstaly transformací z těl buněk ostrůvkových.

Pokud skladby se týče, charakterisován jest takový plně vyvinutý ostrůvek (již od stadia 13—14 *cm*) takto: složen jest z části světlé centrální a temné periferní. Světlá část tvořena je trámci buněk tak anastomosujícími, že až na houbovitou tkáň místy upomíná; buňky její jsou světlé s jasnými, většími jádry, při obyčejné fixaci (na př. formol, Zenker) bez granul, jen ojediněle tu a tam vyskytne se buňka s granuly na periferii nebo na jednom konci uloženými. Hranice buněk jsou špatně znatelny. Že při fixaci speciální na mitochondrie jeví se buňky tyto mitochondriálními elementy vyplněny, bylo již vzpomenuto. Část temná, složená z buněk většinou granulovaných, kalných, nasedá na světlou po stranách mnohdy jako čepička, jindy jen z jedné strany nebo dvou, křídlovitě. Granula buněk kalných, jak již shora řečeno, nevyplňují obyčejně celého těla, nýbrž nahromaděna jsou jen na jednom konci těla buňky nebo na periferii (v. obr. 4.). Jádra, většinou tu menší, kulatá, ovalná i nepravidelná, temnější než-li v části centrální, jsou hustěji k sobě nahromaděna, což dodává celku tím temnějšího vzhledu. Kalnou i světlou partií ostrůvku probíhají kapilláry, z části bez účasti vaziva, event. i dutiny bez endothel. výstelky s krvinkami. Kapilláry jsou v celku širší, a opatřeny jsouce varikosními výdutěmi, mnohonásobně anastomosují mezi sebou i sítí povrchovou.

Srovnáme-li popsanou skladbu ostrůvků s údaji v literatuře, shodujeme se v hlavních rysech s pozorováním autorů: buňky uspořádány ve trámcích, typická vaskularisace. Pokud stavební jednotky ostrůvků se týče, buňky kalné, bylo již shora o názorech autorů promluveno. I Laguesse rozeznává buňky kalné temnější na periferii, světlejší v centru. Ony ostrůvky, jež Laguesse popisuje jako „ostrůvky ve zřejmé regressi, svadlé, nepravidelné, s buňkami malými, špatně ohraničenými a z části s fragmentovanými jádry, zdají se býti analogické s našimi partiemi temnými, periferními ostrůvků, jež nasedají v podobě čepičky či křídel na centrální část světlou u většiny velkých ostrůvků. Nemůžeme však souhlasiti s názorem, že by to byly části ostrůvků v regressi se nalézající; neboť nikde nenalézáme tu degeneračních a rozpadových zjevů (karyolysis a rhexis atd.). Přiznáváme však, že účel tohoto differencování zůstal nám neznám, přes to, že tyto temnější partie objevují se často v místech, kde ostrůvek mění se právě v aciny; neboť věc není bezvýjimečná. Kyrle a Weichselbaum, ač nepopisují buněk kalných, upozorňují na tuto temnější periferní partii a soudí, že jde o zatočené a k ostrůvku přimknuté zbytky přetržené stopky, jež spojovala ostrůvek s vývodem.

Zásadně ovšem lišíme se od Laguessova názoru, že jde v době vývoje o 2 generace ostrůvků: první v době nejčasnější a druhé definitivní, vzniklé transformací z dutin sekretorických. Jsouť pro nás ostrůvky od prvního počátku definitivními, vyvíjejíce se z buněk kalných pučících z kanálů nebo dříve z nedifferencovaných ještě tubulů, aniž by kdy regressí zacházely. Vidí-li Laguesse, že buňky kalné přestávají pučeti z vývodů už u embrya 9 *cm* (ovce), můžeme pozorovati tento zjev do doby nejpozdější a vším právem můžeme se domnívati, že i po porodu trvá toto pučení v době postfoetalního vzrůstu.

Pokud topografických vztahů ostrůvků se týče, nalézáme je u nejmladších stadií hlavně v centralnějších partiích žlazy (ve shodě s Laguesse-em) u větších vývodů. Hojnější a větší zdají se býti u mladších žlaz v cauda a corpus než v caput, v souhlase s údáními autorů (Pearse, Küster, Kyrle a Weichselbaum, Mironescu); leč věc není nikterak příliš nápadna. Mladší stadia mají ostrůvky ještě volně ve vazivu uložené, starší (delší 14—16 *cm*) chovají ostrůvky postupně více a více zaujaté do středu lalůčků žlazových, ovšem s výjimkou oněch, jež nejmladší, právě ze stěny vývodu pučí. Ve všech pak stadiích nalézáme ostrůvky nahromaděny hojněji kolem vývodů.

Osamostatňují se ostrůvky po jisté době vývoje, nebo zůstávají spojeny s mateřskými kanály, z nichž vypučely? Autoři, kteří přiznávají úplnou samostatnost ostrůvkům jako orgánům sui generis, rozhodují se ovšem pro tvrzení, že ostrůvky ztrácejí po jisté době vývoje spojení s mateřskými, zevně sekretorickými částmi žlazy, z nichž vyrostly a tak se osamostatňují (na př. Küster, Kyrle a Weichselbaum [zbytky stopek], Pearse, Mironescu). Autoři, uznávající přeměnu ostrůvků v aciny, ovšem vidí spojení zachováno, (na př. Laguesse, Karakascheff). Na našich praeparatech vidíme ovšem v první době (4½—10½ *cm*) stále zřetelné spojení s mateřskými kanály nebo nedifferencovanými tubuly, k nimž leží přiloženy užší či širší básí; později však, zejména už na praeparatech embryí 13—14 *cm* přicházejí stále častěji obrazy, jež zdají se svědčiti pro osamostatnění ostrůvků; ostrůvky jsou dále od mateřských kanálů, zdánlivě bez spojení s nimi. Malé, právě vznikající mají spojení zachováno jako u mladších stadií. Avšak sledování řezů seriových přece dokáže, že i ony ostrůvky větší, jež již dále leží od kanálů větších, zajisté mateřských, zdánlivě bez spojení, souvisí s těmito buď užší stopkou nebo drobným vývodem, na němž nedaleko vústění ostrůvek sedí a jenž se z části v tubuly, později dutiny sekretorické, rozrůstá (viz obr. 5.). Že ostrůvek od mateřského kanálu se postupně vzdaluje, vidíme z toho, že čím větší je, tím obyčejně dále se nalézá od mateřského vývodu. Vzdalování ostrůvku od vývodu je sotva asi aktivní, nýbrž ostrůvek je unášen rozmnožující se tkání okolní, jak vazivem, tak později vzrůstem parenchymu okolního a vkládáním nových partií jeho.

Poslední otázka týká se konečného osudu ostrůvků Langerhansových: Pearse, Küster, Kyrle a Weichselbaum, Mironescu u člověka, Helly a Diamare u zvířat přiznávají ve svých pracích o vývoji ostrůvků L. těmto samostatnost, pokládajíce je za orgány sui generis. Naproti tomu Laguesse, Renaut, Karakascheff zastávají názor, že ostrůvky nejsou útvary definitivními, nýbrž že mění se ve tkáň acinosní. Laguesse-ova theorie balancement jde nejdále: definitivní, t. j. druhá generace ostrůvků, vzniká přeměnou z dutin sekretorických a opět v tyto se mění; podléhá podle Laguesse-a tkáň žlazová pankreasu — nejen v době embryonální, nýbrž i dospělé — stálému balancement mezi tkání endokrinní, ostrůvkovou a exokrinní, acinosní.

Z našich praeparátů, na nichž pozorujeme určitě přechody ostrůvků v aciny, uzavíráme ovšem též, že ostrůvky L. mění se ve žlazové aciny a nejsou tedy útvary samostatnými, orgány sui generis. Stačí pozorovati stadia 18½ *cm* až k novorozeněti (ač přeměny již daleko dříve se odehrávají), abychom došli ku přesvědčení, že střed lalůčku žlázy zaujat je tkání ostrůvkovou proto, poněvadž dává vznik acinům žlazovým, jež na periferii kolem něho se rozkládají. Způsob této přeměny je takový: ohnutý trámec ostrůvku (obyčejně s kapillarou v centru) nebo list mění se v dutinu sekretorickou tím způsobem, že buňky jeho ztrácejíce granula specifická i mitochondriální stávají se buňkami zymogenními vystoupením granul zymogenních a současnou přeměnou tvaru na formu pyramidální s granuly na hrotě (event. po celém těle) a s kulatým jádrem stěhujícím se ku basi, jež počíná se barviti basickým barvivem; sekundární vystoupení lumina dokončí stavbu dutiny sekretorické. Dutiny tyto jsou z počátku jednoduché, kyjovité váčky nebo váčky zpola i zcela i více než hemisferické, jež obkličují pak ostrůvek z části nebo kol dokola (v. obr. 6 a 7); nebo jde o onu formu přeměny stočeného trámce či listu, z níž vzniká u novorozence pozorovaná dutina sekretorická na způsob vchlípené čepičky, do jejíhož hilu ústí kanálek, vsunutá část vývodu, zřejmě v tuto formu vytažený a jejímž středem probíhá široká kapillara krevní, jíž ústící kanálek ponechal místo. Vedle těchto jednoduchých mohou povstati hned složené dutiny sekretorické tím způsobem, že střed ostrůvku změnil se hned v buňky centroacinerní, zatím co periferie differencovala se v obloučky buněk zymogenních.

Pokud povstaly jednoduché dutiny sekretorické, stávají se složenými, laločnatými tím způsobem, že v centru differencují se buňky centroacinerní a buňky zymogenní na periferii dělí se v obloučky; rýhy mezi nimi se prohlubují, až konečně dojde k dělení dutiny sekretorické v nové, jež opět stávají se laločnatými, znovu se dělí a celý process se opakuje. V tomto směru shodují se pozorování naše do značné míry s Laguesseovými. Pokud však týče se druhé fáse Laguesse-ova balancement, přeměny dutin sekretorických v ostrůvky, lze těžko pro ně se rozhodnouti. Může sice znamenati ten který útvar, kde aciny a ostrůvky v sebe přecházejí, obojí, i přeměnu ostrůvků v aciny i acinů v ostrůvky Avšak proti přeměně v ostrůvky svědčí:

1. Nahromadění ostrůvků kolem vývodů, kde dobře můžeme sledovati na stadiích starších a starších, že ostrůvky vyrostly z vývodů a že jen vzrůstem okolních partií jsou unášeny dále od vývodů.

2. Nevidíme jiných buněk z vývodů pučeti než buňky kalné, základní stavební jednotky ostrůvků; nemůže tedy nová partie žlázy do vývodu vústiti, než která povstala přeměnou ostrůvku; drobný vývod, na němž vidíme tak často nasedati větší ostrůvek krátce za místem vústění, nebývá, než ve vývod již se differencující stopka ostrůvku. Ostatně i menší ostrůvky a trámce mohou se v zevně sekretorické části změniti, aniž by musily vzrůsti ve veliké ostrůvky.

3. Kdyby se děla ona přeměna acinů v ostrůvky, musili bychom též nalézti lalůčky, jichž centrum bylo by tvořeno aciny a periferie transformovanými z acinů ostrůvky; neboť proč by se týkala tato přeměna, jíž podstoupiti má cyklicky každý acinus podle theorie o balancement, jen center lalůčků a nevystřídala periferie?

V tom směru připojujeme se tedy ku Karakascheff-ovi, jenž vidí v ostrůvcích jen předchůdce acinů; ovšem pro dobu embryonální.

Shrneme-li tedy poznatky, můžeme říci, že žláza roste dvojím způsobem:

1. V prvé době své čistě tubulosní existence pučením tubulů nových a prodlužováním starých.

2. V druhé době ubývá zvolna tohoto způsobu vzrůstu a nastoupí nový, jímž pojištěn je vydatně vzrůst žlázy; jest to:

a) pučení ostrůvků (od st. 4½ *cm*), jež rostou, unášeny jsou vzrůstem okolí, a rozkládají se postupně na periferii v dutiny sekretorické, dávajíce tak vznik novým partiím žlázy, novým lalůčkům, jež mezi ostatní se vkládají;

b) vzrůst, rozlaločnatění a dělení stávajících dutin sekretorických, jež z části z tubulů se differencovaly vypučením nebo přímou přeměnou jejich stěn, z části vznikly z ostrůvků. Dělením těchto dutin sekretorických vznikají nové, jež témuž processu podléhajíce, zajišťují tak vzrůst stávajících již partií.

Vysvětlení k obrázkům.

Obr. 1. Buňka kalná, osamocená, pučící z vývodu menšího kalibru pankreasu $10\frac{1}{2}$ *cm* dl. embrya čl.

Fix.: formol, barv. Dominici.

Zeiss. homog. immerse $^1/_{12}$, ap. 1·25, okular IV., tubus 160 *mm*. Kresleno v rovině stolku mikroskopu.

Obr. 2. Ostrůvek L. pankreasu embrya čl. $10\frac{1}{2}$ *cm* dl. Ohýbající se trámec, složený z buněk kalných i světlých, zabírá elementy vazivové.

Fix.: formol, barv. Dominici.

Zeiss. homog. immerse $^1/_{12}$, ap. 1·25, okular IV., tubus 160 *mm*. Kresleno v rovině stolku mikroskopu.

Obr. 3. Ostrůvek větší pankreasu emb. $10\frac{1}{2}$ *cm*. Od vývodu oddělen kapillarou krevní, složen je z buněk kalných i světlých, s naznačeným trámčitým uspořádáním; uvnitř elementy endotheliální s krvinkou.

Fix.: formol, barv. Dominici.

Zeiss. homog. immerse $^1/_{12}$, ap. 1·25, okular IV., tubus 160 *mm*. Kresleno v rovině stolku mikroskopu.

Obr. 4. Rozličné typy buněk kalných: granula specifická v celém těle, nebo jen na jednom konci **buňky**, nebo jen na periferii.

Fixace: formol, barv.: Dominici.

Zeiss. apochr. hom. immerse 2 *mm*, ap. 1·30, komp. okular IV., tubus 160 *mm*. Kresleno v rovině stolku mikroskopu.

Obr. 5. **Větší** ostrůvek L. (z pankreasu emb. čl. dl. 14 *cm*) souvisící s mateřským velkým vývodem (*vv*) pomocí drobného vývodu (*m v*); *o* = právě pučící malé ostrůvky, *t* = tubuly, v něž vývod z části se rozrůstá, *c* = ceva krevní.

Fixace: formol, barv.: Dominici.

Zeiss. achrom. *D*, okular IV., tubus 160 *mm*. Kresleno v rovině stolku mikroskopu.

Obr. 6. Malý ostrůvek pankreasu emb. čl. dl. $18\frac{1}{2}$ *cm*, měnící se na periferii v dutiny sekretorické.

i = buňky insulární, plné mitochondrial. elementů;

a = kyjovité aciny, *p* = místo přechodu buněk insulárních v buňky acinů.

Fixace: Regaud, barv.: želez. haematox. Heidenh.

Zeiss. achrom. *D*, okular IV., tubus 160 *mm*. Kresleno v rovině stolku mikroskopu.

Obr. 7. Z většího mateřského vývodu (*vv*) vyrůstá drobný vývod (*d v*), na nějž nasedá ostrůvek L. (*t o* = trámce ostrůvku, *k* = jeho kapilary); v pravo transformuje se ostrůvek z části v dutiny sekretorické (*d s*). Z pankreasu novorozeněte.

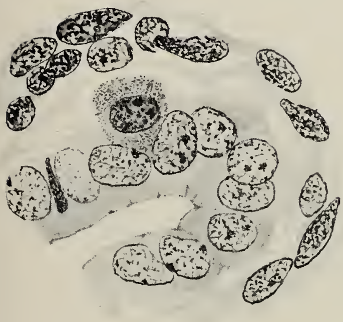
Fixace: formol, barv. Dominici.

Zeiss. homog. imm. $^1/_{12}$, ap. 1·25, okular II., tubus 160 *mm*. Kresleno v rovině stolku mikroskopu.

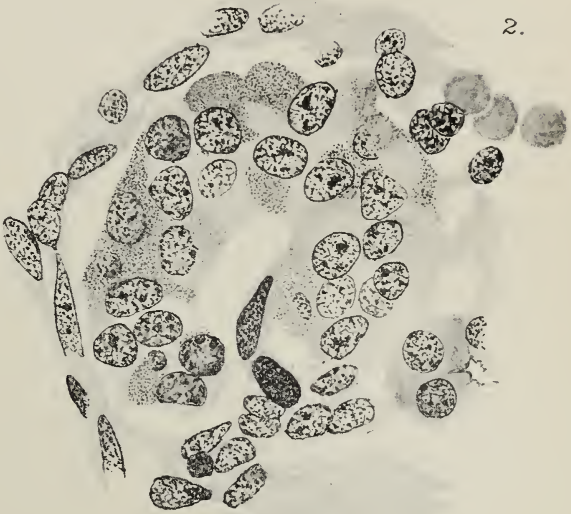
MUDr. Jan Wolf: Vývoj ostrůvků Langerhansových u člověka v době embryonální.

Tab. I.

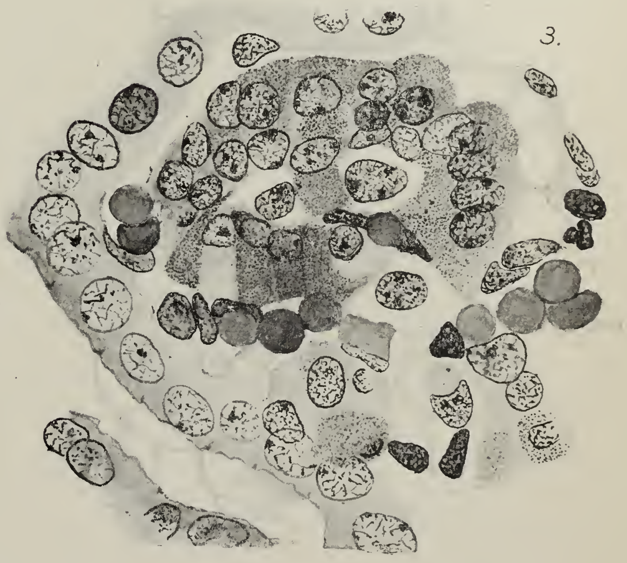
1.



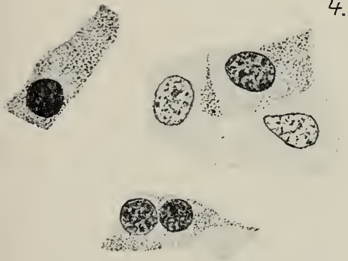
2.



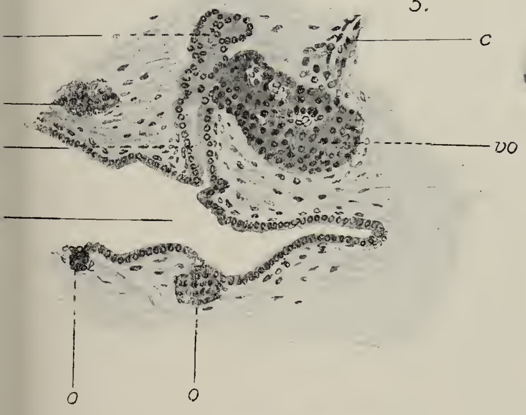
3.



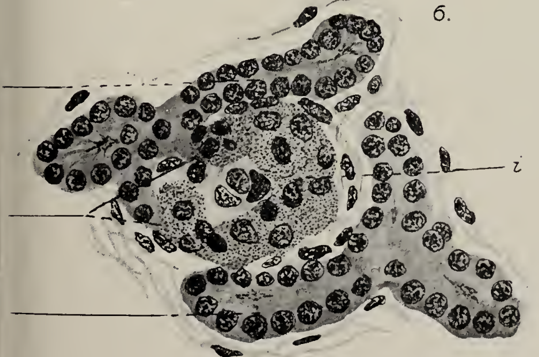
4.



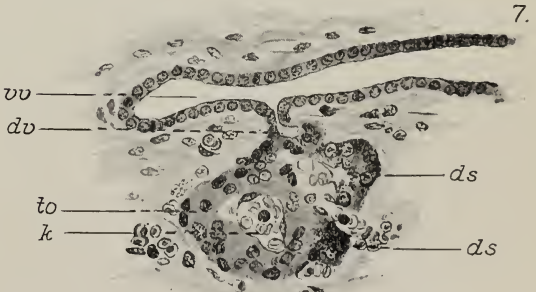
5.



6.



7.


vv
dv
ds
to
k
ds

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 30.

Zrůdnosti na korýších štramberského tithonu.

Napsal **Dr. Mauric Remeš** v Olomouci.

(Se sedmi obrázky.)

(Předloženo dne 3. června 1921.)

Při studiu štramberských korýšů napadly mi krunýře, jevící vždy na určitém místě nádorovitou zduřeninu. Takových krunýřů našel jsem mezi několika sty exemplářů asi deset. Bylo patrno, že zduření není nahodilé, nějakým zevním poraněním způsobené; proti tomu svědčila již vždy stejná lokalisace. Mimo to nebylo zevně nic patrného, co by poukazovalo na nějakou sílu, která z venku působila a proto nezbylo než hledati původ zduřeniny uvnitř. Krunýře fosilních raků zachovaly se buď jako tenké, namnoze neúplné skořápky na kamenných jádrech, nebo se samy vůbec nezachovaly i můžeme proto souditi na jejich tvar jenom dle tvaru a kresby jader. Případné výbrusy nebyly by tedy vedly k nějakým výsledkům.

Vzpomněl jsem si, že naduřeniny na krunýřích některých žijících korýšů způsobují cizopasní bopyridi a pojal podezření, že také zrůdnosti na korýších štramberských jsou jejich dílem. Laskavostí pana Dr. Julia Pie podařilo se mi získati z bývalého dvorního musea vídeňského takové exempláře korýšů se zduřeninami, bopyridy způsobenými, a sice byly mi poslány: Galathea squamifera Leach a Leander squilla Leach. z jaderského moře. Na první pohled bylo patrno, že recentní a fosilní zduřeniny úplně souhlasí a že jsou tedy nepochybně stejného původu.

Zduřeniny bývají kulovité, jednou více po druhé méně ostře ohraničené, a více nebo méně vypouklé, nestejně veliké. Je-li skořápka zachovalá, není na ní porucha souvislosti patrná, kresba neporušená. Charakteristickým pro tyto zduřeniny — mimo uvedené známky — je jejich sídlo. Nalezáme je totiž vždy na zadní zevní straně krunýře, jednou vpravo, podruhé vlevo. Nejzřetelnější jsou na dvou kusech: Galathea antiqua Möricke a Galathea striata Remeš, na nichž zaujímají pravou zadní část krunýře a tvoří opravdový nádorek. Tyto nádorky u obou Galatheí nejvíce souhlasí s oněmi, které vidíme na uvedených recentních formách. Zvláště u Leander squilla je ohraničení velice ostré a zřetelné, u Galathea squamifera méně.

Dále jsem zduřeniny pozoroval u: Cyclothyreus strambergensis Remeš, Prosopon oxythyreiforme Gem., Prosopon Katholickýi Rem., v pravé zadní části; u Prosopon polyodon Reuss a Pr. bidentatum Reuss v levé zadní části. Mimo to u Pr. complanatum Reuss a Pr. complanatiforme Möricke též v levé zadní části, kteréžto kusy jsem však nezobrazil, protože nejsou příliš zřetelné. Myslím, že ona část, kde se zduřeniny vyskytují, odpovídá krajině žaberní.

Na základě recentních exemplářů a oněch, které jsem tu uvedl, soudím, že také na fosilních krunýřích je zduřenina způsobena stejnou příčinou, tedy bopyridy, kteří žili jako cizopasníci v dutině žaberní těchto korýšů.

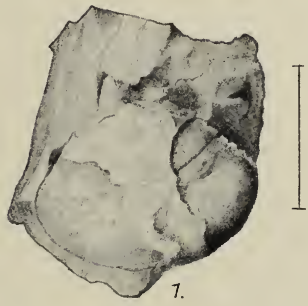
Není mi známo, že by v palaeontologické literatuře byla nějaká zpráva o podobných nálezech. Ze zoologické vím o díle G. O. Sarse: An account of the Crustacea of Norway vol. II. Isopoda. Bergen 1899, kde podobné zrůdnosti jsou zobrazeny. Nebylo mi možno dílo to si zaopatřiti a blíže prohlédnouti. Z mých nálezů vyplývá, že již v tithonu žili bopyridi nebo jim blízcí cizopasní korýši, kteří způsobovali stejné změny na krunýři svých hostitelů jako dosud žijící.

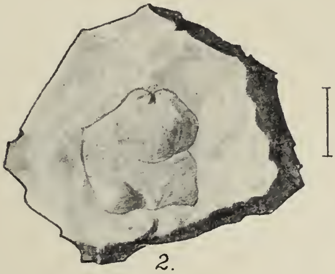
Moje kusy, uložené v mé soukromé sbírce, pocházejí vesměs z bílého vápence štramberského.

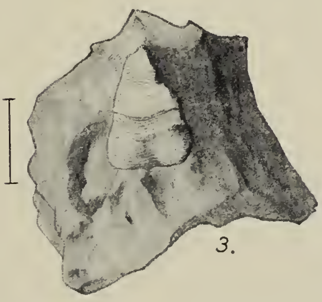
Vysvětlivky k tabulce:

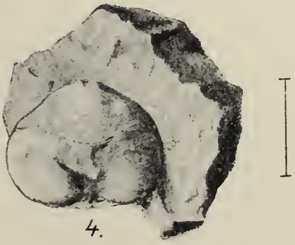
1. Prosopon oxythyreiforme Gem.
2. Prosopon bidentatum Reuss.
3. Galathea striata Remeš.
4. Cyclothyreus strambergensis Remeš.
5. Prosopon polyodon Reuss.
6. Prosopon Katholickýi Remeš.
7. Galathea antiqua Möricke.

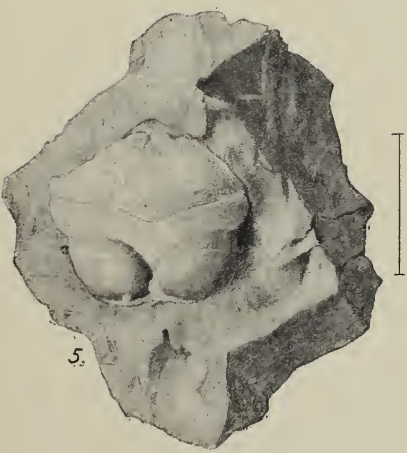
Dr. MAURIC REMEŠ: **Zrůdnosti na korýších štramberského tithonu.**

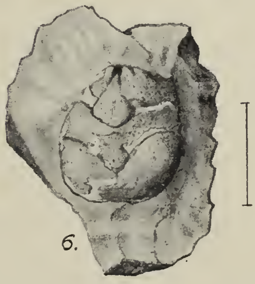

1.

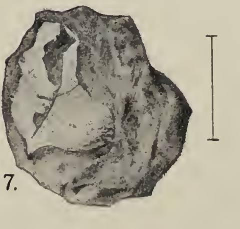

2.


3.


4.


5.


6.


7.

Rozpravy České Akademie: Třída II. Roč. XXX. Čís. 30.

O invariantech jisté rovnice s derivacemi parciálními lineárné.

Napsal

Dr. Frant. Rádl.

(Předloženo dne 15. dubna 1921.)

1. V R. Č. A. XXVII. č. 23 a 40 byla u rovnice s der. parc. lin. n^{ho} ř., v níž v derivacích je dle y derivováno pouze v řádu prvním,

$$f(z) = \sum_{0}^{n-1}{}^{\varkappa} \left(p_{\varkappa,1} \frac{\partial^{\varkappa+1} z}{\partial x^{\varkappa} \partial y} + p_{\varkappa,0} \frac{\partial^{\varkappa} z}{\partial x^{\varkappa}} \right) = 0, \tag{1}$$

definována transformace dle systému

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + q z_1 + h z = 0, \quad z_1 = \sum_{0}^{n-2}{}^{\varkappa} \left(q_{\varkappa,1} \frac{\partial^{\varkappa+1} z}{\partial x^{\varkappa} \partial y} + q_{\varkappa,0} \frac{\partial^{\varkappa} z}{\partial x^{\varkappa}} \right), \tag{2}$$

pak dle obráceného systému

$$\sum_{0}^{n-2}{}^{\varkappa} \left(r_{\varkappa,1} \frac{\partial^{\varkappa+1} z}{\partial x^{\varkappa} \partial y} + r_{\varkappa,0} \frac{\partial^{\varkappa} z}{\partial x^{\varkappa}} \right) + k z = 0, \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + r z, \tag{3}$$

a odvozeny byly hlavní vlastnosti těchto transformací. Systémy tyto možná zevšeobecniti jednak ve tvaru

$$\sum_{0}^{s+1}{}^{\varkappa} \left(q_{\varkappa} \frac{\partial^{\varkappa} z_1}{\partial x^{\varkappa}} \right) + \sum_{0}^{s}{}^{\varkappa} \left(h_{\varkappa} \frac{\partial^{\varkappa} z}{\partial x^{\varkappa}} \right) = 0, \quad z_1 = \sum_{0}^{n-s-2}{}^{\varkappa} \left(q_{\varkappa,1} \frac{\partial^{\varkappa+1} z}{\partial x^{\varkappa} \partial y} + q_{\varkappa,0} \frac{\partial^{\varkappa} z}{\partial x^{\varkappa}} \right) \tag{4}$$

nebo v obráceném pořádku

$$\sum_{0}^{n-s-2}{}^{\varkappa} \left(r_{\varkappa,1} \frac{\partial^{\varkappa+1} z_1}{\partial x^{\varkappa} \partial y} + r_{\varkappa,0} \frac{\partial^{\varkappa} z}{\partial x^{\varkappa}} \right) + \sum_{0}^{s}{}^{\varkappa} \left(k_{\varkappa} \frac{\partial^{\varkappa} z}{\partial x^{\varkappa}} \right) = 0, \quad z_1 = \sum_{0}^{s+1}{}^{\varkappa} \left(r_{\varkappa} \frac{\partial^{\varkappa} z}{\partial x^{\varkappa}} \right); \tag{5}$$

systémy (2), (3) obdržíme totiž dosazením do (4), (5) pro $s = 0$. Jiný nejjednodušší případ vzniká pro $s = n - 2$, pak v syst. (4), (5) jest

$$q_{\varkappa} = r_{\varkappa} = p_{\varkappa,1}, \quad q_{0,0} = r_{0,0} = p_{n-1,0}.$$

Abychom mohli přistoupiti k úloze, určiti všechny rovnice tvaru (1) řešitelné těmito transformacemi, nutno nejdříve — a to provedeno v této práci — zavésti do systémů (2), (3) tolik invariantů analogických h, k, aby pomocí jich bylo možná určiti koefficienty rovnice (1); pak vyšetřeny vlastnosti těchto nově definovaných veličin.

2. Diff. výraz n — 1^{ho} ř. v syst. (2) možná psát opět buď dle syst. (2) nebo dle (3), příslušné invarianty značme (h^2), $(h\,k)$; tím vzniknou dva diff. výrazy ř. n — 2ho, jejichž invarianty buďtež (h^3), $(h^2\,k)$; $(h\,k\,h)$, $(h\,k^2)$ atd. Podobně u diff. výrazu n — 1ho ř. v syst. (3) definujme invarianty (k^2), $(k\,h)$ atd., všeobecně tedy jest patrný význam symbolů (h^r), $(h^r\,k^s\,h^t)$ a pod. Vypsání diff. výrazu (1) pomocí syst. (2) nazývejme *úkonem* h, pomocí (3) *úkonem* k; došli jsme tedy na př. k invariantu $(h^r\,k^s\,h^t)$ tím, že jsme provedli napřed úkon h za sebou r krát, pak $s$krát úkon k, načež opět úkon h posloupně $t$krát. Počet všech úkonu, tedy součet mocnitelu na př. u posledního invariantu $r + s + t$ nechť sluje *řád* invariantu; řád tento nejvýš možný je patrně n — 1.

Pišme dle toho syst. (2) ve tvaru

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial z_1}{\partial x} + \bar{q}_1 z_1 + h\,z = 0,\ z_1 = \frac{\partial z_2}{\partial x} + \bar{q}_2 z_2 + (h^2)\ z,\\ z_2 = \frac{\partial z_3}{\partial x} + \bar{q}_3 z_3 + (h^3)\ z,\ \ldots,\\ z_{n-2} = \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + \bar{q}_{n-1} z_{n-1} + (h^{n-1})\,z,\ z_{n-1} = \frac{\partial z}{\partial y} + \bar{q}_0\,z,\\ [q_1 = q \text{ v syst. (2)}]\end{gathered}\right| \tag{7}$$

a podobně syst. (3) dejme tvar

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + \bar{r}_{n-1} z_{n-1} + (k^{n-1})\,z_{n-2} + (k^{n-2})\,z_{n-3} + \ldots + (k^2)\,z_1 + k\,z = 0,\\ z_{n-1} = \frac{\partial z_{n-2}}{\partial x} + \bar{r}_{n-2} z_{n-2},\ z_{n-2} = \frac{\partial z_{n-3}}{\partial x} + \bar{r}_{n-3} z_{n-3},\\ \ldots,\ z_2 = \frac{\partial z_1}{\partial x} + \bar{r}_1 z_1,\ z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + \bar{r}_0\,z,\\ [\bar{r}_0 = r \text{ v syst. (3)}].\end{gathered}\right| \tag{8}$$

Můžeme tvrditi, že v druhém syst. jest

$$\bar{r}_{n-1} = \bar{q}_0,\ \bar{r}_{n-2} = \bar{q}_1,\ \bar{r}_{n-3} = \bar{q}_2,\ \ldots,\ \bar{r}_0 = \bar{q}_{n-1}; \tag{9}$$

spojíme-li totiž v (7) prvních n — 1 rovnic v jednu vyloučením z_2, z_3, ..., z_{n-1}, obdržíme

$$\frac{\partial^{n-1} z_{n-1}}{\partial x^{n-1}} + p_{n-2,1} \frac{\partial^{n-2} z_{n-1}}{\partial x^{n-2}} + p_{n-3,1} \frac{\partial^{n-3} z_{n=1}}{\partial x^{n-3}} + \ldots +$$

$$+ p_{0,1}\,z_{n-1} + .\ \frac{\partial^{n-2} z}{x^{n-2}} + \ldots + .\ z = 0,\ z_{n-2} = \frac{\partial z}{\partial y} + p_{n-1,0}\,z.$$

při čemž koefficienty $p_{n-2,1}, \ldots, p_{0,1}$ proto se tu vyskytnou, poněvadž jest to syst. (4) pro $s = n - 2$, platí tudíž relace (6). Jestliže analogicky spojíme v (8) $n - 1$ posledních rovnic v jednu eliminací $z_{n-2}, z_{n-3}, \ldots, z_1$, vznikne syst. (5) pro $s = n - 2$, tedy dle (6) objeví se tytéž koefficienty, totiž

$$\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + p_{n-1,0}\, z_{n-1} + \cdot \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} + \ldots + \cdot z = 0,$$

$$z_{n-1} = \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + p_{n-2,1} \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} + \ldots + p_{0,1}\, z;$$

poněvadž v obou posledních syst. mají diff. výrazy $n - 1^{hv}$ ř. stejné koefficienty, lze je rozložiti v tytéž součásti 1^{ho} ř., čímž relace (9) jsou odůvodněny.

3. Zaveďme v (7), (8) substituci $z \mid \lambda z$, koefficienty nabudou tvaru

$$\overline{q}_s + \frac{\lambda_x'}{\lambda}, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad n - 1, \quad \overline{q}_0 + \frac{\lambda_y'}{\lambda},$$

všechny invarianty $h, \ldots, (h^{n-1}), k, \ldots, (k^{n-1})$ zůstanou nezměněny. Zůstaly by patrně beze změny též všechny ostatní invarianty $(h\, k)$, $(h^2\, k)$, $(h\, k^2), \ldots$, jakkoli složené z úkonů h, k. To můžeme soudit hned z toho, jakmile jsme se přesvědčili, že v syst. (2), (3) substituce $z \mid \lambda z$ nemění invarianty h, k,[1] neboť každý jiný invariant můžeme pokládat za jeden z invariantů h nebo k příslušného diff. výrazu. Tudíž:

Všechny invarianty rovnice f zůstávají substitucí $z \mid \lambda z$ nezměněny.

Zvolme nyní λ tak, aby

$$\overline{q}_0 + \frac{\lambda_y'}{\lambda} = 0 \quad \text{čili} \quad \lambda = e^{-\int \overline{q}_0\, d y}, \tag{10}$$

takže u rovnice f vymizí koefficient $p_{n-1,0}$; nazývejme tvar tento *normálním*, poněvadž v následujícím o tomto tvaru všechny vlastnosti nutno odvozovati.

Položíme-li

$$q_s + \frac{\lambda_x'}{\lambda} = \frac{\partial\, l\, A_s}{\partial x}, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad n - 1, \tag{11}$$

možná tvrditi, že platí

$$\frac{\partial^2 l\, A_s}{\partial x\, \partial y} = (h^{s-1}\, k^{n-s-1}\, h) - (h^{s-1}\, k^{n-s}); \tag{12}$$

dříve nežli tuto relaci odůvodníme, uveďme její důsledek, že totiž rovnici f možná pak psát buď dle (7) ve tvaru

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z_1}{\partial x} + z_1 \int [(h\, k^{n-3}\, h) - (h\, k^{n-2})]\, d y + h\, z = 0, \\ z_1 = &\frac{\partial z_2}{\partial x} + z_2 \int [(h\, k^{n-3}\, h) - (h\, k^{n-2})]\, d y + (h^2)\, z, \ldots, \quad z_{n-1} = \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned} \tag{13}$$

---

[1] RČA. XXVII. č. 23, § 2.

nebo podle syst. (8)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + (k^{n-1})\, z_{n-2} + \ldots + k\, z = 0, \\ z_{n-1} = &\frac{\partial z_{n-2}}{\partial x} + z_{n-2} \int [h\, k^{n-3}\, h) - (h\, k^{n-2})]\, d\, y, \ldots, \\ z_1 = &\frac{\partial z}{\partial x} + z \int [(h^{n-1}) - (h^{n-2}\, k)]\, d\, y, \end{aligned}\right| \quad (14)$$

v kterýchžto dvou tvarech jsou v koefficientech pouze invarianty, tudíž:

Rozvedeme-li koefficienty rovnice f jistým způsobem, lze je vyjádřiti ve dvou tvarech pomocí invariantů rovnice f.

Následkem toho dvě rovnice tvaru f, souhlasící v invariantech buď syst. (13) nebo syst. (14), nemohou se lišiti leč nejvýš substitucí $z \mid \lambda\, z$, což je věta obrácená k oné, jež uvedena začátkem tohoto §. Vyslovíme však tuto vlastnost všeobecněji ku konci § 6.

Zbývá dokázat relaci (12). Předpokládáme-li, že platí pro řád n rovnice f, má platnost též pro řád $n + 1$. Neboť píšeme-li rovnici tvaru (1) řádu $n + 1^{\text{ho}}$ dle tvaru (2), možná v syst. tak vzniklém diff. výraz n^{ho} ř. nahradit systémem (13), v němž však před každý invariant připíšeme úkon h na označení provedeného rozkladu rovnice řádu $n + 1^{\text{ho}}$ dle (2); pak platí formule (12) při řádu rovnice $n + 1$ pro $s = 2, 3, \ldots, n$ i zbývá určiti pouze $\frac{\partial^2 l\, A_1}{\partial x \partial y}$.

Pišme za tím účelem rovnici $n + 1^{\text{ho}}$ ř. ve tvaru (8), při čemž první dvě rovnice tohoto syst. spojme v jednu, tedy

$$\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial\, l\, A_1}{\partial x} \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + .\, z_{n-1} + (k^{n-1})\, z_{n-2} + \ldots + k\, z = 0,$$

$$z_{n-1} = \frac{\partial z_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial\, l\, A_2}{\partial x}\, z_{n-2}, \ \ldots, \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial\, l\, A_n}{\partial x}\, z;$$

pak v tomto syst. u diff. výrazu 2^{ho} ř.

$$\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial\, l\, A_1}{\partial z} \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + .\, z_{n-1}$$

invarianty h, k, jež nutno ovšem značiti $(k^{n-1}\, h)$, (k^n), mají hodnotu

$$(k^{n-1}\, h) = .,\ (k^n) = . - \frac{\partial^2 l\, A_1}{\partial x \partial y},$$

kde bod značí koefficient u z_{n-1}; rozdíl těchto dvou rovnic dává relaci pro $\frac{\partial^2 l\, A_1}{\partial x \partial y}$, která souhlasí s formulí (12), jež tudíž tím dokázána též pro řád $n + 1$. Snadno se přesvědčíme o platnosti formule pro $n = 2$, platí tedy všeobecně.

Při provádění úplné indukce mohli bychom ovšem též obráceně rovnici $n + 1^{\text{ho}}$ ř. psát dle syst. (3) a v něm výraz n^{ho} ř. rozložit dle (14) atd.

4. Všech invariantů v syst. (13), (14) jest $3\,n - 4$, kdežto rovnice f ve tvaru normálním má koefficientů $2\,n - 2$. Ukážeme, že k vypsání syst. (13), (14), tedy *k vyjádření koefficientů rovnice f ve tvaru normálním stačí udati tolik invariantů, kolik je koefficientů,* tedy $2\,n - 2$. Jsou totiž některé invarianty v syst. (13), (14) stejné, některé lze vyjádřit pomocí jisté části ostatních.

Za tím účelem syst. (7), jejž upravíme vzhledem k (10), pišme ve tvaru

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial l A_1}{\partial x} z_1 + h z = 0,\ z_1 = \sum_0^{n-3}{}^{\varkappa} \left(s_{\varkappa,} \frac{\partial^{\varkappa+1} z_2}{\partial x^{\varkappa} \partial y} + s_{\varkappa,0} \frac{\partial^{\varkappa} z_2}{\partial x^{\varkappa}} \right) + \\ &\qquad + (hk)\, z = 0, \quad z_2 = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial l A_{n-}}{\partial x} z \end{aligned} \tag{a}$$

a syst. (8) podobně redukovaný upravme na tvar

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial l A_1}{\partial x} z_1 + (k\, h)\, z_2 + h\, z = 0, \quad z_1 = \\ &= \sum_0^{n-3}{}^{\varkappa} \left(s_{\varkappa,1} \frac{\partial^{\varkappa+1} z_2}{\partial x^{\varkappa} \partial y} + s_{\varkappa,1} \frac{\partial^{\varkappa} z_2}{\partial x^{\varkappa}} \right), z_2 = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial l A_{n-1}}{\partial x} z\,; \end{aligned} \tag{b}$$

koefficienty $s_{k,1}$, $s_{k.0}$ jsou u diff. výrazů $n - 2^{\text{ho}}$ ř. v (a) i v (b) stejné. Vyloučením z_1 z prvních dvou rovnic syst. (a) plyne

$$\frac{\partial^{n-1} z_2}{\partial x^{n-2} \partial y} + . \quad . + .\, z_2 + (h\, k) \frac{\partial z}{\partial x} + \left[\frac{\partial (hk)}{\partial x} + \frac{\partial l A_1}{\partial x} (h\, k) + h \right] z = 0$$

a týmž postupem ze syst. (b) vznikne

$$\frac{\partial^{n-1} z_2}{\partial x^{n-2} \partial y} + \ldots + .\, z_2 + (k\, h) \frac{\partial z}{\partial x} + \left[\frac{\partial l A_{n-1}}{\partial x} (k\, h) + k \right] z = 0\,;$$

poněvadž oba diff. výrazy $n - 1^{\text{ho}}$ ř. jsou v obou relacích totožné, obdržíme porovnáním předposledních členů

$$(h\, k) = (k\, h) \tag{15}$$

a porovnáním členů posledních s použitím formule (12)

$$h - k = - \frac{\partial (h\, k)}{\partial x} + (h\, k) \int [(h^{n-1}) - (h^{n-2}\, k) - (h\, k^{n-2}) + (k^{n-1})]\, d\, y. \tag{16}$$

Vyšetříme nyní důsledek relací (15), (16).

5. Především lze na základě (15) obdržeti theorém, odůvodňující název „invariantů", kteréžto pojmenování je podepřeno i jinými větami: *Hodnoty ($h^s\, k^t$) zůstávají vzhledem ke všem permutacím úkonů h, k invariantní.*[1])

---

[1]) Věta tato jakož i její důkaz platí analogicky u diff. rovnic lin. obyč.

Poněvadž podle této věty platí na př.

$$(h^r k^s h^t) = (h^{r+t} k^s),$$

lze každý invariant rovnice f co do hodnoty všeobecně označit

$$(h^s k^t)\,;\ s,\ t = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\,;\ 0 \leqq s+t \leqq n-1.$$

Touž hodnotu jako invariant $(h^s k^t)$ má tedy celkem $\dfrac{(s+t)!}{s!\,t!}$ invariantů. Poznáme, že současně vyplyne, že diff. výrazy ř. $n-s-t^{ho}$, vzniklé provedením úkonů $h^s k^t$ jakkoli permutovaných, jsou totožné.

Předpokládejme, že věta platí (i co do totožnosti vzniklých diff. výrazů) o invariantech ř. $s+t^{ho}$, dokážeme, že též má platnost pro řád invariantů $s+t+1$; poněvadž má dle (15) platnost pro $2^{hý}$ ř. invariantu (podle (a), (b) i co se týče rovnosti příslušných diff. výrazů ř. $n-1^{ho}$), bude tím dokázána všeobecně. Řád invariantů $s+t+1$ vznikne připojením buď úkonu h nebo úkonu k k s úkonům h a t úkonům k, při čemž $s+t \leqq n-2$; připojme na př. úkon h. Máme tedy dokázati, že

$$(h^{s+1} k^t) = (\overline{h^{s+1} k^t}), \tag{c}$$

při čemž pruh na pravé straně značiž libovolnou permutaci úkonů h, k.

Invarianty $(\overline{h^{s+1} k^t})$ rozdělme na dvě části, z nichž první mějž na konci úkon k, je tedy o tvaru $(\overline{h^{s+1} k^{t-1}}\,k)$, druhá nechť má na konci úkon h čili má tvar $(\overline{h^s k^t}\,h)$. Poznáme snadno, že platí

$$(h^{s+1} k^t) = (\overline{h^{s+1} k^{t-1}}\,k),\quad (h^s k^t h) = (\overline{l^s k^t}\,h), \tag{d}$$

takže zbude k důkazu relace (c) pouze odůvodniti rovnost

$$(h^{s+1} k^t) = (h^s k^t h). \tag{e}$$

O platnosti relací (d) se přesvědčíme, vynecháme-li v první na konci obou stran úkon k, v druhé též na konci obou stran úkon h; pak jsou relace platné dle předpokladu a vzniklé diff. výrazy jsou totožné rovněž dle předpokladu. Jestliže tedy u těchto diff. výrazů provedeme úkon k, obdržíme první relaci (d) a nově vzniklé diff. výrazy ř. $n-s-t-1^{ho}$ jsou samozřejmě stejné, provedením úkonu h vznikne druhá relace (d) a vzniklé diff. výrazy jsou totožné.

Relace (e) plyne z této úvahy: Dle předpokladu platí

$$(h^s k^t) = (\overline{h^s k^t}),\quad s+t \leqq n-1 \tag{17}$$

pro každý řád rovnice, tedy též pro řád $n-1$, takže relace platí u diff. výrazu ř. $n-1^{ho}$ v syst. (2). Tedy o celé rovnici (1), jak je vypsána v syst. (2), platí

$$(h^{s+1} k^t) = (h\,\overline{h^s k^t}),$$

v čemž je též relace (e) zahrnuta. Tím jest odůvodněn vztah (c) a tedy dokázán celý theorém.

Při odůvodňování relace (c) jsme mohli se stejným oprávněním rozděliti invarianty $(\overline{h^{s+1}\,k^t})$ na dvě části dle toho, mají-li na *začátku* h nebo k, načež by bylo dokázati platnost vztahů

$$(h^{s+1}\,k^t) = (h\,\overline{h^s\,k^t}),\quad (k\,h^{s+1}\,k^{t-1}) = (k\,\overline{h^{s+1}\,k^{t-1}})\,;\quad (h^{s+1}\,k^t) = (k\,h^{s+1}\,h^{t-1}),$$

jichž správnost se odůvodní právě dle předešlé úvahy.

Následkem dokázané věty jsou v syst. (13) invarianty co do hodnoty různé pouze h, (h^2), . . ., (h^{n-2}) a pak všechny invarianty ř. $n - 1^{\text{ho}}$, totiž (h^{n-1}), $(h^{n-2}\,k)$, . . ., $(h\,k^{n-2})$, (k^{n-1}), celkem $2\,n - 2$ čili tolik, kolik koefficientů má rovnice f v normálním tvaru. Týž počet invariantů hodnotou různých má syst. (14), totiž k, (k^2), . . ., (k^{n-2}) a pak tytéž invarianty $n - 1^{\text{ho}}$ ř. jako v syst. (13).

6. Přikročme k důsledku relace (16). Proveďme u rovnice f úkon h podle syst. (2) $s - 1$krát za sebou, obdržíme diff. výraz ř. $n - s + 1^{\text{ho}}$, u něhož relace (16) má ovšem též platnost, zní tedy pro původní rovnici f

$$\begin{aligned}(h^s) - (h^{s-1}\,k) = -\frac{\partial\,(h^s\,k)}{\partial\,x} + \\ + (h^s\,k)\int[(h^{n-1}) - (h^{n-2}\,k) - (h^s\,k^{n-s-1}) + (h^{s-1}\,k^{n-s})]\,d\,y.\end{aligned} \tag{18}$$

Analogicky platí ovšem užitím úkonu k podle syst. (3) posloupně $s - 1$krát

$$\begin{aligned}(h\,k^{s-1}) - (k^s) = -\frac{\partial\,(h\,k^s)}{\partial\,x} + \\ + (h\,k^s)\int[(h^{n-s}\,k^{s-1}) - (h^{n-s-1}\,k^s) - (hk^{n-2}) + (k^{n-1})]\,d\,y.\end{aligned} \tag{19}$$

Všeobecně proveďme napřed u rovnice f úkony $h^s\,k^t$ a užijme pak u vzniklého diff. výrazu ř. $n - s - t^{\text{ho}}$ relace (16) i obdržíme všeobecnou formuli

$$\begin{aligned}(h^{s+1}\,k^t) - (h^s\,k^{t+1}) = -\frac{\partial\,(h^{s+1}\,k^{t+1})}{\partial\,x} + \\ + (h^{s+1}\,k^{t+1})\int[(h^{n-t-1}\,k^t) - (h^{n-t-2}\,k^{t+1}) - (h^{s+1}\,k^{n-s-2}) + (h^s\,k^{n-s-1})]\,d\,y,\end{aligned} \tag{20}$$

v níž ovšem relace (18), (19) jsou též zahrnuty.

Dosazujeme-li všechny možné hodnoty za s, t, obdržíme vzhledem k podmínce

$$s + t \leqq n - 3$$

celkem $\dfrac{n^2 - 3\,n + 2}{2}$ relací. Počet všech invariantů co do hodnoty různých u rovnice f je $\dfrac{n\,(n + 1)}{2} - 1$, odečteme-li počet všech vztahů (20) mezi těmito invarianty platících, obdržíme obnos $2\,n - 2$; to jest však právě počet koefficientů u rovnice f ve tvaru normálním, a týž počet invariantů musí být tedy neodvislý. Neexistují tudíž ještě snad jiné neodvislé vztahy mezi invarianty ve formuli (20) nezahrnuté, což bylo záhodno zjistiti.

Je-li tedy u rovnice f dáno $2n-2$ libovolných co do hodnoty různých invariantů, lze ostatní vypočísti a to jednoznačně, poněvadž vztahy (20) jsou vzhledem k neznámým algebraické a lineárné; rovnici f lze pak psát buď ve tvaru (13) nebo (14), tedy známe i koefficienty rovnice f ve tvaru normálním. Nyní možná vysloviti všeobecně větu obrácenou k oné, jež uvedena na začátku § 3.:

Dvě rovnice f v normálním tvaru, jež se shodují v jakýchkoli $2n-2$ hodnotou různých invariantech, jsou totožné.

7. Zmiňme se o invariantech rovnic navzájem adjungovaných; dokážeme o nich theorém:

Z invariantů dané rovnice f obdržíme invarianty rovnice adjungované záměnou úkonů h, k.

K důkazu uvažme, že syst. (2), píšeme-li jej v obráceném pořádku s diff. výrazy adjungovanými, definuje rovnici $g(z)$ adjungovanou k $f(z)$, totiž

$$g(z) = (-1)^{n-1} \sum_{0}^{n-2} {}^{\varkappa} \left[\frac{\partial^{\varkappa+1} (q_{\varkappa,1} z_1)}{\partial z^{\varkappa} \partial y} - \frac{\partial^{\varkappa} (q_{\varkappa,0}\, z_1)}{\partial x^{\varkappa}} \right] + \\ + hz = 0,\; z_1 = -\frac{\partial z}{\partial x} + qz; \tag{21}$$

odtud poznáváme, že platí o invariantech rovnice adjungované, jež označíme obloukovou čárkou ’, především

$$k' = h;$$

z duvodů reciprocity anebo, píšeme-li syst. (3) v pořádku obráceném s diff. výrazy adjungovanými, soudíme na vztah

$$h' = k.$$

Podle theorému má platiti všeobecně

$$(h^s k^t)' = (h^t k^s); \tag{22}$$

jako v syst. (2) a (21) jsou vzniklé výrazy diff. ř. $n-1$^ho^ navzájem adjungovány, tak shledáme, že jest tomu všeobecně provedením úkonů $k^s h^t$ u rovnice f a úkonů $h^s k^t$ u rovnice adjungované g. Předpokládejme správnost relace (22) i adjungovanost příslušných diff. výrazů ř. $n-s-t$^ho^, pak možná dokázat platnost těchže vlastností i pro řád invariantů o 1 vyšší.

Řád tento se zvýší, jestliže u diff. výrazu ř. $n-s-t^{ho}$ vzniklého při rovniri f provedeme úkon na př. h; při rovnici g jest příslušný diff. výraz k tomuto adjungován, provedeme-li tedy u něho úkon k, bude platit

$$(h^s k^{t+1})' = (h^{t+1} k^s)$$

a nově vzniklé diff. výrazy ř. $n - s - t - 1^{\text{ho}}$ jsou vzhledem k syst. (2), (21) opět adjungovány. Poněvadž vlastnosti tyto platí pro první řád invariantů, jsou platny všeobecně.

Podle § 6. plyne nyní též věta obrácená: Platí-li o invariantech dvou rovnic tvaru f v normálním tvaru $2n - 2$ relací tvaru (22), jsou tyto rovnice navzájem adjungovány.

O jisté rovnici s derivacemi parciálními lineární bez transformační řady.

Napsal

dr. **Frant. Rádl.**

(Předloženo dne 6. května 1921.)

1. Když odvozeny byly v R. Č. A. XXX., č. 31. vlastnosti invariantů rovnice

$$f(z) = \sum_{0}^{n-1} {}^{\varkappa} \left(p_{k,1} \frac{\partial^{\varkappa+1} z}{\partial x^{\varkappa} \partial y} + p_{\varkappa,o} \frac{\partial^{\varkappa} z}{\partial x^{\varkappa}} \right) = 0, \tag{1}$$

jest přirozené vyšetřovati vlastnosti jejích transformačních řad

$$\ldots f_{-j} \ldots f_{-1},\ f,\ j_1 \ldots f_i \ldots \tag{2}$$

definovaných na základě systémů R. Č. A. XXX. č. 31. (2), (3), (4), (5). V následujícím uvedeno, proč tři z těchto čtyr systémů z úvahy vyloučíme, stanoven vztah mezi invarianty rovnice původní a transformované, pak, jak je nejprve nutno pro složitost celé úlohy, vyšetřena je rovnice f, k níž následkem vymizení jistých invariantů nelze určiti ani rovnici f_1 ani f_{-1}, která tudíž jest bez transformační řady.

2. Systém R. Č. A. XXX. č. 31. (4) nevede k jediné rovnici f_1, nýbrž k systému rovnic, nevzniká tu tedy řada (2), proto systém tento nebudeme vyšetřovati.

Co se týče systémů R. Č. A. XXX. č. 31. (3), (8), které značme resp. S, S', dokážeme o nich větu:

Vytkneme-li z řady rovnic (2) definované systémem S po obou stranách rovnice f každou $s + 1^{nt}$ rovnici, obdržíme řadu

$$\ldots f_{-j(s+1)} \ldots f_{-(s+1)},\ f,\ f_{s+1} \ldots f_{i(s+1)} \ldots \tag{3}$$

příslušnou k systému S'.

Podle této věty systém S' nevede k novým rovnicím a možná jej z úvahy vyloučiti. K důkazu uvažme, že provedeme-li u rovnice f transformaci $s + 1^{\text{krát}}$ za sebou dle systému S, obdržíme z f posloupně rovnice $f_1, \ldots, f_{s+1}$, které souvisí dle $2^{\text{hé}}$ rovnice systému S vztahy

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + \varrho_0 z, \ (\varrho_0 = r), \quad z_2 = \frac{\partial z}{\partial x} + \varrho_1 z_1, \ldots, \quad z_{s+1} = \frac{\partial z_s}{\partial x} + \varrho_s z_s. \qquad (a)$$

Souvislost rovnic f, f_{s+1} je tedy dána relací

$$z_{s+1} = \frac{\partial^{s+1} z}{\partial x^{s+1}} + \cdot \frac{\partial^s z}{\partial x^s} + \ldots + \cdot z = \varphi(z), \qquad (b)$$

o níž lze tvrditi, že jest totožná s druhou relací systému S'

$$z = \frac{\partial^{s+1} z}{\partial x^{s+1}} + r_s \frac{\partial^s z}{\partial x^s} + \ldots + r_0 z; \qquad (c)$$

neboť podle R. Č. A. XXIX. č. 1. lze z rovnice f obdržeti na základě relace (b) rovnici transformovanou jedinou (ne systém několika rovnic) pouze ve dvou případech: buď rovnice f, φ mají $s + 1$ společných partikulárních integrálů nebo platí pro transformaci systém tvaru S'. V našem případu společná partik. řešení rovnic f, φ nejsou možná, poněvadž pak totéž by platilo o rovnici f a diff. výrazech 1^{ho} řádu v (a), tudíž platí druhá možnost, čímž tvrzení dokázáno.

Že též obráceně řada (3) je obsažena v řadě (2), plyne odtud, že diff. výraz (c) lze rozložit v relace (a), které definují transformaci dle S provedenou $s + 1^{\text{krát}}$ za sebou.

Dle této věty theorém reciprocitní, je-li dokázán o transformaci dle S, plyne jako důsledek též o transformaci dle S'. Z transformace dle S možná též soudit na vlastnost invariantu Δ¹) při transformaci dle S'.

Značí-li totiž μ_k řešení rovnice

$$\frac{\partial z_\varkappa}{\partial x} + \varrho_\varkappa z_\varkappa = 0$$

obsažené v (a), platí při transformaci rovnice $f_\varkappa$ na $f_{\varkappa+1}$ dle S o invariantu $k_\varkappa$

$$k_\varkappa = \frac{f_\varkappa(\mu_\varkappa)}{\mu_\varkappa},$$

podle R. Č. A. XXVIII. č. 21 jest tudíž ($k_0 = k$)

$$\Delta = k_0 \cdot k_1 \cdot \ldots \cdot k_s.$$

Vymizí-li Δ, vymizí jeden z invariantů k_0, $k_1 \ldots k_s$ a obráceně, substituce $z \mid \lambda z$ nemění invarianty k_0, $k_1 \ldots k_s$, tudíž nemění též Δ. Poněvadž o invariantu Δ'_{s+1} rovnice g_{s+1} adjungované k f_{s+1} platí podobně

$$\Delta'_{s+1} = k'_{s+1} \cdot k'_s \cdot \ldots \cdot k'_1$$

---

¹) RČA. XXVII. č. 40.

a poněvadž $k = k'_1$. $k_1 = k'_2, \ldots, k_s = k'_{s+1}$, jest

$$\varDelta = \varDelta_{s+1},$$

jak jinak přímo odvozeno v R. Č. A. č. 40.

Konečně řady (2) definované systémem S a systémem R. Č. A. XXX. č. 31 (2) liší se pouze tím, že jedna je obrácením druhé, jsou-li rovnice vesměs ve tvaru normálním. Neboť podle R. Č. A. XXVIII. č. 23, § 2. přejdeme-li od f k f_1 dle jednoho z těchto systémů, přejdeme od f_1 k f dle druhého. Stačí tudíž uvažovat pouze jeden z těchto systémů.

Vyloučivše takto tři systémy, transformaci rovnice f definující, vyšetřujme v následujícím pouze řadu (2) definovanou dle systemu R. Č. A. XXX. č. 31, (2).

3. Nyní *určíme vztah mezi invarianty rovnice původní a transformované.*

Stanovme především ze známých invariantů rovnice f invarianty rovnice f_1. Pišme za tím účelem systém R. Č. A. XXX. č. 31. (2) v pořádku obráceném a sice ve tvaru

$$\begin{aligned} h \sum_{0}^{n-2}{}_{\varkappa} \left[q_{\varkappa,1} \frac{\partial^{\varkappa+1}}{\partial x^{\varkappa} \partial y} \left(\frac{z}{h}\right) + q_{\varkappa,0} \frac{\partial^{\varkappa}}{\partial x^{\varkappa}} \left(\frac{z}{h}\right)\right] + h z_1 = 0, \\ z = \frac{\partial z_1}{\partial x} + q z_1; \end{aligned} \tag{4}$$

tento systém představuje však rovnici f_1 psanou pomocí systému S, soudíme tedy ihned, že platí (invarianty rovnice f_1 označme indexem 1)

$$k_1 = h. \tag{5}$$

Poněvadž pak diff. výraz $n - 1^{\text{ho}}$ řádu v první rovnici (4) liší se od diff. výrazu téhož řádu v druhé rovnici systému R. Č. A. XXX. č. 31. (2) pouze substitucí $z \mid h z$, jsou invarianty obou výrazů tytéž,¹) takže jest

$$\left.\begin{aligned} (h^s k^{n-s-1})_1 = (k h^s k^{n-s-2})_1 = (h^{s+1} k^{n-s-2}), \\ (k^{s+1})_1 = (k k^s)_1 = (h k^s), \end{aligned}\right\} s = 1, 2, \ldots n-2, \tag{6}$$

při čemž v druhé řádce jest též zahrnuta relace (5) pro $s = 0$.

Abychom určili invariant $(h^{n-1})_1$, porovnejme koefficienty $\frac{\partial l A_1}{\partial x}$ rovnice f s koefficientem $\frac{\partial l (A_{n-1})_1}{\partial x}$ rovnice f_1, při čemž označení A_1, A_{n-1} zvoleno dle R. Č. A. XXX. č. 31, § 3. Mysleme si systém (4) rozepsaný do tvaru R. Č. A. XXX. č. 31. (8); v tomto tvaru výraz $\frac{\partial z}{\partial x} + \bar{r}_0 z$ se vyskytující je zastoupen v rozepsaném systému (4) výrazem $\frac{\partial z_1}{\partial x} + q z_1$

---

¹) RČA. XXX. č. 31, § 3.

čili koefficient r_0 u rovnice f odpovídá koefficientu $q = \bar{q}_1$[1]) u rovnice f_1. Abychom mohli užiti relace R. Č. A. XXX. č. 31. (11) též na rozepsaný systém (4), nutno v něm[2]) zavésti substituci $z_1 \mid \lambda z_1$, při čemž λ jest tak zvoliti, aby vymizel koefficient $(\bar{r}_{n-1})_1$. Tento však jest totožný s prvním koefficientem diff. výrazu $n - 1^{\text{ho}}$ ř. v systému (4) čili rovná se hodnotě $-\dfrac{\partial\, l\, h}{\partial y}$, tedy podle R. Č. A. XXX. č. 31. (10)

$$\lambda = h,$$

takže výraz

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + \bar{q}_1 z_1$$

změní se na

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + \left(\bar{q}_1 + \frac{\partial\, l\, h}{\partial x}\right) z_1.$$

Platí tudíž podle R. Č. A. XXX. č. 31. (11)

$$\bar{q}_1 + \frac{\partial\, l\, h}{\partial x} = \frac{\partial\, l\, (A_{n-1})_1}{\partial x} = \frac{\partial\, l\, A_1}{\partial x} + \frac{\partial\, l\, h}{\partial x},$$

odkudž podle R. Č. A. XXX. č. 31. (12) obdržíme žádaný výsledek

$$(h^{n-1})_1 = (h^{n-1}) + (h\, k^{n-2}) - (k^{n-1}) + \frac{\partial^2\, l\, h}{\partial x\, \partial y}; \tag{7}$$

pro $n = 2$ plyne odtud formule Darbouxova[3])

$$h_1 = 2\, h - k + \frac{\partial^2\, l\, h}{\partial x\, \partial y}.$$

Relace (5), (6), (7) udávají $2\, n - 2$ invariantů rovnice f_1, tolik tedy, kolik je koefficientů, je tedy jimi rovnice f_1 určena.

Z relací (5), (6), (7) možná též určiti $2\, n - 2$ invariantů rovnice f_{-1}, známe-li je u rovnice f. Platí totiž podle (5), (6)

$$\begin{gathered} h_{-1} = k, \quad (h^{s+1} k^{n-s-2})_{-1} = (h^s k^{n-s-1}), \quad (h\, k^s)_{-1} = (k^{s+1}), \\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2, \end{gathered} \tag{8}$$

pak podle relace (7)

$$(k^{n-1})_{-1} = (k^{n-1}) + (h^{n-2}\, k) - (h^{n-1}) + \frac{\partial^2\, l\, k}{\partial x\, \partial y}. \tag{9}$$

Možná tudíž pomocí invariantů sestaviti řadu (2) z rovnice f na pravo i na levo.

4. Přikročme nyní k vlastní úloze této práce, *k stanovení rovnice f nemající transformační řady.*

---

[1]) Ibid. (7).

[2]) Ibid. § 3.

[3]) Darboux, Surfaces t. II. p. 28.

Při jediné neodvisle proměnné jest tato úloha tak jednoduchá, že zahrnuta byla do problému všeobecnějšího, v němž stanoveny byly rovnice s transformační řadou oboustranně zakončenou; tato řada v pravo i v levo uzavřená může se redukovati na jedinou rovnici f, jak právě žádá předložená úloha. U rovnic diff. lin. obyč. jsou takových rovnic možné 4 druhy; vždy se tu jedná o stanovení pouze jediné funkce neznámé A, po případě B.

Naproti tomu při dvou neodvisle proměnných nalézti rovnici f nemající transformační řady není úloha tak jednoduchá. Jedná se tu o stanovení $n - 1$ neznámých funkcí $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ určených tím, že současně vymizejí invarianty (h^s), (k^s), $s = 1, 2, \ldots, n - 1$, čímž dáno $2n - 2$ podmínek, tolik tedy, kolik má rovnice f v normálním tvaru koefficientů. Odtud již plyne, že *rovnic f nemajících řady transformační* (2) *jest jediný druh.*

Předpokládejme nejdříve, že u rovnice f vymizejí současně invarianty (k^s), $s = 1, 2, \ldots, n - 1$, tedy, že platí podmínka

$$k = (k^2) = \ldots = (k^{n-1}) = 0. \tag{10}$$

Vzhledem k R. Č. A. XXX. č. 31. (8), (10), (11) lze rovnici f pak psát ve tvaru

$$\begin{gathered} f(z) = \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} = 0, \quad z_{n-1} = \frac{\partial z_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial l A_1}{\partial x} z_{n-2}, \\ z_{n-2} = \frac{\partial z_{n-3}}{\partial x} + \frac{\partial l A_2}{\partial x} z_{n-3}, \ \ldots, \ z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial l A_{n-1}}{\partial x} z \end{gathered} \tag{11}$$

a její všeobecné řešení lze snadno obdržet pouze pomocí kvadratur; veličiny $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ lze zvoliti libovolně.

Stanovme pro rovnici f další podmínku

$$h = (h^2) = \ldots = (h^{n-1}) = 0, \tag{11}$$

udávající patrně určité hodnoty pro dosud libovolné funkce $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$. Abychom tyto hodnoty obdrželi, vyšetřeme nejprve výraz pro invarianty (h^s) za podmínky (10), což je možná, poněvadž mimo podmínku (10) předpokládáme za dané hodnoty $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$, dáno tedy celkem $2n - 2$ veličin.

5. Řešení této úlohy zjednoduší nám theorém:

Platí-li podmínka (*10*), *zůstává libovolný invariant* $(h^s k^t)$ *rovnice* f *nezměněn, snížíme-li současně řád rovnice* f *a řád úkonu* k *o týž obnos.*

Symbolicky možná tuto větu psát ve tvaru

$$(h^s k^t)_{(n)} = (h^s k^{t-p})_{(n-p)}, \quad s \neq 0 \tag{12}$$

jestliže řád n rovnice f připojený jako index v závorce a řád t úkonu k snížen o p jednotek. Dokážeme-li platnost formule (12) pro $p = 1$, platí patrně pro p libovolné.

Relace (12) platí patrně pro $s = 0$. Neboť dána-li podmínka (10) pro rovnici / řádu n^{ho}, platí pro diff. výraz $n - 1^{ho}$ ř. vzniklý úkonem k podle R. Č. A. XXX. č. 31. (3) a ($\bar{8}$) čili pro rovnici / řádu $n - 1^{ho}$

$$k_{(n-1)} = (k^2)_{(n)} = 0, \quad (k^2)_{(n-1)} = (k^3)_{(n)} = 0, \ldots, \\ (k^{n-2})_{(n-1)} = (k^{n-1})_{(n)} = 0. \tag{d}$$

Odvodíme nyní, že věta platí pro invarianty řádu $n - 1^{ho}$. Pro tyto invarianty platí totiž formule

$$(h^s\, k^{n-s-1})_{(n)} = \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} (A_1 A_2 \ldots A_s), \quad s = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{13}$$

neboť je-li tato relace správná pro index s, jest podle R. Č. A. XXX. č. 31. (12)

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} A_{s+1} = (h^{s+1}\, k^{n-s})_{(n)} - \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} (A_1 A_2 \ldots A_s),$$

odkudž soudíme, že vztah (13) platí též pro index $s + 1$. Pro index $s = 1$ stvrdíme správnost její přímo ze vzorce R. Č. A. XXX. č. 31. (12), platí tudíž relace (13) všeobecně. U rovnice / řádu $n - 1^{ho}$ jest tedy podle (13

$$(h^s\, k^{n-s-2})_{(n-1)} = \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} (A_1 A_2 \ldots A_s),$$

takže formule (12) jest pro invarianty řádu $n - 1^{ho}$ skutečně stvrzena.

Na základě toho lze odůvodnit, že platí-li vztah

$$(h\, k^t)_{(n)} = (h\, k^{t-1})_{(n-1)} \tag{e}$$

pro index t, platí též pro index $t - 1$. Pišme totiž relaci R. Č. A. XXX. č. 31. (19) jednak pro řád n rovnice /

$$(h\, k^{t-1})_{(n)} = (k^t)_{(n)} - \frac{\partial (h\, k^t)_{(n)}}{\partial x} + (h\, k^t)_{(n)} \int [\ldots]\, d\, y,$$

jednak pro řád $n - 1$ ve tvaru

$$(h\, k^{t-2})_{(n-1)} = (k^{t-1})_{(n-1)} - \frac{\partial (h\, k^{t-1})_{(n-1)}}{\partial x} + (h\, k^{t-1})_{(n-1)} \int [\ldots d\, y];$$

porovnáme-li pravé strany, shledáme, že všechny jejich části se rovnají jednak podle (d), jednak podle předpokládané relace (e), pak za integračním znamením jsou invarianty řádu o jednotku nižšího než je řád rovnice, o nichž formule (12) stvrzena; rovnají se tudíž i levé strany. Poněvadž relace (e) platí pro $t = n - 2$, platí též pro každé menší t, pokud ovšem $t \neq 0$.

Týmž postupem můžeme dokázati relace

$$(h^2\, k^t)_{(n)} = (h^2\, k^{t-1})_{(n-1)}, \quad (h^3\, k^t)_{(n)} = (h^3\, k^{t-1})_{(n-1)}, \ldots;$$

předpokládejme, že jsme odůvodnili takto

$$(h^s k^t)_{(n)} = (h^s k^{t-1})_{(n-1)}, \qquad (f)$$

pak možná tvrdit, že relace tato platí též pro index $s + 1$. Neboť má-li vztah

$$(h^{s+1} k^t)_{(n)} = (h^{s+1} k^{t-1})_{(n-1)} \qquad (g)$$

platnost pro index t, má též platnost pro index $t - 1$, jak plyne z formule R. Č. A. XXX. č. 31. (20) psané pro řád n rovnice f ve tvaru

$$(h^{s+1} k^{t-1})_{(n)} = (h^s k^t)_{(n)} - \frac{\partial\, (h^{s+1} k^t)_{(n)}}{\partial x} + (h^{s+1} k^t)_{(n)} \int [\ldots]\, d\, y$$

a pro řád $n - 1$ rovnice f ve tvaru

$$(h^{s+1} k^{t-2})_{(n-1)} = (h^s k^{t-1})_{(n-1)} - \frac{\partial\, (h^{s+1} k^{t-1})_{(n-1)}}{\partial x} + (h^{s+1} k^{t-1})_{(n-1)} \int [\ldots]\, d\, y;$$

pravé strany jsou rovny dle (f), (g), v hranatých závorkách mají invarianty řád o jednotku nižší než rovnice f, tudíž rovnají se i strany levé. Poněvadž (g) platí pro $t = n - s - 2$, platí tedy též pro každé menší t a vztah (f) platí pro $s = 1$, platí tudíž pro každé s větší, pokud ovšem $s + t \leqq n - 1$. Tím oformule (12) stvrzena všeobecně.

6. Přistupme na základě této věty k řešení předložené úlohy. Invariant (h^{n-1}) jest ovšem dán přímo podle (13), odkudž pro $s = n - 1$ plyne

$$(h^{n-1})_{(n)} = \frac{\partial^2 l}{\partial x\, \partial y} (A_1 A_2 \ldots A_{n-1}). \qquad (14)$$

Předpokládejme nyní, že jsme úlohu rozřešili pro $n^{tý}$ řád rovnice, že tedy pro tento řád známe za podmínky (10) mimo $(h^{n-1})_{(n)}$ též $(h^{n-2})_{(n)}, \ldots, (h^2)_{(n)}, h_{(n)}$, pak možná pomocí těchto hodnot na základě věty v § 6 dokázané vyjádřiti všechny invarianty $(h^s k^t)_{(n+1)}$ rovnice řádu $n + 1^{ho}$, tedy též invarianty $(h^{n-1})_{(n+1)}, (h^{n-2})_{(n+1)}, \ldots, h_{(n+1)}$.

Neboť podle formule R. Č. A. XXX. č. 11. (18) obdržíme vzhledem k (12)

$$(h^s)_{(n+1)} = (h^{s-1})_{(n)} - \frac{\partial\, (h^s)_{(n)}}{\partial x} + (h^s)_{(n)} \frac{\partial l}{\partial x} \frac{A_n}{A_s}, \qquad (15)$$
$$s = n - 1,\ n - 2,\ \ldots,\ 1.$$

U rovnice řádu 2^{ho} jest za podmínky $k = 0$ podle (14)

$$h = \frac{\partial^2 l\, A_1}{\partial x\, \partial y},$$

tudíž za podmínky $k = (k^2) = 0$ platí podle (14), (15) u rovnice 3^{ho} řádu

$$(h^2) = \frac{\partial^2 l}{\partial x^2\, \partial y} (A_1 A_2), \quad h = -\frac{\partial^3 l\, A_1}{\partial x^2\, \partial y} + \frac{\partial^2 l\, A_1}{\partial x\, \partial y} \frac{\partial l}{\partial x} \frac{A_2}{A_1} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{A_1''}{A_1}\right) + \frac{\partial^2 l\, A_1}{\partial x\, \partial y} \frac{\partial l}{\partial x} (A_1 A_2);$$

odtud obdržíme postupem naznačeným všeobecně v § 7 invarianty (h^3), (h^2), h rovnice řádu $4^{\text{tého}}$, na základě čehož možná už tušiti všeobecnou formuli

$$(h^s)_{(n)} = \frac{\partial}{\partial y} H^s_{(n)} + \sum_1^{n-s-1}{}^{\varkappa} (h^s)_{s+\varkappa} H^{s+\varkappa}_{(n)}, \tag{16}$$

kde jest

$$H^s_{(n)} = H^{s-1}_{(n-1)} - \frac{\partial}{\partial x} H^s_{(n-1)} - H^s_{(n-1)} \frac{\partial l A_s}{\partial x}. \tag{17}$$

Při tom nutno pokládati $H^o_{(n-1)}$ za nullu, $H^{n-1}_{(n-1)}$ za -1, takže jest podle (17)

$$H^{n-1}_{(n)} = \frac{\partial l}{\partial x}(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}), \quad H^1_{(n)} = H_{(n)} = (-1)^n \frac{1}{A_1} \frac{\partial^{n-1} A_1}{\partial x^{n-1}};$$

druhou z posledních dvou relací možná snadno stvrditi úplnou indukcí.

Formule (16), (17) jsou správné pro $n = 3$; dokážeme-li tudíž, že z platnosti jejich pro index n plyne jich platnost pro index $n + 1$, budou dokázány všeobecně.

7. Dokázati jest tudíž, že zákon, dle něhož jsou utvořeny formule (16), (17), zůstává nezměněn, zvýšíme-li n o jednotku čili že formule platí též pro $(h^s)_{(n+1)}$.

Vyjádřeme tuto hodnotu pomocí relace (15), jejíž pravá strana má tři členy; tyto upravíme na základě (16) tak, že za první člen $(h^{s-1})_{(n)}$ dosadíme přímo hodnotu plynoucí z (16), druhý člen nahraďme výrazem

$$\frac{\partial (h^s)_{(n)}}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H^s_{(n)} + \sum_1^{n-s-1}{}^{\varkappa} \left[(h^s)_{s+\varkappa} \frac{\partial}{\partial x} H^{s+\varkappa}_{(n)} + \frac{\partial (h^s)_{(s+\varkappa)}}{\partial x} H^{s+\varkappa}_{(n)} \right],$$

konečně v třetím členu místo výrazu $(h^s)_{(n)} \dfrac{\partial l}{\partial x} A_s$ dejme obnos

$$(h^s)_{(n)} \frac{\partial l}{\partial x} A_s = \left[\frac{\partial}{\partial y} H^s_{(n)} + \sum_1^{n-s-1}{}^{\varkappa} (h^s)_{(s+\varkappa)} H^{s+\varkappa}_{(n)} \right] \frac{\partial l}{\partial x} A_s,$$

načež relace (15) nabude tvaru

$$\left.\begin{aligned} (h^s)_{(n+1)} = {} & \frac{\partial}{\partial y} H^{s-1}_{(n)} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H^s_{(n)} - \frac{\partial}{\partial y} H^s_{(n)} \frac{\partial l}{\partial x} A_s + (h^{s-1})_{(s)} H^s_{(n)} + \\ & + \sum_1^{n-s-1}{}^{\varkappa} \left\{ \left[(h^{s-1})_{s+\varkappa} - \frac{\partial (h^s)_{s+\varkappa}}{\partial x} - (h^s)_{s+\varkappa} \frac{\partial l}{\partial x} A_s \right] H^{s+\varkappa}_{(n)} - \right. \\ & \left. - (h^s)_{(s+\varkappa)} \frac{\partial}{\partial x} H^{s+\varkappa}_{(n)} \right\} + (h^s)_{(n)} \frac{\partial l}{\partial x} A_n. \end{aligned} \right| \tag{h}$$

Trojčlen v hranatých závorkách možná podle (15) nahraditi obnosem

$$(h^s)_{s+\varkappa+1} - (h^s)_{s+\varkappa} \frac{\partial l}{\partial x} A_{s+\varkappa},$$

takže výraz $\sum\limits_{1}^{n-s-1}{}^{\varkappa} \{. \; . \; .\}$ nabude hodnoty

$$
\begin{gathered}
-(h^s)_{s+1}\left[\frac{\partial}{\partial x} H_{(n)}^{s+1} + H_{(n)}^{\check{s}+1}\frac{\partial l}{\partial x} A_{s+1}\right] + \\
+ \sum_{2}^{n-s-1}{}^{\varkappa} (h^s)_{s+\varkappa}\left[H_{(n)}^{s+\varkappa-1} - \frac{\partial}{\partial x} H_{(n)}^{s+\varkappa} - H_{(n)}^{s+\varkappa}\frac{\partial l}{\partial x} A_{s+\varkappa}\right] + \\
+ (h^s)_{(n)} H_{(n)}^{n-1};
\end{gathered} \tag{i}
$$

první tři členy na pravé straně (h) spojme ve tvar

$$
\frac{\partial}{\partial y}\left[H_{(n)}^{s-1} - \frac{\partial}{\partial x} H_{(n)}^{s} - H_{(n)}^{s}\frac{l}{\partial x} A_s\right] + H_{(n)}^{s}\frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} A_s, \tag{j}
$$

pak 2^hý^ člen výrazu (j) slučme se 4^tým^ členem výrazu (h)

$$
H_{(n)}^{s}\frac{{}^2 l}{\partial x \partial y} A_s + H_{(n)}^{s} (h^{s-1})_{(s)} = H^s{}_{(n)}(h^s)_{(\check{s}+1)},
$$

konečně poslední člen v (i) spojen s posledním členem v (h) dává

$$
(h^s)_{(n)} H_{(n)}^{n-1} + (h^s)_{(n)}\frac{\partial l}{\partial x} A_n = (h^s)_{(n)} H_{(u+1)}^{n}.
$$

Relace (h) nabude nyní tvaru

$$
\begin{gathered}
(h^s)_{(n+1)} = \frac{\partial}{\partial y}\left[H_{(n)}^{s-1} - \frac{\partial}{\partial x} H_{(n)}^{s} - H_{(n)}^{s}\frac{\partial l}{\partial x} A_s\right] + \\
+ \sum_{1}^{n-s-1}{}^{\varkappa} (h^s)_{(s+\varkappa)}\left[H_{(n)}^{s+\varkappa-1} - \frac{\partial}{\partial x} H_{(r)}^{s+\varkappa} - H_{(n)}^{s+\varkappa}\frac{\partial l}{\partial x} A_{s+\varkappa}\right] + (h^s)_{(n)} H_{(n-1)}^{n},
\end{gathered}
$$

což jest skutečně tvar formulí (16), (17), jež tím tedy všeobecně dokázány.

Tím tedy nalezen všeobecný výraz pro invarianty $(h^s)_{(n)}$ za podmínky (10).

8. Vyšetřeme nyní význam předpokladu (11) vyjadřujícího, že vymizejí u rovnice f též všechny invarianty $(h^s)_{(n)}$, $s = 1, 2, \ldots, n-1$. Podle systémů R. Č. A. XXX. č. 31. (2), (7) jest patrné, že tato podmínka značí též vymizení invariantů diff. výrazu n — 1^ho^ ř. v systému R. Č. A. XXX. č. 31. (2) čili invariantů $(h^s)_{(n-1)}$, $(s = 1, 2, \ldots, n-2)$ rovnice řádu n — 1^ho^, tudíž též invariantů $(h^s)_{(n-2)}$ rovnice řádu n — 2^ho^ atd.

Ve formuli (16) odpadá tudíž výraz za summačním znamením, a obdržíme jednoduchý výsledek

$$
H^s{}_{(n)} - X^s{}_{(n)} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad n-1, \tag{18}
$$

kde X jest libovolná funkce x. Úloha v § 5 předložená vyžaduje řešení tohoto systému $n-1$ rovnic s der. parc. o $n-1$ neznámých A_1, $A_2 \ldots$, $A_{(n-1)}$. Shledáme však ihned, že systém (18) jest daleko jednodušší.

Především pro $n = 3$ jest

$$H^1{}_{(3)} = -\frac{A_1{}''_{xx}}{A}, \quad H^2{}_{(3)} = \frac{\partial l}{\partial x}\,(A_1\, A_2),$$

takže systém (18) sestává ze dvou rovnic diff. lin. obyč., z nichž první je 2ho ř. o jediné neznámé A_1, druhá po dosazení této hodnoty je rovnicí téhož druhu řádu 1ho o jediné neznámé A_2; integrační konstanty nutno ovšem pokládati za libovolné funkce x.

Předpokládejme tedy, že platí pro $n^{tý}$ řád

$$H^s{}_{(n)} = \frac{f_{n-s}\,(A^s)}{A}{}_{[A_1 A_2 \dots A_{s-1}]}, \tag{19}$$

kde $f_{n-s}\,(A_s)_{[A\ \ A_2 \dots A_{s-1}]}$ značiž diff. výraz lin. obyč. ř. $n - s^{ho}$ v A_s, v jehož koefficientech se vyskytují pouze funkce A_1, $A_2 \dots A_{s-1}$ a jich derivace, platí pro řád $n + 1$ podle (17)

$$H^s{}_{(n+1)} = \frac{f_{n-s+1}\,(A_{s-1})}{A_{s-1}}{}_{[A\ \ A_2 \dots A_{s-1}]} - \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{f_{n-s}\,(A_s)}{A_s}{}_{[A_1 A_2 \dots A_{s-1}]} -$$
$$- \frac{f^{n-s}\,(A_s)}{A_s}\,\frac{\partial\, l\, A_s}{\partial x}{}_{[A\ \ A_2 \dots A_s]},$$

čili po provedení naznačené derivace

$$H^s{}_{(n+1)} = \frac{f_{n-s+1}\,(A_{s-1})}{A_{i-1}}{}_{[A\ A_2 \dots A_{s-2}]} - \frac{\frac{\partial}{\partial x} f_{n-s}\,(A_s)}{A^s}{}_{[A_1 A_2 \dots A_{s-1}]}$$
$$= \frac{F_{n-s+1}(A_s)}{A_s}{}_{[A_1\, A_2 \dots A_{s-1}]},$$

kde F značí výraz téhož druhu jako f; relace (19) platí tedy též pro index $n + 1$, platí tudíž všeobecně.

Dosadíme-li hodnotu (19) do systému (18), docházíme k výsledku: *Úloha, nalézti rovnici f nemající transformační řady, spočívá v posloupném řešení $n - 1$ rovnic diff. obyč. lin. řádu posloupně $n - 1^{ho}$, $n - 2^{ho}$, . . ., 1^{ho} o jediné neznámé resp. A_1, $A_2 \dots A_{n-1}$.*

Jest patrné, že rovnice f takto stanovená jest se svou adjungovanou totožná (při lichém řádu ovšem až na znamení). Mimo to jest samozřejmé, že celou úlohu mohli jsme řešiti též obráceně a předpokládati u rovnice f nejdřív podmínku (11) a stanoviti hodnoty $(k^s)_{(n)}$, pak teprve připojiti podmínku (10). Výraz pro $(k^s)_{(n)}$ za podmínky (11) obdržíme bez nového počtu pouze na základě předešlého, uvážíme-li, že, vymizejí-li invarianty $(k_s)_{(n)}$ u rovnice f, vymizejí invarianty $(h^s)_{(n)}$ u rovnice g adjungované k f.

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 33.

O ploše naplněné ohnisky parabol na hyp. paraboloidu.

Napsal

Dr. **Vlad. Mašek,**
profesor vys. školy zemědělské v Brně.

(Předloženo dne 3. června 1921.)

1. Paraboly na hyp. paraboloidu vytknuty jsou, jak známo, rovinami rovnoběžnými s jeho osou. Rovin těchto jest ∞^2, tudíž ohniska průsečných parabol vyplňují určitou plochu. Osnova rovin rovnoběžných s osou daného hyp. paraboloidu H protíná jej ve shodných parabolách p, jichž ohniska vyplňují parabolu π. Je-li $\mathfrak{p}$ parabola ležící v rovině sdružené ku směru uvažovaných rovin rovnoběžných a jdoucí osou z paraboloidu, obdržíme parabolu π, pošineme-li parabolu $\mathfrak{p}$ o čtvrtinu parametru paraboly p směrem osy opačně ku smyslu osy paraboly $\mathfrak{p}$. Poněvadž rozdíl parametrů parabol, v nichž protínají hyp. paraboloid dvě sdružené roviny normálné v jeho vrcholu, jest konstantní a rovná se $a^2 - b^2$, značí-li $\frac{a^2}{2}$ resp. $\frac{b^2}{2}$ poloparametry hlavních parabol daného paraboloidu, platí:

Hledanou plochu obdržíme, pošineme-li všechny paraboly, jdoucí vrcholem daného hyp. paraboloidu směrem osy tak, by jejich ohniska zapadla do bodu F ležícího na ose z paraboloidu ve vzdálenosti $z_F = \frac{a^2 - b^2}{4}$ *od jeho vrcholu.*

Dle toho, je-li $a \gtreqless b$, nachází se bod F nad nebo pod vrcholem O. Pro $a = b$, t. j. je-li základní hyp. paraboloid rovnostranný, ztotožní se bod F s vrcholem O paraboloidu.

2. Budiž

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

rovnicí daného hyp. paraboloidu H. Postupujíce dle výše uvedeného vytvoření plochy, nalezneme její rovnici ve tvaru

$$(1)\quad 4\,(x^2 b^2 - a^2 y^2)^2 - 4\,z\,a^2 b^2\,(x^2 b^2 - a^2 y^2) - a^2 b^2\,(y^2 a^4 + x^2 b^4) = 0.$$

Z rovnice seznáváme, že uvažovaná plocha jest *4. řádu.* Označme ji P^4. Tato jest souměrná ku rovinám $(x\,z)$ a $(y\,z)$. Zavedením homogenních souřadnic $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$ obdržíme z rov. (1) pro $x_4 = 0$:

$$(2)\qquad (x_1\,b - x_2\,a)^2\,(x_1\,b + x_2\,a)^2 = 0.$$

Z rovn. (2) soudíme, že plocha jest protnuta nekonečně vzdálenou rovinou ve dvou dvojných přímkách daných směrem rovin řídících paraboloidu H. Označme je u_∞ a v_∞. Z vytvoření plochy P^4 plyne, že v každém bodu osy z protínají se dvě paraboly této plochy, pročež jest osa z další dvojnou přímkou plochy.

Plocha P^4 *obsahuje celkem tři dvojné přímky, protínající se v jediném bodě, totiž v nekonečně vzdáleném bodě* Z_∞ *osy z. Jest tudíž hledaná plocha plochou Steinerovou.*

Roviny tečné podél dvojné přímky z tvoří involuci, jejíž dvojné roviny jsout otožny s hlavními rovinami daného hyp. paraboloidu. Příslušné body kuspidální jsou tedy totožné s vrcholy V a V' oněch parabol plochy, jež obdržíme pošinutím hlavních parabol paraboloidu H. Z počtu dvojných bodů rovinných křivek 4. ř. plyne známá vlastnost Steinerovy plochy, že rovina tečná ji protíná ve dvou kuželosečkách. Roviny tečné plochy P^4 v bodech kuspidálních V a V' tvoří dva svazky rovin procházejících vrcholovými tečnami v a v' příslušných parabol plochy P^4. *Tudíž svazky rovin o osách v a v' protínají plochu v kuželosečkách.*

Otočíme-li všechny roviny jdoucí osou z i s příslušnými v nich ležícími parabolami plochy P^4 do roviny nárysné, obdržíme konfokální paraboly o společném ohnisku F na ose z. Vedeme-li bodem M osy z tečny ku těmto konfokálním parabolám, leží jich dotyčné body na kružnici k mající střed ve společném ohnisku F a procházející bodem M. Vzhledem ku této vlastnosti konfokálních parabol platí: Křivka, dle níž dotýká se plochy P^4 kužel mající vrchol na dvojné přímce z, leží na ploše kulové mající střed ve společném ohnisku F a procházející vrcholem kužele. *Tato dotyčná křivka jest tudíž sférickou.*

O ploše Steinerově platí, že dotyčný kužel vedený k ní z bodu na ploše ležícího rozpadá se ve dva kužele 2. st.*) Výše uvažovaná dotyčná křivka jest proto prostorovou křivkou *4. řádu* a *1. druhu,* neboť jest průsečnou křivkou plochy kulové s plochou kuželovou 2. st. Označme ji k^4.

---

*) *R. Sturm: Über die römische Fläche von Steiner.* Mathem. Annalen B. 3.
,, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften B. IV.
Salmon-Fiedler: Analytische Geometrie des Raumes II. Th. p. 375

Stanovíme-li známým způsobem rovnici tečného kužele ku ploše P¹ z bodu M (0, 0, m) na ose z, obdržíme jeho rovnici ve tvaru:

$$4\,m\,(x^2 b^2 - y^2 a^2) + a^2 b^2 (z - m)^2 + x^2 b^4 + y^2 a^4 = 0. \tag{3}$$

Stanovme průsečnou křivku kužele s rovinami

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Co průmět průsečných křivek do roviny ($x\,z$) dostaneme po přetransformování výsledné rovnice do vrcholu M kužele co počátku

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

Poměr $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ značí $\cos\alpha$, je-li $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. Násobíme-li jmenovatele prvého zlomku hodnotou $\sec\alpha = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, přejde nulová elipsa daná rovn. (4) v nulovou kružnici. Přicházíme ku zajímavému výsledku, že směr řídících rovin základního hyperbolického paraboloidu H čili *směry, určující polohu v nekonečnu ležících dvojných přímek u_∞ a v_∞ plochy* P¹, *jsou směry cyklických rovin kuželů ploše opsaných z bodů dvojné přímky z.*

Stanovíme-li průmět styčné křivky k^4 do roviny ($x\,z$), obdržíme po pošinutí počátku do bodu $V\left(0,\ 0,\ \frac{a^2}{4}\right)$ rovnici tohoto průmětu ve tvaru

$$\frac{x^2}{\left[\frac{a\,(4\,m - a^2)}{4\sqrt{a^2+b^2}}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[\frac{4\,m - a^2}{4}\right]^2} = 1. \tag{5}$$

Poměr poloos elipsy e dané rovnicí (5) jest $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. *Jsou tudíž orthogonálné průměty křivek styčných ploše* P¹ *opsaných kuželů z bodů dvojné přímky z do roviny* ($x\,z$) *elipsy homothetické vzhledem ku společnému jich středu V co do středu homothetie.*

Z rovnic (4) a (5) plyne přímo, že elipsy těmito rovnicemi určené jsou podobné. *Jsou tudíž směry rovin určujících dvojné přímky u_∞ a v_∞ též směry cyklických rovin válce promítajícího křivku k^4 kolmo do roviny* ($x\,z$).

Uvedené výsledky vedou ku jednoduchému projektivnému vytvoření plochy P⁴. Styčné křivky k^4 kuželů opsaných ploše P⁴ z bodů osy z leží jednak na souosých válcích homothetických, jež protnuty jsou rovinami α a β jdoucími osou z a přímkami u_∞ resp. v_∞ v soustředných kružnicích o společném středu V a jednak na dříve odvozených plochách kulových, jež protnuty jsou rovinami α a β v soustředných kružnicích o středu F. Sobě odpovídající kružnice válce a koule dotýkají se v témž bodě M na dvojné přímce z. Oba svazky kružnic jsou patrně projektivní a tedy i svazek uvedených souosých válců jest projektivní s odpovídajícím svazkem soustředných ploch kulových. *Naplněna jest tudíž plocha* P^4 *křivkami, v nichž se protínají odpovídající si plochy uvedených jednoduše stanovených projektivních svazků ploch kulových a válcových.*

3. Libovolná rovina tečná plochy P^4 protíná tuto obecně ve dvou hyperbolách promítajících se do roviny (x, y) do hyperbol jdoucích počátkem O a majících za asymptoty přímky rovnoběžné s hlavními přímkami daného hyp. paraboloidu. Stanovíme-li početně geometrické místo středů všech ∞^2 kuželoseček na ploše P^4 ležících, obdržíme rovnici tohoto geom. místa ve tvaru:

$$z = \frac{2\,x^2}{a^2} - \frac{2\,y^2}{b^2} + \frac{a^2 - b^2}{8}\,. \tag{6}$$

Z rovnice (6) plyne zajímavý výsledek: *Geometrickým místem středů všech* ∞^2 *kuželoseček plochy* P^4 *jest hyperbolický paraboloid.* Označme jej $\mathcal{H}$. Vrcholem tohoto paraboloidu jest bod J na ose z půlící vzdálenost ohniska F od roviny (x, y). Paraboly hlavní paraboloidu $\mathcal{H}$ mají poloviční parametr vzhledem ku hlavním parabolám daného paraboloidu H.

Libovolným bodem P plochy P^4 prochází ∞ množství kuželoseček Půdorysné průměty jejich tvoří svazek hyperbol, jehož základními body jsou: průmět P_1 bodu P, počátek O co průmět dvojné přímky $z \perp \pi$ a v nekonečnu ležící body U_∞ a V_∞ dané směry hlavních přímek základního hyp. paraboloidu. Vedeme-li body P_1 a O rovnoběžky se směry U_∞ a V_∞, jest druhá úhlopříčka l vzniklého rovnoběžníka, jak známo, geometrickým místem středů příslušných hyperbol svazku. Středy hyperbol nacházejí se tedy v prostoru v rovině ξ jdoucí přímkou l kolmo k π. Poněvadž středy všech kuželoseček plochy vyplňují hyp. paraboloid $\mathcal{H}$, platí: *Středy všech kuželoseček jdoucích určitým bodem plochy* P^4 *vyplňují parabolu v rovině rovnoběžné s osou z.*

Nové tvary na japonském amfibolu.

Podává

M. J. Marek v Příbrami.

(S 1 obrazem v textu.)

Předloženo dne 17 června 1921.

Pro mineralogickou sbírku vysoké školy báňské v Příbrami získán byl v březnu 1921 japonský tridymit, jehož původní etiketa má nápis: *Tridymite.* Higo Hotakugori, Shimasakimura. Podkladem jeho je světle šedý andesit, který má plochou dutinu 7×5 *cm* velkou, pokrytou nedokonalými krystaly tridymitu, velmi tence tabulkovitými, bezbarvými nebo bílými, perleťově lesklými, z nichž největší byly 5 *mm.* Jimbo[1]) uvádí tridymit v andesitu ze Shimazaki, západně od města Kumamoto v Higu, Wada[2]) trojčata až 15 *mm* velká a 0·5 *mm* tlustá ze šedého andesitu Ishigamiyamy u Kumamoto.

Na tridymitu ze sbírky příbramské byly velmi drobné, nápadně lesklé krystaly amfibolu, z nichž mi byl p. prof. Dr. Boh. Ježkem největší svěřen ke goniometrickému prozkoumání, jehož výsledky tuto uvádím. Za propůjčení výzkumného materiálu a vedení při této práci svému učiteli p. prof. Dr. Boh. Ježkovi srdečně děkuji.

* * *

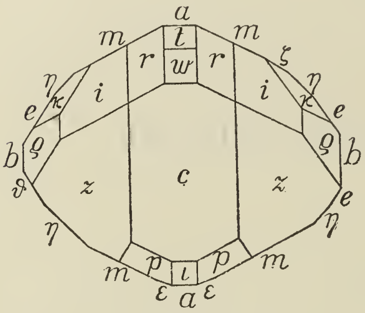
Drobné, až velmi drobné vertikálně sloupcovité krystalky amfibolu jsou obyčejně 1 *mm* dlouhé; přemnohé jsou menší. Tyto krystalky sedí na nedokonalých krystalech tridymitu, mají tmavohnědou barvu, která u některých přechází až do černé, u jiných zase je světlejší, někde až kalafunová. Většinou není zbarvení krystalků jednotné; světlejší partie jejich bývají značně průsvitné až průhledné. Nápadný je velice intensivní lesk plošek, z nichž plochy pásma vertikálního bývají dosti často kovově, zejména modře naběhlé.

---

[1]) K. Jimbo, Journ. Sc. Coll. Univ. Tokio, 1899, 11, 230.

[2]) Wada, Beitr. Min. Jap., 1905, No 1, 17.

Ke goniometrickému měření vyproštěn byl největší krystal, asi 1·6 *mm* dlouhý, velmi hojnoplochý, zakončený jen na jednom konci vertikály. Na připojeném obraze, poněkud idealisovaném, ale počtem ploch a poměrnou jich velikostí skutečnosti odpovídajícím, sestrojen jest půdorys tohoto krystalu.



Obr. 1.

Krystal byl měřen methodou dvojkruhovou a za základ výpočtů vzaty elementy A. Nordenskiöldovy,[3]) přijaté též v Goldschmidtových tabulkách úhlů:

$$a : b : c = 0{\cdot}5482 : 1 : 0{\cdot}2937,$$
$$\beta = 75^0\ 02'.$$

Na krystalu, jehož některé plochy, zejména *b*, *c*, *m*, **η*, *z*, *r*, *i*, **κ*, reflektovaly tak znamenitě, že mohlo býti použito největšího zvětšení signálu, zjištěno bylo následujících 18 tvarů, z nichž hvězdičkou označené jsou pro amfibol nové:

$c = 0\ (001)$, $b = 0\infty\ (010)$, $a = \infty 0\ (100)$, $^*\varepsilon = \frac{6}{5}\infty\ (650)$, $m = \infty\ (110)$,
$^*\zeta = \infty\frac{6}{5}\ (560)$, $^*\eta = \infty 2\ (120)$, $e = \infty 3\ (130)$, $^*\vartheta = \infty\frac{7}{2}\ (270)$, $z = 02\ (021)$,
$^*\iota = +\frac{1}{2}0\ (102)$, $w = -10\ (\bar{1}01)$, $t = -20\ (\bar{2}01)$, $p = +\frac{1}{2}\ (112)$,
$r = -11\ (\bar{1}11)$, $i = -13\ (\bar{1}31)$, $\varrho = -15\ (\bar{1}51)$, $^*\varkappa = -26\ (\bar{2}61)$.

V bohatém pásmu vertikálním bylo 19 ploch, z nichž 4 hranoly nové. Nové prisma $^*\varepsilon = \frac{6}{5}\infty\ (650)$ bylo zastoupeno dvěma úzkými, ale dosti dobrými plochami, jejichž posiční úhel φ byl:

	φ	
	měřeno:	vypočteno:
ε (650)	$66^0\ 12'$	$66^0\ 11'$
	$66^0\ 20'$	

Je to tvar zajištěný, ale velmi vzácný.

Prisma $^*\eta = \infty 2\ (120)$ bylo vyvinuto všemi čtyřmi plochami poměrně dosti širokými, z nichž dvě reflektovaly znamenitě:

	φ
	měřeno:
η (120)	$43^0\ 25'$
	$43^0\ 36'$
	$43^0\ 14'$

střed $= 43^0\ 30'$; vypočteno $= 43^0\ 21'$.

Tvar tento jest pokládati za zcela zajištěný.

---

[3]) Beskr. Finl. Min., Helsingf. 1855, 56.

Další dvě prismata $*\zeta = \infty \frac{6}{5}$ (560) a $*\vartheta = \infty \frac{7}{2}$ (270) zastoupena jsou každé jen jednou plochou a ač se měření dobře shodují s výpočtem, jest k jich zajištění třeba dalšího potvrzení.

	φ	
	měřeno:	vypočteno:
ζ (560)	$57^0\,12'$	$57^0\,34'$
ϑ (270)	$28^0\,46'$	$28^0\,21'$.

Nové negativní orthodoma $*\iota = +\frac{1}{2}0$ (102) jest zastoupeno jednou velmi malou, ale ostře ohraničenou plochou, která je velmi dobrá. Jest dáno přesnou polohou ve dvou pásmech na krystalu vyvinutých plochami:

$[100 : 102 : 001 : \bar{1}01 : \bar{2}01 : \bar{1}00]$
a $[010 : 112 : 102 : 1\bar{1}2 : 0\bar{1}0]$, a posičním úhlem ϱ:

	ϱ	
	měřeno:	vypočteno:
ι (102)	$28^0\,30'$	$28^0\,34\frac{1}{2}'$.

Přes to, že bylo nalezeno jen jednou plochou drobnou, mám tvar tento za jistý, protože měření s výpočtem dobře souhlasí, tvar má velmi jednoduché indexy a do důležitých pásem amfibolu velmi dobře se hodí.

Nová positivní pyramida $*\varkappa = -26$ ($\bar{2}61$) jest zastoupena oběma svými plochami, jež byly tak dobré, že mohly býti měřeny optickou kombinací reflektovaný signál zvětšující. Leží na průseku čtyř pásem na krystalu vyvinutých plochami:

$[\bar{1}30 : \bar{2}61 : \bar{1}31 : 001 : 1\bar{3}0]$,
$[010 : \bar{2}61 : \bar{2}01 : \bar{2}\bar{6}1 : 0\bar{1}0]$,
$[\bar{1}10 : \bar{2}61 : \bar{1}51 : 110]$
a $[\bar{1}20 : \bar{2}61 : 021 : 1\bar{2}0]$.

I posiční úhly měřené souhlasí s vypočtenými tak dobře, že jest pyramidu tuto zařaditi mezi jisté, ale vzácnější tvary amfibolu.

	φ		ϱ	
	měřeno:	vypočteno:	měřeno:	vypočteno:
($\bar{2}61$)	$25^0\,30'$	$25^0 32'$	$63^0\,7'$	$62^0\,53'$
($\bar{2}\bar{6}1$)	$25^0\,19'$		$63^0\,4'$.	

Také známé již tvary skýtaly většinou dobré reflexy, jejichž skutečná posice dobře souhlasila s theoretickým místem, jak jest viděti z následujícího přehledu:

Přehled měření:

Čís.	Sign.	Gdt	Miller	φ		ϱ		Počet ploch
				měřeno	vypočteno	měřeno	vypočteno	
1	*c*	0	001	90° 00	90° 00	15° 05	14° 58	1
2	*b*	0∞	010	0 00	0 00	90 00	90 00	2
3	*a*	$\infty 0$	100	90 00	90 00	90 00	90 00	2
4	$*\varepsilon$	$\frac{6}{5}\infty$	650	66 16	66 11	90 00	90 00	2
5	*m*	∞	110	62 07	62 05·	90 00	90 00	4
6	$*\zeta$	$\infty\frac{6}{5}$	560	57 12	57 34	90 00	90 00	1
7	$*\eta$	$\infty 2$	120	43 30	43 21	90 00	90 00	4
8	*e*	$\infty 3$	130	32 36	32 11	90 00	90 00	3
9	$*\vartheta$	$\infty\frac{7}{2}$	270	28 46	28 21	90 00	90 00	1
10	*z*	02	021	24 29	24 28	32 48	32 50	2
11	$*\iota$	$+\frac{1}{2}0$	102	90 00	90 00	28 30	28 34·	1
12	*w*	-10	$\bar{1}01$	90 00	$\overline{90}$ 00	16 05	16 01	1
13	*t*	-20	$\bar{2}01$	90 00	$\overline{90}$ 00	40 04	40 05	1
14	*p*	$+\frac{1}{2}$	112	74 35	74 54·	29 28	29 25·	2
15	*r*	-11	$\bar{1}11$	$\overline{44}$ 28	$\overline{44}$ 21	22 18	22 20	2
16	*i*	-13	$\bar{1}31$	$\overline{18}$ 13	$\overline{18}$ 03	42 48	42 49·	2
17	ϱ	-15	$\bar{1}51$	$\overline{11}$ 07	$\overline{11}$ 04	56 20	56 14·	2
18	$*\varkappa$	-26	$\bar{2}61$	$\overline{25}$ 30	$\overline{25}$ 32	63 07	62 53	2

Ku konci připojena jest pro nové tvary tabulka hodnot dvojkruhových, jak je uvádí Goldschmidt ve svých „*Winkeltabellen*“.

Tabulka hodnot dvojkruhových:

Čís.	Sign.	Gdt	Miller	φ	ϱ	ξ_0	η_0	ξ	η	x' Hranoly $(x' \cdot y')$	y'	$d' = tg\,\varrho$
1	ε	$\frac{6}{5}\infty$	650	66° 11′	90° 00′	90° 00′	90° 00′	66° 11′	23° 49′	2·2655	∞	∞
2	ζ	$\infty\frac{6}{5}$	560	57 34	90 00	90 00	90 00	57 34	32 26	1·5737	∞	∞
3	η	$\infty 2$	120	43 21	90 00	90 00	90 00	43 21	46 39	0·9440	∞	∞
4	ϑ	$\infty\frac{7}{2}$	270	28 21	90 00	90 00	90 00	28 21	61 39	0·5396	∞	∞
5	ι	$+\frac{1}{2}0$	102	90 00	28 34·	28 34	0 00	28 34	0 00	0·5447	0	0·5447
6	$\varkappa$	-26	$\bar{2}61$	$\overline{25}$ 32	62 53	$\overline{40}$ 05	60 25·	22 33·	53 26	$\bar{0}$·8417	1·7620	1·9528

Mineralogicko-petrografický ústav vysoké školy
báňské v Příbrami.

Optické konstanty některých českých nerostů.

Podává

Dr. Boh. Ježek v Příbrami.

(Předloženo dne 24. června 1921.)

1. Pyrop.

Materiál měřených hranolů pochází přesně z uvedených míst, kde byl opatřen nebo, jako pyrop jičínský, auktorem sbírán. Pyropy tyto byly opticky jednolomné a nevykazovaly žádných optických anomalií, pokud bylo možno zjistiti po vybroušení na prismatech ponořených do roztoku Rohrbachova o $n_{Na} = 1{\cdot}762$. Indexy lomu světelného vypočteny byly z úhlů nejmenší úchylky měřených s přesností $\pm 15''$. Protože také lomný úhel hranolů byl měřen s touže přesností, jsou největší možné chyby uvedených indexů $\pm 0{\cdot}00028$. Při měření užito bylo monochromatického světla Li, Na, Tl a modrého filtru skleněného.

I. Měrunice. Lomná hrana 5·5 *mm* dlouhá, lomný úhel $\omega = 22^0\,49'.15''$.

Světlo:	Úhel nejm. úchylky δ	Index lomu svět.: n
Li	$17^0\,25'\,15''$	$n_{Li} = 1{\cdot}73885$
Na	$17^0\,33'\,15''$	$n_{Na} = 1{\cdot}74436$
Tl	$17^0\,38'$	$n_{Tl} = 1{\cdot}74763$
modré	$17^0\,55'\,30''$	$n_m = 1{\cdot}75968$

II. Podsedice, Panské jámy. Lomná hrana 6·8 *mm*, lomný úhel $\omega = 26^0\,2'\,45''$.

Světlo:	δ	n
Li	$20^0\,4'\,15''$	$n_{Li} = 1.73806$
Na	$20^0\,12'\,30''$	$n_{Na} = 1{\cdot}74301$
Tl	$20^0\,19'\,15''$	$n_{Tl} = 1{\cdot}74696$
modré	$20^0\,37'\,00''$	$n_m = 1{\cdot}75748$

III. Dlažkovice. Lomná hrana 4·4 *mm* dlouhá, lomný úhel $\omega = 19^0\,13'\,30''$.

Světlo:	δ	n
Li	$14^0\,32'\,00''$	$n_{Li} = 1{\cdot}73882$
Na	$14^0\,39'\,30''$	$n_{Na} = 1{\cdot}74507$
Tl	$14^0\,46'\,00''$	$n_{Tl} = 1{\cdot}75048$
modré	$14^0\,55'\,00''$	$n_m = 1{\cdot}75800$

IV. Třibivlice. Lomná hrana 6·7 *mm* dlouhá, lomný úhel $\omega = 15^0\,39'\,00''$.

Světlo:	δ	n
Li	$11^0\,42'\,45''$	$n_{Li} = 1{\cdot}73721$
Na	$11^0\,53'\,00''$	$n_{Na} = 1{\cdot}74385$
Tl	$11^0\,56'\,30''$	$n_{Tl} = 1{\cdot}75150$
modré	$12^0\,\,4'\,45''$	$n_m = 1{\cdot}76004$

V. Železnice u Jičína. Na březích potoka při okresní silnici z Železnice do Lhoty Bradlecké asi 500 *m* sev. od Železnice. Lomná hrana 3·7 *mm* dlouhá, lomný úhel $\omega = 25^0\,37'\,30''$.

Světlo:	δ	n
Li	$19^0\,45'\,30''$	$n_{Li} = 1{\cdot}73960$
Na	$19^0\,55'\,30''$	$n_{Na} = 1{\cdot}74563$
Tl	$20^0\,\,4'\,00''$	$n_{Tl} = 1{\cdot}75080$
modré	$20^0\,19'\,30''$	$n_m = 1{\cdot}76012$

VI. Lhota Bradlecká u Jičína. Týž potok sev. od Lhoty Bradlecké. Lomná hrana 4·9 *mm* dlouhá, lomný úhel $\omega = 25^0\,6'\,30''$.

Světlo:	δ	n
Li	$19^0\,21'\,00''$	$n_{Li} = 1{\cdot}73914$
Na	$19^0\,32'\,00''$	$n_{Na} = 1{\cdot}74606$
Tl	$19^0\,42'\,45''$	$n_{Tl} = 1{\cdot}75258$
modré	$19^0\,54'\,45''$	$n_m = 1{\cdot}76134$

Přehled indexů pyropů.

Index lomu pro světlo	Naleziště					
	I. Měrunice	II. Podsedice	III. Dlažkovice	IV. Třibivlice	V. Železnice	VI. Lh. Bradlec.
lithiové, $n_{Li} =$	1·73885	1·73806	1·73882	1·73721	1·73960	1·73914
sodíkové, $n_{Na} =$	1·74436	1·74301	1·74507	1·74385	1·74563	1·74606
thaliové, $n_{Tl} =$	1·74763	1·74696	1·75048	1·75150	1·75080	1·75258
modré, $n_m =$	1·75968	1·75748	1·75800	1·76004	1·76012	1·76134
$n_m - n_{Li} =$	0·02083	0·01942	0·01918	0·02283	0·02052	0·02220

2. Beryl z Písku.

K stanovení indexů lomu světelného methodou refraktometrickou vybrány byly tři zelenavé naprosto průhledné korrodované krystaly pocházející z živcového lomu „U Obrázku“, na nichž s dostatečnou přesností mohlo býti goniometricky zjištěno pásmo vertikální. Přibroušené a leštěné plochy uchylují se od žádané polohy sotva o 4′. Při měření Abbe-Zeissovým refraktometrem bylo užito kombinace s největším zvětšením, jež zaručuje přesnost při odečtení úhlu totální reflexe α nejméně na 30″. Aby byly pokud možno vyloučeny chyby přístroje, byl úhel α odečítán na obou polovinách kruhu vertikálního. Horizontální kruh s polokoulí a krystalem otáčen byl v intervalech po 10°, takže bylo u každého krystalu provedeno celkem 72 měření při světle sodíkovém. Přesnost stanovených indexů jest ± 0·0002. Uvádím měření každého krystalu s hodnotami měřenými ve 4 hlavních polohách horizontálního kruhu.

I. Krystal 17 *mm* dlouhý, hustoty $h = 2{\cdot}693$, s plochou přibroušenou rovnoběžně k vertikále *c*.

Kruh horizont.:	α_o	α_e
0°	56° 24′	(56° 24′)
90°	56° 23′	56° 8′
180°	56° 23′	(56° 23′)
270°	56° 24′	56° 9′

Střední hodnota: $\alpha_o = 56^\circ\,23'\,30''$, $\alpha_e = 56^\circ\,8'\,30''$.

Z toho indexy: $\omega_{Na} = 1{\cdot}5744$, $\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}5694$; $\omega - \varepsilon = 0{\cdot}0050$.

II. Krystal 16 *mm* dlouhý, hustoty $h = 2{\cdot}705$, s plochou přibroušenou rovnoběžně k vertikále *c*.

Kruh horizont.:	α_o	α_e
0°	56° 26′	(56° 26′)
90°	56° 26′	56° 9′
180°	56° 25′ 30″	(56° 25′ 30″)
270°	56° 25′ 30″	56° 10′

Střední hodnota: $\alpha_o = 56^\circ\,25'\,45''$, $\alpha_e = 56^\circ\,9'\,30''$.

Z toho indexy: $\omega_{Na} = 1{\cdot}5751$, $\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}5701$; $\omega - \varepsilon = 0{\cdot}0050$.

III. Krystal 12 *mm* dlouhý, hustoty $h = 2{\cdot}702$, přibroušená plocha jest rovnoběžná s plochou spodovou (0001).

Kruh horizont.:	α_o	α_e
0°	56° 25′ 30″	56° 6′ 30″
90°	56° 26′	56° 6′
180°	56° 26′	56° 6′ 30″
270°	56° 26′ 30″	56° 7′

Střední hodnota: $\alpha_o = 56^\circ\,25'\,45''$, $\alpha_e = 56^\circ\,6'\,30''$.

Z toho indexy: $\omega_{Na} = 1{\cdot}5751$, $\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}5692$, $\omega - \varepsilon = 0{\cdot}0059$.

Přehled indexů berylu píseckého.

Krystal:	ω_{Na}	ε_{Na}	$\omega_{Na} - \varepsilon_{Na}$
I	1·5744	1·5694	0·0050
II	1·5751	1·5701	0·0050
III	1·5751	1·5692	0·0059

3. Nefelin z Podhornu u Mar. Lázní.

Měřeny byly největší a nejdokonalejší krystalky, které jsem mohl získati, na Abbe-Zeissově refraktometru. Lesk přirozených ploch hranolu a plochy spodové byl opatrným přileštěním zvýšen a úhel totální reflexe α měřen nejprve obyčejným odečtením na kruhu vertik. s přesností 30″.

Druhé stanovení provedeno bylo měřením úhlové difference mezi hranicí totální reflexe řádného paprsku křemene a nefelinu. Při tom možno na bubnu mikrometr. šroubu odečítati ještě 6″. U hranolu křišťálového stanoven byl index lomu světelného methodou spektrometrickou s přesností zaručující čtvrté místo desetinné a i v pátém na 4 jednotky správnou. Tak zjištěno u křemene $\omega_{Na} = 1{\cdot}54423$ (Gifford uvádí $\omega_{Na} = 1{\cdot}5442558$). Všechna měření provedena byla při osvětlení sodíkovém. V přehledech označen jest: α úhel totální reflexe, diff. úhlová vzdálenost od hranice křemene.

I. Krystal poněkud nažloutlý, $h = 2{\cdot}652$ (hustota stanovena byla u všech krystalů suspensí v jodidu methylenovém). Přiložena byla plocha hranolová $(10\bar{1}0)$.

ω		ε		$\omega - \varepsilon$
$\alpha_o = 55^0\,1'$	$\omega_{Na} = 1{\cdot}54884$	$\alpha_\varepsilon = 54^0\,43'\,30''$	$\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}54330$	0·00554
diff. = 14′ 42″	$\omega_{Na} = 1{\cdot}54888$	*diff.* = 3′ 36″	$\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}54324$	0·00564

Střed: $\omega_{Na} = 1{\cdot}54886$, $\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}54327$, $\omega - \varepsilon = 0{\cdot}00559$

II. Krystal poněkud nažloutlý, $h = 2{\cdot}645$, byl přiložen přileštěnou plochou spodovou (0001).

ω		ε		$\omega - \varepsilon$
$\alpha_o = 55^0\,1'\,15''$	$\omega_{Na} = 1{\cdot}54892$	$\alpha_\varepsilon = 54^0\,44'\,15''$	$\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}54357$	0·00535
diff. = 14′ 36″	$\omega_{Na} = 1{\cdot}54879$	*diff.* = 2′ 00″	$\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}54360$	0·00519

Střed: $\omega_{Na} = 1{\cdot}54886$, $\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}54358$, $\omega - \varepsilon = 0{\cdot}00528$

III. Krystal bezbarvý, $h = 2{\cdot}647$; byl přiložen přileštěnou plochou spodovou (0001).

ω		ε		$\omega - \varepsilon$
$\alpha_o = 55^0\,2'$	$\omega_{Na} = 1{\cdot}54915$	$\alpha_\varepsilon = 54^0\,45'\,15''$	$\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}54386$	0·00529
diff. = 15′ 24″	$\omega_{Na} = 1{\cdot}54910$	*diff.* = 1′ 24″	$\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}54378$	0·00532

Střed: $\omega_{Na} = 1{\cdot}54912$, $\varepsilon_{Na} = 1{\cdot}54382$; $\omega - \varepsilon = 0{\cdot}00530$.

Přehled indexů nefelinu z Podhornu.

Krystal:	ω_{Na}	ε_{Na}	$\omega_{Na} - \varepsilon_{Na}$
I	1·54886	1·54327	0·00559
II	1·54879	1·54358	0·00528
III	1·54912	1·54382	0·00530

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 36.

O obecné příbuznosti mezi dvěma plochami.

Napsal

Dr. Eduard Čech.

Předloženo dne 24. června 1921.

1. V posledním odstavci pojednání „O trilineárních systémech čar na ploše a projektivné aplikaci ploch“, předloženého této Akademii dne 21. února t. r., zabýval jsem se korespondencí trsů oskulačních rovin v páru příslušných bodů P_y, P_η dvou ploch S_y, S_η, které jsem předpokládal tak na sebe zobrazeny, že *asymptotické čáry obou soustav si odpovídají.* Za tohoto předpokladu jsme shledali, že kdykoli korespondence mezi těmito trsy jest (pro každou dvojici příslušných bodů) kolineární, je příbuznost mezi S_y, S_η projektivní aplikace složitějším způsobem definovaná Fubinim.

V dalším budeme předpokládati *jakoukoli* příbuznost mezi plochami S_y, S_η. Pro krátkost nazveme R korespondenci trsů P_y, P_η oskulačních rovin. Je-li S_y dána diferenciálními rovnicemi

$$y_{uu} + 2\,b\,y_v + f\,y = 0,\ \ y_{vv} + 2\,a'\,y_u + g\,y = 0, \tag{1}$$

a jsou-li ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 rovinové souřadnice v lokální soustavě souřadné o základním tetraedru $P_y\,P_z\,P_\varrho\,P_\sigma$, ukázal jsem l. c., že oskulační rovina plošné křivky C

$$v - v_0 = \tau\,(u - u_0) + \frac{\bar{\tau}}{2}\,(u - u_0)^2 + \ldots \tag{2}$$

v bodě P_y (u_0, v_0) má souřadnice

$$\xi_1 = 0,\ \ \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \tau^2 : -\,\tau : (\bar{\tau} - 2\,b + 2\,\tau^3\,a'). \tag{3}$$

Druhá plocha S_η buď dána diferenciálními rovnicemi

$$\eta_{u'u'} + 2\,\beta\,\eta_v + \varphi\,\eta = 0,\ \ \eta_{v'v'} + 2\,\alpha'\,\eta_{u'} + \gamma\,\eta = 0. \tag{4}$$

Oskulační rovina křivky c' na ploše S_η

$$v' - v_0' = \tau' (u' - u_0') + \frac{\overline{\tau'}}{2} (u' - u_0')^2 + \dots \tag{5}$$

v bodě P_η (u_0', v_0') má v lokální soustavě souřadné příslušné bodu P_η souřadnice

$$\xi_1' = 0,\ \xi_2' : \xi_3' : \xi_4' = \tau'^2 : - \tau' : (\overline{\tau'} - 2\,\beta + 2\,.\,\tau'^3\,\alpha'). \tag{6}$$

Zobrazení S_y na S_η buď dáno rovnicemi

$$u' = \varphi\,(u,\ v),\quad v' = \psi\,(u,\ v), \tag{7}$$

z nichž plynou rozvoje

$$\begin{aligned} u' - u_0' &= \varphi_u\,(u - u_0) + \varphi_u\,(v - v_0) + \frac{1}{2}\,[\varphi_{u\,u}\,(u - u_0)^2 + \\ &\quad + 2\,\varphi_{u\,v}\,(u - u_0)\,(v - v_0) + \varphi_{v\,v}\,(v - v_0)^2] + \dots, \\ v' - v'_0 &= \psi_u\,(u - u_0) + \psi_v\,(v - v_0) + \frac{1}{2}\,[\psi_{u\,u}\,(u - u_0)^2 + \\ &\quad + 2\,\psi_{u\,v}\,(u - u_0)\,(v - v_0) + \psi_{v\,v}\,(v - v_0)^2] + \dots, \end{aligned} \tag{8}$$

kde φ_u, φ_v atd. jsou hodnoty derivací pro $u = u_0$, $v = v_0$. Z rovnic (2), (5), (8) plyne krátkým počtem, že, přísluší-li si v našem zobrazení C a C', P_y a P_η, jest

$$\tau' = \frac{\psi_u + \tau\,\psi_v}{\varphi_u + \tau\,\varphi_v},\quad \overline{\tau'} = \frac{(\varphi_u\,\psi_v - \psi_u\,\varphi_v)\,\overline{\tau} + \begin{vmatrix} \varphi_u + \tau\,\varphi_v, & \varphi_{u\,u} + 2\,\tau\,\varphi_{u\,v} + \tau^2\,\varphi_{v\,v} \\ \psi_u + \tau\,\psi_v, & \psi_{u\,u} + 2\,\tau\,\varphi_{u\,v} + \tau^2\,\psi_{v\,v} \end{vmatrix}}{(\varphi_u + \tau\,\varphi_v)^3}. \tag{9}$$

Dosadíme-li z (9) do (6), obdržíme

$$\begin{aligned} \xi_1' = 0,\ \xi_2' : \xi_3' : \xi_4' &= (\psi_u + \tau\,\psi_v)^2\,(\varphi_u + \tau\,\varphi_v) : - (\psi_u + \tau\,\psi_v)\,(\varphi_u + \tau\,\varphi_v)^2 \\ &: [(\varphi_u\,\psi_v - \psi_u\,\varphi_v)\,\overline{\tau} + \begin{vmatrix} \varphi_u + \tau\,\varphi_v, & \varphi_{u\,u} + 2\,\tau\,\varphi_{u\,v} + \tau^2\,\varphi_{v\,v} \\ \psi_u + \tau\,\psi_v, & \psi_{u\,u} + 2\,\tau\,\psi_{u\,v} + \tau^2\,\psi_{v\,v} \end{vmatrix} - \\ &\quad - 2\,\beta\,(\varphi_u + \tau\,\varphi_v)^3 + 2\,\alpha'\,(\psi_u + \tau\,\psi_v)^3]. \end{aligned} \tag{10}$$

Vyloučíme-li τ a $\overline{\tau}$ z rovnic (3) a (10) dostáváme rovnice korespondence R:

$$\begin{aligned} \varrho\,\xi_2' &= (\psi_v\,\xi_2 - \psi_u\,\xi_3)^2\,(\varphi_u\,\xi_3 - \varphi_v\,\xi_2). \\ \varrho\,\xi_3' &= (\psi_v\,\xi_2 - \psi_u\,\xi_3)\,(\varphi_u\,\xi_3 - \varphi_v\,\xi_2)^2, \\ \varrho\,\xi_4' &= (\varphi_u\,\psi_v - \psi_u\,\varphi_v)\,(\xi_2\,\xi_3\,\xi_4 + 2\,b\,\xi_3^3 + 2\,a'\,\xi_2^3) \\ &\quad - 2\,\beta\,(\varphi_u\,\xi_3 - \varphi_v\,\xi_2)^3 - 2\,\alpha'\,(\psi_v\,\xi_2 - \psi_u\,\xi_3)^3 \\ &\quad + \begin{vmatrix} \varphi_u\,\xi_3 - \varphi_v\,\xi_2, & \varphi_{u\,u}\,\xi_3^2 - 2\,\varphi_{u\,v}\,\xi_2\,\xi_3 + \varphi_{u\,v}\,\xi_2^2 \\ \psi_u\,\xi_3 - \psi_v\,\xi_2, & \psi_{u\,u}\,\xi_3^2 - 2\,\psi_{u\,v}\,\xi_2\,\xi_3 + \psi_{v\,v}\,\xi_2^2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

2. Z rovnic (11) vidíme, že R jest obecně *kubická* Cremonova příbuznost mezi oběma trsy. Stupeň se sníží, dá-li se na pravo vytknouti ξ_2 nebo ξ_3. Podmínky, aby bylo lze vytknouti ξ_2, jsou

$$\varphi_u\,\psi_u = 0,\ (\varphi_u\,\psi_v - \psi_u\,\varphi_v)\,b - \varphi_u^3\,\beta + \psi_u^3\,\alpha' + \tfrac{1}{2}\,(\varphi_u\,\psi_{u\,u} - \psi_u\,\varphi_{u\,u}) = 0. \tag{12}$$

Podobně jsou podmínky, aby bylo lze vytknouti ξ_3,

$$(13)\quad \varphi_v \psi_v = 0,\ (\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v)\, a' + \varphi_v^3 \beta - \psi_v^3 \alpha' - \tfrac{1}{2} (\varphi_v \psi_{vv} - \psi_v \varphi_{vv}) = 0.$$

Jsou-li splněny rovnice (12) *nebo* (13) jest, R *kvadraticka*, jsou-li však *současně* splněny (12) i (13), jest R *lineární*. Rovnice (12) mohou býti splněny buď tak, že jest

$$(12^a)\qquad \psi_u = 0,\ \psi_v b - \varphi_u^2 \beta + \tfrac{1}{2} \psi_{uu} = 0,$$

nebo tak, že

$$(12^b)\qquad \varphi_u = 0,\ \varphi_v b - \psi_u^2 \alpha' + \tfrac{1}{2} \varphi_{uu} = 0.$$

Podobně rozpadají se podmínky (13):

$$(13^a)\qquad \varphi_v = 0,\ \varphi_u a' - \psi^2_v \alpha' + \tfrac{1}{2} \varphi_{vv} = 0,$$

$$(13^b)\qquad \psi_v = 0,\ \psi_u a' - \varphi_v^2 \beta + \tfrac{1}{2} \psi_{vv} = 0.$$

Odtud vysvítá okamžitě, že stupeň korespondence R jistě rovná se třem, když žádné z obou asymptotických tečen plochy S_y v P_y neodpovídá asymptotická tečna plochy S_η. V tomto případě příslušejí svazkům rovin trsu P_η v trsu P_y kužele třetí třídy, které mají vesměs: v tečné rovině plochy S_y v P_y dvojnou rovinu tečnou a v asymptotických točnách pevné dotyčné přímky vytvořující; mimo to dvě jednoduché pevné tečné roviny ω_1, ω_2, z nichž každá obsahuje o raz jedné asymptotické tečny plochy S_η. Jeden z těchto kuželů rozpadá se ve svazek $(\omega_1\, \omega_2)$ a v oba svazky rovin asymptotickými tečnami. Uvažujme na S_y soustavu ∞^2 křivek $[C]$ takových, že oskulační rovina každé z nich v obecném bodě P_y plochy jde přímkou $(\omega_1\, \omega_2)$. Této soustavě odpovídá na S_η soustava ∞^2 křivek $(C']$; a v každém bodě P_η plochy S_η obsahují oskulační roviny všech jím jdoucích křivek soustavy $[C')$ pevnou přímku. Geodeticke zobrazení poskytuje známou ilustraci této okolnosti; ale na existenci soustav $[C]$, $[C')$ při *jakémkoli* zobrazení, ve kterém si nepříslušejí asymptotické čáry, nebylo tuším dosud poukázáno. Když jedné (nebo oběma) soustavě asymptotických křivek plochy S_y příslušejí asymptotické křivky na S_η, ale tak, že korespondence R zůstává kubická, neexistují soustavy $[C]$, $[C')$. Obraťme se ku případu, kdy R je *kvadratická*. Buďte na př. splněny rovnice (12^a). Je-li tomu tak *pro všecka* u, v, jest následkem $\psi_u = 0$ také $\psi_{uu} = 0$ a druhá z rovnic (12^a) dá se psáti jednodušeji

$$(14)\qquad \psi_v b - \varphi_u^2 \beta = 0.$$

Odtud plyne, ježto při přechodu k adjungovanému systému diferenciálních rovnic b, β mění pouze znamení: Je-li příbuznost R kvadratická pro *každou* dvojici příslušných bodů, je také korelativní příbuznost kvadratická. Prvá z rovnic (12^a) praví, žę asymptotické tečně $d\, v = 0$ plochy S_η v P_η přísluší asymptotická tečna $d\, v' = 0$ plochy S_η v P_η. Svazkum

1*

rovin trsu P_y příslušejí nyní v trsu P_y kužele druhé třídy, dotýkající se tečné roviny plochy S_y podél asymptotické tečny $d\,u = 0$ a mající mimo to další pevnou tečnou rovinu ω. Tato nesplyne s tečnou rovinou plochy S_y, jestliže asymptotické tečně $d\,u = 0$ plochy S_y v P_y nepřísluší asymptotická tečna plochy S_y. Zvolíme-li pro každý bod P_y libovolnou přímku v rovině ω, sestrojíme nekonečné množství soustav $[C]$, $[C']$. Poznamenejme, že R jest jistě kvadratická (nebo lineární), je-li $b = \beta = 0$, $\psi_u = 0$, t. j. jsou-li obě plochy zborcené a odpovídají-li si přímky vytvořující. I když obojí asymptotiky si odpovídají, může býti R kvadratická; pak ale splyne ω s tečnou rovinou plochy S_y (kužele odpovídající svazkum rovin mají styk druhého řádu podél jedné z asymptotických tečen) a soustavy $[C]$, $[C']$ neexistují.

Konečně, aby R byla lineární, musí býti splněny rovnice (12) i (13). To lze jen tak, že jsou splněny (12^a) a (13^a), nebo, což jen označením se liší, (12^b) a (13^b); jinak by bylo $\varphi_u\,\psi_v - \psi_u\,\varphi_v = 0$. Také zde platí: je-li R lineární pro *každou* dvojici příslušných bodů, jest i korelativní korespondence lineární. Soustav $[C]$, $[C')$ existuje ovšem nyní nekonečně mnoho. Jelikož tento případ vyžaduje $\psi_u = \varphi_v = 0$, nebo $\varphi_u = \psi_v = 0$, tedy v každém případě korespondenci asymptotických čar, vidíme, že lze náš výsledek z cit. poj. doplniti takto: *Každá korespondence mezi dvěma nerozvinutelnými plochami, při níž v každé dvojici příslušných bodů oskulační roviny křivek si odpovídají kolineárně, jest projektivní aplikace.*

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 37.

K theorii zákona Lorenzova.

(Z ústavu pro theoretickou fysiku české university Karlovy v Praze.)

Napsal

univ. docent

Ph. Dr. K. Teige,

asistent ústavu.

Předloženo dne 24. června. 1921.

Zákon Lorenzův praví, že poměr vodivosti tepelné k ku vodivosti elektrické $\varkappa$ při absolutní teplotě T je dán vztahem

$$\frac{k}{\varkappa} = C \,.\, T,$$

kde C značí konstantu nezávislou na povaze kovu. Ve skutečnosti tento vztah je splněn pouze přibližně. Avšak důležito je, že střed z hodnot C, které byly naměřeny u různých kovů, nesouhlasí se žádnou hodnotou, k nimž dospívají různé theorie pro vedení elektřiny a tepla v kovech.

Tři nejznámější theorie dospěly k hodnotě pro poměr $\frac{k}{\varkappa}$ při 18^0 C:

1. Theorie Drudeova (zjednodušená pouze pro jeden druh elektronů)

$$\frac{k}{\varkappa} = 6{\cdot}47 \,.\, 10^{10},$$

2. theorie Lorentzova

$$\frac{k}{\varkappa} = 4{\cdot}31 \,.\, 10^{10},$$

3. theorie Rieckeova (nejúplnější theorie)

$$\frac{k}{\varkappa} = 7{\cdot}28 \,.\, 10^{10} \left(1 + \frac{2}{3}\, 291\, \delta\right),$$

kde δ značí temperaturní koefficient počtu elektronů.

---

[1] Abhandlungen der Physik.—Techn. Reichsanstalt, 3. 269, Berlin 1900. Viz též Baedeker: Elektrische Erscheinungen, Vieweg, 1911, str. 56.

Naproti tomu Jaeger a Diesselhorst[1]) naměřili hodnoty, jejichž průměr až na vizmut je

$$7{\cdot}11\,.\,10^{10}.$$

Nejblíže k této hodnotě by vedla theorie Rieckeova, kdyby $\delta = 0$, což však je v odporu s theorií Thomsonova tepla a piezothermoelektrické síly. K daleko lepší shodě s výsledky měření dospějeme malou modifikací Rieckeovy theorie, na základě, který jsem učinil v pracích „O závislosti specifické vodivosti kovů na hydrostatickém tlaku“[1]) a „Theorie piezothermoelektrické síly“.[2]) Ta změna pozůstává v tom, že všude tam, kde se dříve psalo $6\,T$, to jest vnitřní tepelný obsah grammolekuly kovu dle klassické theorie, položíme nyní

$$E_v = \int_0^T C_v\, d\,T,$$

kde E_v je skutečný tepelný obsah grammolekuly kovu a který s dostatečnou přesností je dán Debye-ovým vzorcem. Tyto hodnoty pro různé kovy lze nalézti již v tabulkách.

To znamená, že počet a živá síla elektronů není dána prostě teplotou, nýbrž vnitřní energií toho kovu, ve kterém se elektrony nalézají. Pak modifikovaný vzorec Riecke-ův zní

$$\frac{k}{\varkappa} = \frac{3}{2}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 .\ \frac{E_v}{5{\cdot}955}\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{\delta\, E_v}{5{\cdot}955}\right) = 4{\cdot}198\,.\,10^7\, E_v\,(1 + 0{\cdot}112\,\delta\, E_v).$$

Tento vzorec úplně souhlasí s výsledky měření, neboť $4{\cdot}198\,.\,10^7\, E_v$ je u všech kovů menší než poměr vodivostí. Proto δ má určitou kladnou hodnotu, kterou lze srovnati s temperaturním koefficientem počtu elektronů, jak plyne z jiných fysikálních zjevů. Já ji srovnávám s hodnotou δ_1, ke které jsem dospěl v citované práci „Theorie piezothermoelektrické síly“.

Tam jsem položil

$$n = k\,.\,E^\gamma,$$

kde n značí počet elektronů v cm^2. Odtud pro dvě blízké teploty je

$$n = k\, E_0^\gamma \left(1 + \frac{E - E_0}{E_0}\right)^\gamma = k\, E_0^\gamma \left[1 + \frac{\gamma}{E_0}\,(E - E_0)\right].$$

Pro vyšší teploty je přibližně:

$$E - E_0 = 6\,(T - T_0) = 6\,t,$$

a tedy

$$n = k\,.\,E_0^\gamma \left(1 + 6\,\frac{\gamma}{E_0}\,t\right).$$

---

[1]) Rozpravy České Akademie. Roč. XXVII. Čís. 17. (1919).

[2]) Rozpravy České Akademie. Roč. XXVII. Čís. 26. (1919).

Odtud pak temperaturní koefficient počtu elektronů je δ

$$\delta = 6\frac{\gamma}{E_0}.$$

Pro velmi vysoké teploty pak z toho plyne

$$\delta = \frac{\gamma}{T_0}.$$

Kov	$\frac{k}{\varkappa}$ 10^{-10}	$4{\cdot}198 . 10^{-3} E$	$4{\cdot}198 . 0{\cdot}112 . 10^{-3} . \delta . E^2$	$\delta\, E^2\, 10^{-3}$	δ	δ_1
Al	6·36	4·21	2·15	4·57	0·00455	0·00305
Cu	6·71	4·74	1·97	4·19	0·00329	0·00270
Ag	6·86	5·46	1·40	2·97	0·00176	0·00175
Au	7·09	5·73	1·36	2·89	0·00155	0·00152
Zn	6·72	5·35	1·37	2·91	0·00179	0·00184
Cd	7·06	6·04	1·02	2·17	0·00105	0·00142
Pb	7·15	6·45	0·70	1·49	0·000602	0·00168
Sn	7·35	5·92	1·43	3·04	0·00153	0·00204
Pt	7·53	5·42	2·11	4·49	0·00269	0·000939
Pd	7·54	4·96	2·58	5·49	0·00389	0·00127

Jelikož vodivost tepelná nepřísluší pouze kovům, nýbrž také, byť v míře daleko menší, isolátorům, bylo by nutno odečísti od vodivosti tepelné kovů onu část vodivosti tepelné, kterou mají společnou s isolátory a která pravděpodobně má svůj původ v šíření elastických vln mřížovím atomů, a do vzorce Lorenzova vložiti za tepelnou vodivost pouze tu část, která je sprostředkována vskutku elektrony. Avšak jelikož nemáme žádnou možnost odděliti tuto část od části sprostředkované elastickými vlnami a jelikož je daleko větší, klademe za k prostě naměřenou vodivost do vzorce Lorenzova. Tím jsme tam za k dali něco více a tím pak δ odtud vypočtené bude větším, než ve skutečnosti je. A tento rozdíl bude tím větší, čím menší je celková vodivost k. Proto má platiti věta: Rozdíl $\delta - \delta_1$ je kladný a tím větší, čím hůře příslušný kov vede teplo a elektřinu.

To celkem je patrno, neboť u nejlepších vodičů je shoda až překvapujícně dobrá a u většiny případů celkově je $\delta > \delta_1$. Je totiž $\Sigma\, \delta = 0{\cdot}0221$, $\Sigma\, \delta_1 = 0{\cdot}01791$. Výjimku činí *Cd, Pb, Sn* a *Zn.*

Avšak Wagner[1]) objevil, že u *Cd* a *Zn* jest piezothermoelektrická hysterese podmíněna snad kristallickou strukturou techto kovů. Tu je jasno, že na takové kovy naše úvahy není možno applikovati. Pokud se týče *Pb* a *Sn*, tu výsledky měření piezothermoelektrické síly se proti jiným kovům tak rozcházejí, že jich střední hodnota může se velmi lišiti od hodnoty správné, čímž celý výpočet γ a δ_1 stává se illusorní. Celkem tedy možno říci, že srovnání hodnot δ a δ_1 naši theorii potvrzuje.

---

[1]) Wagner: Ann. der Phys. 27. pag 955 (1908).

O histologii tkáně šlachové v ohybech šlachových.

Napsal

Dr. Otakar V. Srdínko,
profesor university Karlovy.

S 3 obrazci v textu a 1 tabulkou.

(Z ústavu pro histologii a embryologii lékařské fakulty university Karlovy v Praze.)

Předloženo dne 4. listopadu 1921.

V předcházející rozpravě¹) pojednal jsem o funkcionální architektuře ohybů šlachových u člověka a naznačil, že o histologii tkáně šlachové v ohybových partiích pojednám příště.

Co nazývám „ohybem šlachovým" vysvětlil jsem v dřívější publikaci a laskavého čtenáře tam odkazuji.²)

V ohybu šlachovém shledáváme na příčném řezu dva typy tkáně šlachové: *a*) *normální*, t. j obvyklou *tahovou* tkáň šlachovou, která jest umístěna v partiích protilehlých a nejvíce vzdálených od plochy, na níž účinkuje tlak a tření; *b*) *tlakovou* tkáň šlachovou, která jest vytvořena při ploše tlakové tam, kde účinkuje na šlachu tlak od tvrdé podložky, tedy na př. v ohybech šlachových svalů: peronaeus longus, tibialis posterior, flexor hallucis longus, quadriceps femoris a caput longum musc. bicipitis.³) U šlach těchto svalů je tlaková struktura pouze při jedné ploše (tlakové), u šlachy svalu peronaeus brevis při obou plochách, spodní a horní, protáhle oválného příčného průřezu ohybem šlachovým.⁴) Partie tlaková souvisí zcela s ostatním tělem šlachy, nedá se mnohdy pro její pozvolný přechod do partie tahové určiti její hranice, nedá se vypraeparovati, není útvar samostatný, na šlachu přičleněný, nýbrž je to okrsek velmi značně modifikované tkáně šlachové, pevně sloučený na svém proximálním (nad ohybem) i distálním (pod ohybem) okraji neboli konci

---

¹) Rozpravy Č. A. roč. XXVI. tř. II., č. 2., pag. 1—36; 4 tabulky.
²) L. c. pag. 17—18.
³) L. c. pag. 18—23, 23, 27, 29.
⁴) L. c. pag. 29—30.

s tahovými snopci šlachy, jak to viděti jest na sagitálních řezech ohyby šlachovými; také směrem k ploše, která jest protilehlá ploše tlakové, přechází partie tlaková do partie tahové, jak to příčné průřezy přesvědčivě ukazují.

V čem spočívá modifikace, která odlišuje tlakovou strukturu šlachy od struktury tahové?

Modifikace ona spočívá v několika složkách neb znacích, které má šlacha tlaková:

1. mikroskopická anatomie ohybu šlachového liší se od mikroskopické anatomie šlachy tahové zvláštním uspořádáním peritenonia zevního i vnitřního; v ohybu šlachovém vytvořeny jsou tkání peritenonia ligamenta intradendinosní, orientovaná kolmo na působící tlak. Předložený praeparát ohybu šlachového dává poněkud jen zkušenému poznati nejen *místo* (plochu), na kterou tlak účinkoval, nýbrž i *směr* tlaku a jeho přibližnou *intensitu*. To bylo předmětem dřívější uvedené publikace,[1]) kde zároveň tato popsaná architektura označena byla s odůvodněním za funkcionální;

2. histologie tkáně šlachové v ohybu šlachovém jest rovněž jiná než v tahových partiích šlachy. Rozdíl spočívá:

a) v jiném uspořádání vazivových vláken šlachových,

b) ve změně charakteru povrchní části tkáně v partii tlakové, kterážto změna způsobena jest buňkami, z nichž některé produkují mezibuněčnou hmotu charakteru chrupavčitého.

Oběma těmito znaky šlachy tlakové t. j. zvláštním uspořádáním tkáně fascikulární a změnou tkáňového charakteru v povrchní partii tlakové obírá se přítomné moje sdělení.

*

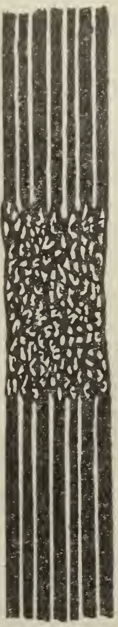
Vlastní, specifickou tkáň šlachovou můžeme nazvati tkání fascikulární, kdežto tkáň peritenonia zevního i vnitřního tkání interfascikulární neb perifascikulární. Tkáň fascikulární v ohybu šlachovém při ploše tlakové jeví se nám hustší, kompaktnější, což je důsledkem toho, že tkáně interfascikulární jest velmi málo a že netvoří pruhy, nýbrž tam, kde jest přítomna v šlaše tlakové, jeví se jako jemná síť. Tkáň fascikulární není proto ve šlaše tlakové rozdělena na snopce sekundární a terciární, jak to vidíme ve šlaše tahové. To jest jedna známka šlachy tlakové.

Vedle této vlastnosti vyznačuje se šlacha tlaková jiným uspořádáním tkáně fascikulární: snopce a vlákna vazivová neprobíhají zde rovnoběžně neb přibližně rovnoběžně s dlouhou osou šlachy, nýbrž šikmo neb příčně k této ose. Tato známka šlachy tlakové jest však kombinována s další, a tou jest to, že vlákna vazivová a jejich snopce neprobíhají bez anastomos, jak to po většině vidíme na šlaše tahové, nýbrž tvoří nepravidelně komunikující spletě, takže vzniká podivuhodná tkáň charakteru houbovitého, jak ji vidíme na tab. II. obr. 8. a 9. citované publikace. V mikroskopu jeví se nám na příčném řezu tato tkáň jako hustá síť trámců, v nichž jsou uloženy buňky šlachové a mezi spletenými trámci zejí prázdné skuliny tvaru nepravidelného. Výslovně podotýkám, že nepravidelné ony skuliny tvaru hvězdicového neobsahují buněk, nýbrž jsou prázdné, navzájem komunikují, čímž vzniká system dutin, které se mohou při tlaku zúžiti, stisknouti, při uvolnění tlaku roztáhnouti. Typ šlachy houbovité vzniká přechodem ze šlachy paralelně uspořádané tak, že každý snopec podélný se rozdělí ve dva (nebo více) a že nově tak vzniklé snopečky se pod určitým úhlem vychýlí z původního průběhu do jiných směrů a po kratičkém průběhu se spojí s částí jiného snopce, s nímž na krátký průběh utvoří společný snopec. Ten však záhy zase se rozdělí a dále spojí s jinými snopci, takže vznikne šlachová tkáň mřížovitá, jak to znázorňuje schematický obraz v textu č. 1. Skutečný mikroskopický obrazec této tkáně jest zařazen v publikaci nahoře citované při menším zvětšení pod č. 8. na tabulce II. a při větším zvětšení pod č. 9. na téže tabulce.

---

[1]) L. c. pag. 20—25, 34—35.

Tato mřížovitá tkáň není vždy stejně pregnantně vyznačena a také v různých ohybech různých šlach jest jí různé množství. Snopce šlachy tahové, které jsou celkem rovnoběžné, vcházejí do šlachy tlakové, která má strukturu mřížovitou. Spleť této houbovité tkáně jest tvořena vazivovými vlákny a snopci, které, opustivše svůj původní směr podélný, rovnoběžný s osou šlachy, dělí se na nové snopce a pod různými úhly se spojují a znovu opětovně dělí a spojují, až pak pod ohybem šlachovým zase přecházejí ve snopce paralelní, uložené vedle sebe v dlouhé ose šlachy (obr. 1. v textu). Tedy hlavní substrát okrsku tlakového v každém ohybu šlachovém není tkáň perifascikulární, nýbrž specifická tkáň fascikulární, která pozbývá tam pravidelného uspořádání, jaké má ve šlaše tahové, a přeměňuje se v síťovitě spletenou tkáň mřížovitou. Síťovité uspořádání šlachy tlakové má však mnoho odstínů neboli stupňů; kromě toho rozsah této šlachy v místech ohybů šlachových zasahá nestejně hluboko do těla šlachového.


Obr. 1.

Nejnižší typ jest blízký šlaše tahové a zakládá se pouze na mírném propletení a spojení snopců celkem podélných, a na mírném jich vybočování do směru šikmého k podélné ose šlachy. Střední typ obsahuje již značně spletené a vzájemně anastomusující snopce šlachové směru různého. Krajní, typická struktura tlaková jest tkáň šlachová mřížovitá neboli houbovitá, kde snopce šlachové po kratičkém průběhu vždy mění svůj směr i svoje spojení se snopci sousedními. Tato houbovitá šlacha, tvořená

1*

specifickou tkání fascikulární může býti (nemusí však býti) kombinována přítomností menšího neb většího množství tkáně interfascikulární.

Tím osvětlil jsem jeden histologický znak tkáně šlachové v ohybech šlach.

*

Druhým znakem histologickým, kterým různí se tlaková tkáň šlachová od tkáně tahové, jest změněný charakter povrchních částí tkáně v partiích tlakových.

Kdežto všechno to, co jsem sdělil v dřívější publikaci o funkcionální architektuře ohybů šlachových a co v tomto sdělení dosud jsem vylíčil o houbovité struktuře šlachy tlakové, v literatuře přede mnou popsáno dosud nikým nebylo, zabývala se histologickým charakterem šlachové tkáně v partiích tlakových, o kterém nyní chci pojednati, řada prací. Mezi badately vznikl však spor o podstatě této tkáně; kdežto jedni ji prohlašovali za chrupavku (vláknitou), druzí neviděli zde žádného rozdílu od vlastního vaziva šlachového, jiní zase popisují zde nový druh histologické tkáně vůbec.

Jest záhodno přehlédnouti nejprve udaje jednotlivých autorů. Na základě výsledků srovnávací histologie poukazuje se v poslední době s větším neb menším důrazem k tomu, že také u člověka a ssavců existují přechodní tvary podpůrných tkání, ba v některých knihách najdeme o nich zvláštní odstavce neb celé kapitoly.

Tak v knize Ellenbergově-Schumacherově[1]) na konci kapitoly o chrupavce jest připojen tento odstavec: „Pod názvem vesikulosní podpůrná tkáň („blasiges Stützgewebe“ Schaffer) rozumí se tvar pojiva, blížícího se funkcionálně tkáni chrupavkové, který jest vyznačen měchýřkovitými buňkami s pevnou, odporu schopnou stěnou. Jsou dva typy této tkáně. Buňky typu *chordoidálního* vypadají jako buňky tukové, mají blánu, při ní jádro a tekutý obsah, nikoliv povahy tukové. Mezi buňkami není hmoty mezibuněčné a buňky se dají lehko isolovati. Z nich jest složena chorda dorsalis u nižších zvířat; u vyšších zvířat přicházejí tyto buňky často roztroušeny ve vazivu, kde lehko mohou býti zaměněny s buňkami tukovými. Buňky typu *chondroidálního* mají stěny jako pouzdra, která tam, kde více takových buněk leží při sobě, splývají v souvislou pleteň. Typ chondroidální jest u nižších živočichů častým, přichází však také u ssavců, tak n. př. v dorsální sesamské kůstce u kočky, v chrupavčité části šlachy Achillovy, na tuber calcanei telete atd. a jest při nejmenším velmi blízský tkáni chrupavkové“!

---

[1]) W. Ellenberger a S. v. Schumacher: Grundriss der vergleichenden Histologie der Haussäugetiere. IV. Auf. 1914.

P. Schiefferdecker a A. Kossel[1]) ve své knize uvádějí samostatný typ „chondroidního vaziva", jehož buňky mají kulovitý neb ovální tvar a měchýřkovité vzezření a jsou podobny buňkám chrupavkovitým, při čemž základní hmota zůstává kollagenní. Chondroidní vazivo tvoří přechod mezi vazivovou chrupavkou a tkání šlachovou neb přichází samostatně. Přichází podle těchto autorů mimo jiné v sesamských chrupavkách mnohých šlach (šlacha m. peronei longi a m. tibialis poster.) a uprostřed vnitřní strany šlachy m. quadriceps a na šlaše Achillově.

H. Apolant[2]) ve své disertaci o vazivové chrupavce podotýká, že autoři nejsou jednotni v tom, co patří k vazivové chrupavce. Na rozdíl od Schiefferdeckera soudí, že buňka chrupavková nemá na sobě nic charakteristického a může býti prohlášena za buňku chrupavkovou jen tehdy, je-li nějakým způsobem dokázána hyalinní chrupavková hmota; k důkazu se hodí barvení haematoxylinem, který hmotu chrupavkovou intensivně barví, pro chrupavku charakteristickou jest jenom chondrogenní základní hmota, která jest hyalinní a dává při vaření chondrin. Kde chybí, nelze mluviti o chrupavce, nýbrž pouze o modifikaci buněk vazivových takové, že jsou podobny chrupavkovým buňkám. Tyto tkáně shrnuje Apolant pod název chondroidní vazivo.

Nejzevrubněji pojednává o přechodních tvarech tkání podpůrných J. Renaut,[3]) jenž jim věnuje ve své knize celou samostatnou kapitolu (Squelette fibreux primordial et ses diverses pieces adventices d'adaptation). Renaut rozeznává 1. tkáň fibrohyalinní, která přichází v skeletu u Gasteropodů a Cyclostomů, v uzlech sesamských šlachy Achillovy u žáby a jako podpůrný hyalinní system intravaginální provazců nervových u velkých ssavců; 2. tkáň vazivovou kartilaginiformní (tissue fibreux cartilaginiforme) a tkáň fibro-kartilaginosní (tissu fibro-cartilagineux), prvou v šlachách ohybačů u mladých ptáků, druhou v šlachách u ptáků dospělých a 3. tkáň fibrosní ossiformní (tissu fibreux ossiforme) a tkáň osteofibrosní (tissu ostéo-fibreux), prvou při inkrustaci šlachy, druhou při ossifikaci šlach u starých ptáků.

Již z toho, co uvedeno, vysvítá nejednotnost názorů o tkáních podpůrných, která se stane ještě patrnější po pročtení speciálních prací Studničkových, Schaffrových a j.

Vraťme se však ke své tkáni v ohybech šlachových. Koelliker[4]) prohlašuje ji za vazivovou chrupavku neb za „pravou chrupavku" aspoň při ploše tlakové. H. Tillmans[1]) viděl ve šlaše m. quadriceps u člověka buňky chrupavkové s hyalinním pouzdrem a považuje onu tkáň za vazivovou chrupavku. Rozprava, která se rozpředla mezi Schaffrem[2]) („vesikulosní podpůrná tkáň“) a mezi Studničkou[3]) (prvochrupavka — „Vorknorpel“) obsahuje mnoho zajímavých a cenných pozorování a dedukcí o přechodních tvarech tkaniv mezi vazivem a chrupavkou u nižších tvorů a hlavně obratlovců, tlakové tkáně šlachové ssavců a člověka se však netýká. Pouze Schaffer činí menší zmínku a praví, že pro ssavce a člověka chybí dosud doklady o vyskytování „vesikulosní podpůrné tkáně“; soudí však, že některá pozorování, uvedená v literatuře (Ciaccio, Tillmans, Skoda) opodstatňují domněnku, že i u ssavců a člověka tato tkáň přichází. Autor našel vesikulosní buňky na vnitřní ploše úponu šlachy m. quadriceps člověka a v ohybu šlachovém (sesamském uzlu) šlachy m. peronaeus longus člověka a jeho žák Skoda našel znamenitě vyvinutou tkáň vesikulosní v dorsálním uzlu sesamském u kočky. Také u telete při úponu šlachy Achillovy na tuber calcanei viděl Schaffer vesikulosní buňky mezi nezměněnými snopci šlachovými. Schaffer připouští možnost, že funkcionálním drážděním vesikulosní buňky přecházejí v buňky chrupavkové, takže v sesamském uzlu možno nalézti jak buňky vesikulosní, tak i části zchrupavčelé i zkostnatělé.

---

[1]) P. Schiefferdecker a A. Kossel: Gewebelehre. Erste Abteilung. 1891. pag. 270 a 271.

[2]) H. Apolant: Über Faserknorpel. Dissert. Berlín, 1980.

[3]) J. Renaut: Traité d'histologie pratique. T. I. 1888 pag. 336—360.

[4]) A. Koelliker: Handbuch der Gewebelehre d. Menschen. VI. A. I. 1189. pag. 379—380.

A tady soudím, že Schaffer učinil pravé rozpoznání a vyřkl správný názor, jak moje pozorování na přerozmanitých šlachách lidských různého stáří mi jsou toho dokladem. Přiznávám, že nechápu, jak vůbec by mohl v přítomné době býti spor o tom, zda na některém místě skelletu neb šlachy může se nalézti tkáň vesikulosní neboli prvochrupavka či zda to jest chrupavka. Vždyť přece se mohou vyskytnouti obě tkáně vedle sebe a nebo střídavě jednou ta, podruhé ona, podle stupně modifikace, jakého následkem funkce ono místo šlachy neb jeho jednotlivé partie právě dosáhly.

Přistoupím nyní k popisu svých nálezů. Jaký materiál jsem studoval, uvedeno jest v dřívější publikaci, kdež zároveň jest vylíčena moje methoda řezání zmrzlých šlach. Tamtéž odůvodněna jest mnou používaná terminologie.[4])

Tkáň, která se nalézá na vnitřní ploše šlachových ohybů, se nejlépe studuje na řezech frontálních, t. j. na řezech vedených rovnoběžně s vnitřní plochou; možno nazývati tyto řezy také plošnými na rozdíl od řezů příčných a sagitálních. Na těchto posledních dvou druzích řezů zasažena jest tkáň vnitřní plochy v malém rozměru, kdežto na plošném řezu jest přítomna výhradně ona tkáň. Třeba však znáti postup řezů, t. j. jich vzdálenost od povrchu do hloubky.

---

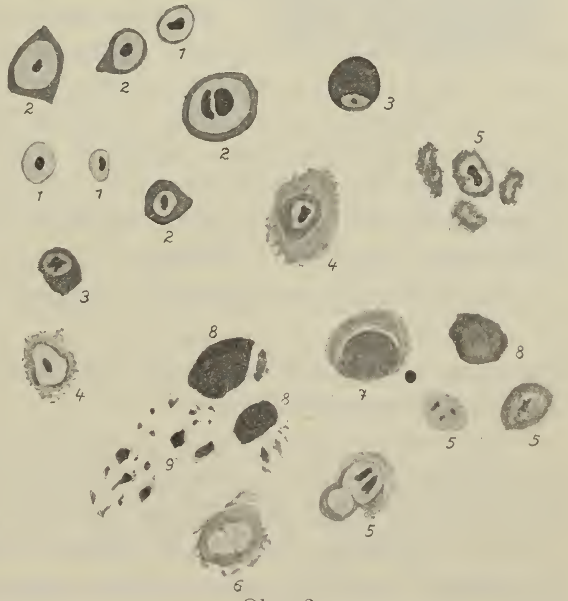
[1]) H. Tillmans: Beiträge zur Histologie der Gewebe. Arch. f. mikr. Anatomie. B. X. 1873. pag. 417—418.

[2]) J. Schaffer: Bemerkungen über die Histologie und Histogenese des Knorpels der Cyclostomen. A. f. m. Anat. B. 50. 1897. — Über das vesikulöse Stützgewebe. Anat. Anz. B. 23. 1903. pag. 476—479.

[3]) F. K. Studnička: Histologische u. histogenetische Untersuchungen über das Knorpel-, Vorknorpel- und Chordagewebe. Anat. Hefte B. 21. Abt. I. 1903, pag. 339.

[4]) L. c. pag. 14—18.

Na tabulce I. obr. 1. vidíme mikrofotografii plošného řezu z vnitřní plochy malleolárního ohybu šlachy svalu tibialis posterior člověka 58 r. starého. Jest to první řez od povrchu vnitřní plochy as 15μ tlustý. Vidíme v základní hmotě nestejnoměrně roztroušené buňky. Základní hmota jest po většině slabě modře haematoxylinem zbarvená a obsahuje partie téměř homogenní a partie zřejmě vláknité. Vlákna jsou zasažena ve všech směrech i příčně. Buňky mají oválné neb kulaté jádro, kolem zcela světlé protoplasma, často svraštělé a retrahované od základní hmoty. Kolem některých buněk jest patrné pouzdro, tmavě modře zbarvené, jiné buňky obyčejně jednotlivě isolované mají kolem sebe nepravidelně na periferii ohraničený velký okrsek tmavě zbarvené hmoty homogenní. Jinde tvoří basicky zbarvená pouzdra několika buněk souvislou síťovinu. V partiích řezu jen poněkud hlubších nastupuje hojně vláken paralelních i různosměrných. Buňky v těchto partiích jsou dvojí: obyčejné šlachové fibroplasty i buňky větší, vzezření měchýřkovitého bez pouzdra neb se zřejmým pouzdrem. Buňky jsou buď nepravidelně roztroušené neb v řadách mezi snopci vláken paralelních. Snopce vláken paralelních i ony řady buněčné jsou orientovány často kolmo na vlastní fascikulární tkáň šlachovou a uloženy jsou tedy napříč šlachy. Hyalinní, modře zbarvená hmota kolem řad buněčných někde úplně zastírá vlákna vazivová, jinde jen částečně. Vůbec možno říci: existuje mnoho stupňů neboli odstínů mezi buňkou vazivovou a buňkou s pouzdrem a celým dvorcem hyalinním kolem.



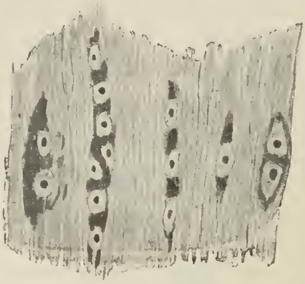
Obr. 2.

Obr. 2. na tabulce jest část plošného řezu z místa kuboidálního ohybu šlachy svalu peronaeus longus muže 58 r. starého. Jest to prvý řez od plochy tlakové. Není třeba snad připomínati, že se nepodaří vésti nůž rovnoběžně s vnitřní plochou, již proto ne, že jest nerovná a že tedy plošné řezy jsou vždy částečně řezy šikmými k ploše tlakové. To jest viděti i na tomto obrazci 2., kde hoření okraj obsahuje vrstvu nejvnitřnější šikmo říznutou a za ní vrstvy hlubší. Zcela povrchní vrstva liší se od vrstev hlubších souvislou hyalinní, basofilní hmotou. Ve vrstvě hlubší vidíme pouze oddělené ostrovy této basofilní, homogenní hmoty a mezi ostrovy jest hmota vláknitá. Buňky jsou v povrchní i v hlubší vrstvě stejné. Jsou tvaru oválního neb kulatého, některé jsou zřejmě měchýřkovité. Ve vrstvě ještě hlubší, která na fotografii č. 2. již není zasažena, vidíme zřejmě paralelní snopce vláken a mezi nimi řady buněčné; některé buňky jsou větší, měchýřkovité a mají v okolí hmotu basofilní, homogenní.

Celkem jsem zjistil v těchto povrchních vnitřních vrstvách ohybů šlachových buňky, jak jsou znázorněny na obr. 2. v textu.

Vidíme zde jednak buňky obyčejné s tenkým pouzdérkem (1), dále buňky měchýřkovité s více neb méně tlustým basofilním pouzdrem (2), tu a tam buňku s velkým nahromaděním homogenní hmoty hyalinní kolem (3), dále buňky, u nichž pouzdro jest temněji zbarveno haematoxylinem než hyalinní hmota přilehlá (4), dále buňky, které činí dojem buněk zacházejících (5, 6), konečně ostrůvky hmoty hyalinní bez buněk (7, 8) neb drobné ostrůvečky téže basofilní hmoty (9).

Buňky měchýřkovité hlubších vrstev vláknitých znázorněny jsou na obr. 3. v textu.



Obr. 3.

Abych se přesvědčil o skladbě základní hmoty, která jest mezi právě popsanými buňkami ve vrstvě tlakové, barvil jsem plošné řezy orceinem. Jak obr. 3. na tabulce I. ukazuje, nalézá se tam vedle vláken kolagenních velké množství různě tlustých, rozvětvených, a v nejrozmanitějším směru uložených vláken elastických. Největší část jich směřuje od povrchu šikmo do hloubky. Obrazec tento jest vzat z plošného řezu vnitřní plochy šlachového maleolárního ohybu svalu tibialis post. muže 30 r. starého.

Obr. 4. na tab. I. vzat jest z plošného řezu vnitřní plochy maleolárního ohybu šlachy svalu peronaeus longus muže 50 r. starého. Orceinem zbarvena jsou jemná elastická, rozvětvená vlákenka, která sahají až k vnitřnímu povrchu šlachy.

Obr. 5. na tab. I. pochází z plošného řezu vnitřní strany šlachy v ohybu kuboidálním svalu peronaeus longus člověka 58 r. starého. V tomto řezu lze viděti různé tvary buněk, jak jsou znázorněny na obr. 2. v textu a vedle toho buňku, která má nesmírně veliký, basofilní plášť; buňka jest uložena ve středu svého tlustého pláště. Podobný plášť má buňka, uložená však excentricky, na obr. 6. tab. I., která pochází z plošného řezu vnitřní vrstvou téže šlachy jako v případě předcházejícím. Takovýchto buněk přichází však celkem velmi málo.

Konečně na obr. 7. na tabulce vidíme tři větší buňky měchýřkovité, z nichž jedna má jádro ve stavu dělení, tenké pouzdro silně basofilní a kolem plášť hyalinní, méně se barvící.

Jest nutno dáti odpověď k otázce, za co jest prohlásiti tuto tkáň na vnitřní ploše ohybů šlachových u člověka.

Obrazce moje shodují se s těmi, které Tillmanns kreslí v citované své práci na tab. XXVIII pod č. 6 a 7. Jeho buňky vzaty jsou ze šlachy m. quadriceps od člověka. Tillmanns jmenuje ony buňky s pouzdry buňkami chrupavkovými, buňky měchýřkovité ploténkami buněčnými (elastische Zellplatten, Boll). Tkáň tuto považuje za vazivovou chrupavku. Buňky na mých preparátech uložené v řadách mezi vlákny podobají se velice obrazci, který kreslí Studnička v citované publikaci na tab. XLIV. pod č. 38, označuje buňky ony za chrupavkové.

Jsem rozhodnut k tomuto výkladu svých preparátů: Ohyby šlachové u člověka na vnitřní své ploše povlečeny jsou modifikovanou tkání, která nám představuje různé stupně přechodných tvarů mezi vazivem vláknitým a chrupavkou hyalinní.

Jsou případy, zvláště u šlach starších individuí, kde na vnitřní ploše ohybů šlachových vytvořena jest tenká vrstvička hyalinní (sklovité) chrupavky s buňkami a homogenní, basofilní hmotou mezibuněčnou. U jiných šlach nedostoupila chondrifikace toho stupně a my tam nalézáme buďto vrstvičku chrupavky vazivové neb jen tkáň vazivovou s buňkami, jichž jedna část jest na přechodu v buňky chrupavkové. Přípravou k přeměně fibroblastu v buňku chrupavkovou jest měchýřkovité zvětšení buňky a počátek tvoření pouzdra. Všechny tyto stupně mohou býti vedle sebe přítomny na různých místech třecí plochy šlachové a v různé její hloubce. Přeměna fibroblastů v buňky opouzdřené může zasáhnouti nejen vnitřní plochu, nýbrž tkáň interfascikulární i tkáň fascikulární (specifickou šlachovou) do různé hloubky. Na vnitřní ploše vidíme dělení buněk obyčejně do skupin (groupes isogéniques coronaires, Renaut); ve tkáni fascikulární jest dělení buněk v řady (groupes isogéniques axiaux, Renaut).

Mluviti o vesikulosní podpůrné tkáni u člověka bych nepovažoval za potřebné. Představa o takové tkáni, jak zobrazují různí badatelé a zvláště Schaffer a Studnička u nižších obratlovců, vyžaduje nahromadění měchýřkovitých buněk s pouzdry ve velkých skupinách a okrscích, kdežto zde převládá rozptýlení buněk ve hmotě mezibuněčné. Ostatně myslím, že na jméně tak nezáleží jako na vystižení charakteru té tkáně.

Na základě uvedeného soudím, že není třeba u člověka rozeznávati nový druh tkáně podpůrné neb pojivové mezi vazivem a chrupavkou a že stačí míti vědomí o četných stupních přechodních mezi oběma skupinami.

Velmi zajímavým by bylo sledovati do podrobnosti jak histogenesu tak mechanogenesu těchto přechodních forem tkanivových.

*

Shrnu-li výsledky svého studia o histologii tkáně šlachové v ohybech šlachových, mohu říci toto:

Tkáň ona se vyznačuje dvěma zvláštními znaky: jednak odchylným uspořádáním snopců šlachových jednak svým změněným charakterem.

První znak, totiž odchylné uspořádání šlachových snopců proti uspořádání v obyčejné tahové šlaše, jest složen ze tří složek:

a) fascikulární tkáň jest v tlakových okrscích hustší;

b) směr snopců a vláken vazivových není rovnoběžný;

c) snopce a vlákna navzájem anastomosují, tvoříce tkáň houbovitou neboli mřížovitou.

Ad *a*) Tkáň fascikulární v ohybu šlachovém při ploše tlakové jeví se do určité hloubky hustší, kompaktnější, protože v těch místech jest tkáně interfascikulární málo a ona netvoří široké pruhy, nýbrž jeví se jako jemná síť, složená z vláken kolagenních i elastických. Okrsky šlachy tlakové nejsou děleny na snopce sekundární a terciární, jak to vidíme ve šlaše tahové.

Ad *b*) Snopce a vlákna kolagenní neprobíhají v ohybu šlachovém rovnoběžně s dlouhou osou šlachy, nýbrž mění směr podélný šikmý i příčný, průběh rovný v obloukovitý neb spirální.

Ad *c*) Vlákna navzájem anastomosují t. j. část jednoho vlákna se oddělí od původního vlákna a vytvoří z části jiného vlákna nové vlákno, neb část snopce s části druhého snopce snopec vláken nový, takže vzniká vazivová tkáň mřížovitá, složená z husté sítě trámců, v nichž jsou uloženy buňky šlachové a mezi spleti trámců zejí prázdné skuliny nepravidelného tvaru, spolu související, vyplněné za živa šťávou tělní.

Houbovitý okrsek šlachy v ohybu přechází proximálně i distálně v normální tahovou šlachu nebo v úpon šlachový. Do hloubky zasahuje tato tkáň různě hluboko, což jest odvislo od intensity tlaku. Rovněž stupeň vývoje této houbovité šlachy jest různý, jako nahoře šíře vysvětleno.

Mřížovitá šlacha, tvořená šlachovou tkání fascikulární, může býti kombinována přítomností určitého množství tkáně interfascikulární elastické i kolagenní.

Druhým znakem tkáně šlachove v ohybech šlachových jest změna tkáňového charakteru v povrchních partiích tlakové plochy, kterážto změna způsobena jest buňkami, z nichž některé produkují mezibuněčnou hmotu hyalinní a vytvořují kolem sebe pouzdra. Tím celá tato tkáň přibližuje se chrupavce. Modifikace vazivového charakteru tkáně v charakter chrupavčitý má mnoho stupňů, které mohou býti přítomny vedle sebe v tomtéž ohybu šlachovém, podle stupně funkce (hlavně tlaku a tření) z příslušného místa. Přeměna buněk vazivových v buňky opouzdřené může zasáhnouti nejen vnitřní třecí plochu, nýbrž i tkáň interfascikulární i fascikulární do různé hloubky. Stářím u člověka se tato přeměna stupňuje.

Soudím, že tato modifikace jest vyvolána funkcí a v popsaných změnách tkáňového charakteru v ohybech šlachových vidím přímo klasický doklad a demonstrační případ funkcionálního přizpůsobení podpůrných tkání.

Vysvětlení k obrazcům na tabulce.

Zvětšení u obr. 1.—4. asi 500, u obr. 5.—7. asi 100násobné.

Obr. 1. Šlacha svalu tibialis posterior, muže 58. r. starého. Ohyb malleolární. Řez plošný. Haemat.-eosin.

Obr. 2. Šlacha svalu peronaeus longus, muže 58 r. starého. Ohyb kuboidální. Řez plošný. Haemat.-eosin.

Obr. 3 Šlacha svalu tibialis posterior muže 30 r. starého. Ohyb malleolární. Řez plošný. Orcein.

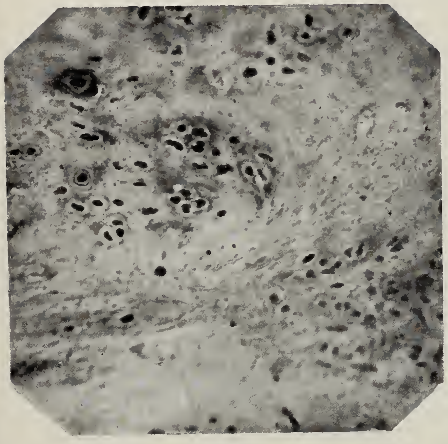
Obr. 4. Šlacha svalu peronaeus longus, muže 50 r. starého. Ohyb malleolární. Řez plošný. Orcein.

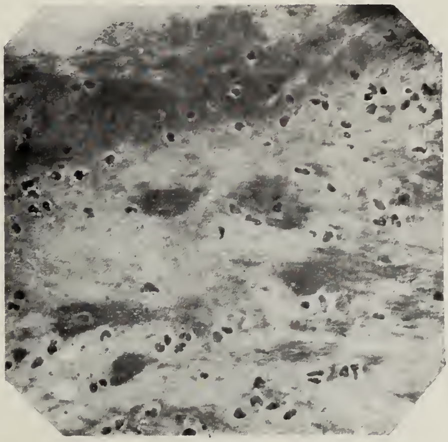
Obr. 5. Šlacha svalu peronaeus longus muže 58 r. starého. Ohyb kuboidální. Řez plošný. Haematox.-eosin.

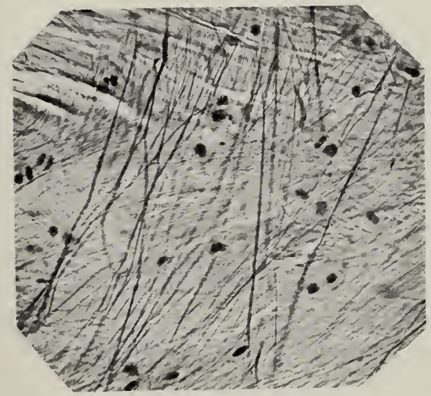
Obr. 6. Jiný plošný řez z předešlé šlachy. Haematox.-eosin.

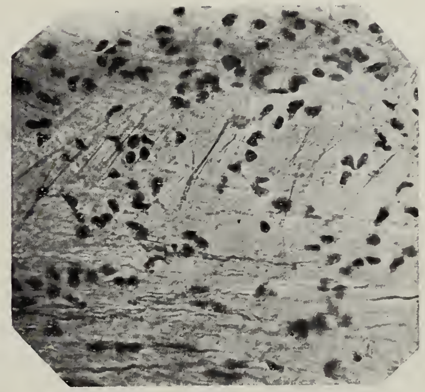
Obr. 7. Šlacha svalu tibialis posterior muže 50 r. starého. Ohyb malleolární. Haematox.-eosin.

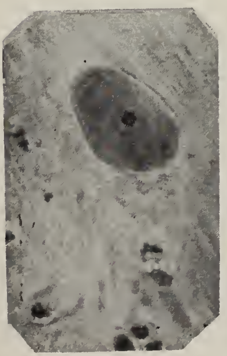
Dr. Otakar Srdínko: O histologii tkáně šlachové v ohybech šlachových.

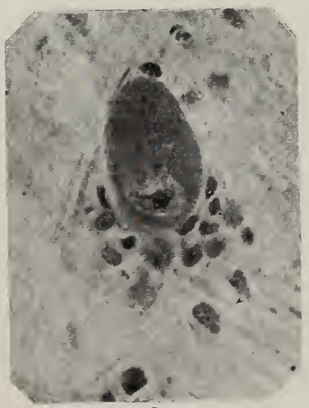

1.

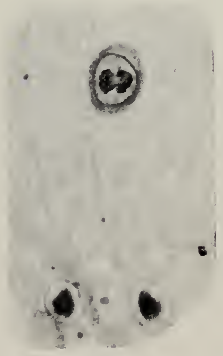

2.


3.


4.


5.


6.


7.

Rozpravy: Ročník XXX. Třída II. Číslo 38.

Roztoky hlinitanů alkalických zemin.

Podávají

Dr. J. Heyrovský, H. Kadlcová a K. Stoklasová.

(Předloženo dne 4. listopadu 1921.)

Bylo ukázáno,1) že hydroxyd hlinitý reaguje jako kyselina tím, že tvoří s louhy additivní sloučeniny, při čemž žádný z vodíků hydroxylových skupin hydroxydu hlinitého se nesubstituje kovem.

Hlinitany tedy vznikají additivním processem, na př.

$$Al(OH)_3 + NaOH \longrightarrow Al(OH)_3 \,.\, NaOH$$

čili podle iontové theorie

$$Al(OH)_3 + OH' \longrightarrow Al(OH)_4'.$$

Tato reakce byla dosud zkoumána jen v jednosytných louzích. I bylo záhodno prozkoumati také roztoky hlinitanů alkalických zemin, reaguje-li v nich kyselina hlinitá jako jednosytná, obzvláště proto, že pevné hlinitany z těchto roztoků se vylučující mají rozmanité složení.

Krystalické hlinitany alkalických zemin prozkoumali Beckmann2) a Allen a Rogers.3)

Sloučeniny, jež udávají, můžeme rovněž pojímati za additivní, neboť v nich vždy počet molekul krystalické vody vystačuje na plnou hydratisaci hydroxydů. Výsledky jejich analys lze pak psáti ve formě:

$$Ca(OH)_2 \,.\, Al(OH)_3 \,.\, H_2O,\ \ 3\,Ca(OH)_2 \,.\, 2\,Al(OH)_3;$$
$$Sr(OH)_2 \,.\, 2\,Al(OH)_3 \,.\, H_2O,\ \ 3\,Sr(OH)_2 \,.\, 2\,Al(OH)_3;$$
$$Ba(OH)_2 \,.\, 2\,Al(OH)_3 \,.\, H_2O,\ \ Ba(OH)_2 \,.\, Al(OH)_3.$$

Jest nyní otázkou, jak se tyto sloučeniny ionisují.

---

1) Heyrovský: Kyselina hlinitá. Rozpr. II., r. XXX. č. 27.

2) Journ. prakt. Chem. 26. p. 385 (1882).

3) Amer. Chem. Journ. 24 p. 304 (1900).

Hlinitany magnesia a kalcia.

Tyto hlinitany se pro svou nepatrnou rozpustnost ku zkoumání povahy roztoků nehodí, jak ukazují následující pokusy:

Čistý (Kahlbaumův puriss.) kysličník hořečnatý, vyžíhaný, byl za nepřístupu atmosferického kysličníku uhličitého několikráte propírán vodivostní vodou až získán roztok o specifické vodivosti (při 25⁰ C) $1{\cdot}11 \times 10^{-4}$ mho. Do tohoto roztoku byl vhozen plíšek amalgamovaného aluminia (98%, se stopami Fe, Cu), jenž se za vývoje vodíku po několika hodinách rozpustil a naplnil roztok hydroxydem hlinitým. Specifická vodivost roztoku při tom klesla na hodnotu $0{\cdot}273 \times 10^{-4}$ mho, což ukazuje, že vytvořivší se hlinitan hořečnatý má rozpustnost ještě asi dvakrát menší než hydroxyd hořečnatý.

Podobný pokus byl učiněn s kysličníkem vápenatým. Čistý Kahlbaumův preparát, vyžíhaný, byl za nepřístupu CO_2 ve vodě rozpuštěn a získán tak roztok vápna o specifické vodivosti $8{\cdot}30 \times 10^{-3}$ mho (při 25⁰ C). Po rozpuštění amalgamovaného plíšku aluminia klesla vodivost na $1{\cdot}90 \times 10^{-3}$ mho a zůstala konstantní, když bylo přidáváno aluminia více. Zároveň se z roztoku vylučoval bílý lupenkovitý hlinitan vápenatý.

Kryoskopickou methodou bylo stanoveno snížení bodu mrazu roztoku vápna 0·087⁰ C, po nasycení kyselinou hlinitou se však zmenšilo na 0·028⁰ C.

Rozpustnost hlinitanu vápenatého vychází z těchto pokusů rovna třetině rozpustnosti vápna.

Stroncium.

Hlinitan stroncia jest již tak rozpustný, že lze podrobněji zkoumati jeho roztoky kryoskopickou methodou. Velikost snížení bodu mrazu ukazuje totiž počet iontů v roztoku a proto při neutralisaci hydroxylových iontů tvořením se dvoj- či trojsytných aniontů musil by se úbytek částeček projeviti zmenšením snížení bodu mrazu.¹)

Roztoky byly připraveny a chovány za nepřístupu CO_2 v nádobkách toliko zábrusy opatřených. Použito bylo Kahlbaumova pro anal. SrO.

Bylo nalezeno:

v 0·057 norm. roztoku $Sr(OH)_2$

počet gram-atomů Al rozpuštěných v litru:	snížení bodu mrazu:
0	0·159⁰ C
0·005	0·170
0·011	0·175
0·050	0·172
0·056	0·176

---

¹) Noyes a Whitney: Zeitsch. phys. Chem. 15 p. 693 (1894).

Po několika týdnech, když již z roztoku částečně vykrystalisoval hydroxyd hlinitý, bylo vážkovou analysou roztoku stanoveno, že na gram-atom stroncia připadá 0·90 gram-atomu aluminia.

Jest zřejmo, že kdyby šlo aluminium do roztoku v dvojsytných aniontech, klesl by osmotický tlak a s ním i snížení bodu mrazu o třetinu, kdyby se tvořily trojsytné anionty, zmenšilo by se snížení bodu mrazu ještě více. Osmotický tlak však, jak pozorování bodu mrazu ukazuje, nejen že neklesá, nýbrž i o něco stoupá, tak že žádné jiné anionty než jednomocné v roztoku tohoto hlinitanu přítomny býti nemohou.

Baryum.

Roztoky barnaté byly pro poměrně velkou rozpustnost hydroxydu a hlinitanu zkoumány kryoskopicky i sledováním změny vodivosti.

V roztoku (Merckova puriss.) hydrátu barnatého bylo postupně rozpuštěno aluminium a po každém přidání a úplném rozpuštění byla určena vodivost a snížení bodu mrazu.

Nádobka vodivostní i kryoskopická byly připojovány k nádobě s roztokem pomocí zábrusů a chráněny před rozkladným účinkem atmosferického kysličníku uhličitého rourkami s natronovým vápnem.

Bylo pozorováno:

v 0·0605 n. roztoku $Ba(OH)_2$:

počet gram-atomu Al rozpuštěných v litru:	specifická vodivost při 0° C	snížení bodu mrazu
0	$6{\cdot}745 \,.\, 10^{-3}$ mho	0·119° C
0·0206	4·855 ,,	0·120
0·0313	3·927 ,,	0·120
0·0428	2·909 ,,	0·120
0·0626	1·880 ,,	0·120
0·0759 rozklad	4·137 ,,	0·125

Pokles vodivosti postupuje s rostoucí koncentrací aluminia v roztoku úplně lineárně, jak na př. z grafického znázornění ihned vysvitne, a nejeví nikde změny, jež by se dala připsati tvoření se dvoj- či trojsytného aniontu kyseliny hlinité.

Po dosažení poměru gram-atomů aluminia ku bariu 2 : 1 nastal v roztoku spontánní rozklad, při čemž se část kyseliny hlinité z roztoku vyloučila ve formě krystalického hydroxydu hlinitého; vodivost pak stoupla na hodnotu jako měl roztok z pola nasycený hydroxydem hlinitým, obsahující gram-atom aluminia na 2 gram-ekvivalenty baria, což svědčí o 50% hydrolyse konečného roztoku.

Snížení bodu mrazu zůstává nezměněno, což značí, že anionty roztoku jsou jednomocné.

Podobně bylo do 0·186 n. roztoku louhu barnatého postupně přidáváno až 0·15 gram-atomu aluminia na litr; snížení bodu mrazu pozvolna se zmenšovalo z 0·380° C u čistého louhu na 0·363° C u nejkoncentrovanějšího aluminátu. Podle analysy obsahoval tento roztok 0·97 gram-atomu aluminia na gram-atom barya; jest tedy z 50% hydrolysován. Kryoskopické údaje tu opět svědčí o jednosytnosti kyseliny hlinité; neboť kdyby roztok obsahoval anionty dvojsytné kyseliny, kleslo by snížení bodu mrazu z 0·380° čistého louhu na 0·25° u roztoku obsahujícího stejný počet gram-atomů aluminia a baria.

ZÁVĚR.

Malé změny ve snížení bodu mrazu a pravidelnost v klesání vodivosti při sycení louhů alkalických zemin hydroxydem hlinitým ukazují, že roztoky hlinitanů alkalických zemin mohou obsahovati vedle kationtů kovů a hydroxylových iontů toliko jednomocné anionty jednosytné kyseliny hlinité. Nasyceny čerstvým hydroxydem hlinitým, vznikajícím při rozpouštění aluminia, obsahují téměř jen anionty $Al(OH)_4'$; po vykrystalování kyseliny hlinité vzroste hydrolysa na 50%, tak že obsahují asi stejný počet iontů OH' a $Al(OH)_4'$, právě jako bylo pozorováno v roztocích hlinitanů kovů alkalických. Svrchu uvedené pevné hlinitany alkalických zemin mohou povstati skládáním se těchto iontů v krystalové mřížoví, v roztocích se však rozpadají úplně na jednomocné anionty.

Jednosytnost kyseliny hlinité možno nyní považovati za všeobecně prokázanou a reakci, podle níž se veškeré louhy neutralisují kyselinou hlinitou, za additivní proces

$$Al(OH)_3 + OH' \longrightarrow Al(OH)_4'.$$

Měření byla konána v chemickém ústavě Karlovy university v oddělení pana prof. B. Braunera, jemuž autoři děkují za jeho zájem při této práci.

Dr. J. Heyrovský, H. Kadlcová a K. Stoklasová:

Roztoky hlinitanů alkalických zemin.

OBSAH.

Zkoumání osmotického tlaku, vodivosti a analytický rozbor roztoků vzniklých při rozpouštění aluminia v louzích alkalických zemin ukazují, že ťu vznikají anionty pouze jednosytné kyseliny hlinité.

V roztocích těchto existují toliko ionty $Bä^{\cdot\cdot}$, OH' a $Al(OH)_4'$, a podobně u Sr resp. Ca, tak že process při neutralisaci kyseliny hlinité louhy jest všeobecně

$$Al(OH)_3 + OH' \longrightarrow Al(OH)_4'.$$

Po vykrystalování hydroxydu hlinitého z roztoku dostavuje se 50% hydrolysa, právě jako u hlinitanů alkalií.

Ve srovnání s hydroxydy jest rozpustnost hlinitanu magnesia a kalcia značně menší, u hlinitanu, stroncia a baria téměř stejná.

O korrelační citlivosti u rostlin.

Napsal

Dr. Jan Kořínek.

(Předloženo dne 4. listopadu 1914.)

Při pokusech o vyšetření symmetrie klíční rostliny pomocí vzrůstu úžlabních pupenů pozoroval jsem tento zjev. Rostliny, které byly pěstovány v hlíně v květináčích vytvořily úžlabní lodyhy statné, silné, celkem nepatrně se od sebe lišící. Naproti tomu, pěstoval-li jsem rostliny v pouhé vodě nebo pilinách, byla difference mezi pupeny daleko značnější. Pátral jsem po zjevu tom v literatuře a shledal jsem, že mnoho o něm známo není. Bylo patrno, že korrelace se utvářejí za špatných podmínek zřetelněji, než když má rostlina vše, čeho k vzrůstu svému potřebuje.

Budu se zabývati toliko korrelacemi, které existují mezi oběma pupeny v úžlabí děloh. Je známo, že ony pupeny vyrůstají v lodyhy toliko tehdy, když korrelativní působení hlavní osy je znemožněno buď prostým odstraněním nebo zastavením vzrůstu na př. zasádrováním. W. Mogk konal pokusy tak, že hlavní osu zasádroval. Tím vyvolal vzrůst pupenů úžlabních. Na to uvolnil osu hlavní a všímal si nyní poměru jejího k větší ose vedlejší. Menší vůbec nebral v úvahu, neboť úloha její se mu zdála podřadnou.

Mac Callum má své pojednání nadepsáno: „Regeneration in plants“ avšak z větší části se vlastně jedná o korrelace. Autor pracoval většinou s *Phaseolus multiflorus* a řeší problem, co jest příčinou regenerace, nebo pro náš případ, vzrůstu úžlabních děložních pupenů. Probírá za sebou jednotlivé možnosti, t. j. faktory, které normálně na vzrůst působí jako: potrava, voda, poranění a p. Popírá vliv těchto faktorů při regeneraci a přichází k názoru, že rostoucí orgán přímo jakýmsi drážděním šířícím se snad plasmodesmy znemožňuje reservám orgánovým rozvoj. Teprve odstraněním vládnoucího orgánu uvolní se orgány utlumené a začnou růsti.

V dalším chci se zabývati toliko poměrem obou úžlabních pupenů k sobě. Jak jsem se už zmínil, pozoroval jsem, že poměr ten byl docela jiný u rostlin pěstovaných v květináčích v zahradě, než u rostlin pěstovaných ve vodě neb v pilinách. Bylo patrno, že při nedostatku potravy je poměr mezi oběma úžlabními osami daleko větší, než rostou-li rostliny za dobrých podmínek. V literatuře jsem našel jen dvě zmínky tohoto zjevu se celkem dosti neurčitě dotýkající, rozhodně však nenašel jsem nic, kde by celá věc byla experimentálně vyřešena. V Mogk-ově práci nacházím několik míst, z nichž by bylo snad patrno jaké tušení toho zjevu. Na jednom místě praví ještě: „... ein Entfernen der Kotyledonen die Korrelationen zwischen Hauptsproß und ausgetriebenen Kotyledonaraxillaren ebensowenig im Wesen beeinflust.“ To uvádí jako výsledek pokusů, kdy odstranil obě dělohy a pozoroval zase poměr ze sádry uvolněné hlavní osy a větší osy úžlabní. Dodává: „... das Verhalten der Sprosse in dem erwähnten Fall ist vielmehr in einer größeren Empfindlichkeit des Hauptsprosses gegenüber dem Einfluß des Kotyledonaraxillars begründet, und diese Empfindlichkeit ihrer-seits in einer Schwächung der gesamten Pflanze, wie sie aus der Entfernung der Kotyledonen folgt“ (str. 602). Ku konci práce konečně nacházíme místo: „Durch ungünstige Bedingungen lässt sich die Empfindlichkeit gegen korrelative Einflüsse leicht steigern“ (str. 655). Ovšem nikde nenacházíme zřetelně vysvětleno, co se onou „Empfindlichkeit gegen korrelative Einflüsse“ myslí.

Jinou zmínku nacházíme v Goebel-ově „Organographii“ (I. díl, str. 441). Tam je totiž řeč o korrelacích mezi listem a palistem. Goebel dokazuje, že po odstranění čepele listové zvětšují se silně palisty. Pod čarou je polemická poznámka. Reitsma ve své práci (kterou jsem neměl příležitost poznat) Correlative Variabilität bij Plante. Amsterdamer Dissert. Rotterdam 1907, tvrdí proti Goebel-ovi, že velke listy bývají provázeny velkými palisty a o existenci korrelace pochybuje. Goebel uvádí několik důkazů pro svůj názor a autora odbývá slovy: „Reitsma bezweifelt das Vorhandensein einer Korrelation, weil er fand, daß den großen Laubblättern auch große Nebenblätter entsprechen (ebenso auch bei *Lathyrus Aphaca*). Das bei kräftig ernährten Pflanzen sowohl Blätter als Nebenblätter sich stärker entwickeln als bei anderen, ist aber eingentlich selbsverständlich. Gegen eine Korrelation beweist das gar nichts! Denn wenn ein Überfluß an Baustoffen vorhanden ist, kann natürlich ein Wettbewerb um diese nicht in Betracht kommen.“ Jak už řečeno, celá otázka je jaksi odbyta touto poznámkou a v celé ostatní „Organographii“ se autor věci více nedotýká. Poslední věta vystihuje dosti dobře celou věc, jenže schází pro ni experimentální důkaz. Jinak jsem v literatuře ničeho podrobnějšího nenašel.

Jak už řečeno, byl jsem přiveden k studiu korrelační citlivosti pozorováním vzrůstu obou úžlabních lodyh, jak se jevil jednak u rostlin za dobrých podmínek rostoucích, jednak u rostlin rostoucích v pouhé vodě. Soudil jsem, že množství potravy je velmi důležitým činitelem v utváření se korrelací a tudíž zařídil jsem několik serií pokusů; jednak jsem rostlinám ubral reservního materiálu, jednak jsem jim přidal k stávajícím reservám minerálných látek.

I. skupina pokusů.

Rostliny rostly za menšího množství reservního materiálu.

Methodika byla celkem jednoduchá. Odřezával jsem části děloh u *Pisum sativum, Vicia Faba, Phaseolus multiflorus,* a *Aesculus hippocastanum.* U všech rostlin dopadly pokusy analogicky. Rostliny jsem dal vyklíčiti a vyklíčeným odňal větší neb menší část děloh. Přirozeně bylo nutno uříznouti z obou stejně — jednostranné porušení by zde bylo na závadu. Rozumí se, že vegetační vrchol byl odstraněn a rostliny zasunuty na okraj zkumavky. (Kořínek 1922.) Prostředím byla za těchto okolností vždy jen voda z brněnského vodovodu. Rostliny s dělohami zachovanými sloužily vždy k stanovení normálu. K vyšetřování poměru obou lodyh jsem užíval vesměs methody vážení. Většina autorů spokojila se s pouhým měřením obou vedlejších os. Mně se tato methoda nezdá dosti přesnou. Jednak délka rostliny neznamená ještě její zdatnost —existuje etiolement následkem nedostatku potravy. Dále při obyčejném měření není vystižen rozvoj postranních orgánů. Já jsem tedy vždy po určité době — asi 14 dnech — při celé serii odříznul úžlabní lodyhy a vážil vždy současně všechny menší a všechny větší vždy dohromady. Kalkulací jsem pak dostal čísla, která jsem potřeboval. Naprosto se mi zdálo zbytečným vážiti každou lodyhu zvláště — jasnější obraz poskytují průměrná čísla — přirozeně tím více odpovídají pravdě, čím z většího materiálu byla vypočtena. Protože se jednalo vždy o pokusy komparační, nebylo nutno ani přesně dbáti na dobu vzrůstu, ani zevní podmínky — hlavní věc byla, aby podmínky byly při celé serii stejné. Také není třeba se obávati, že ztráta vody při vážení působila na přesnost pokusů. Jednak celý zjev je tak zřejmý, že ztráta vody nemohla míti významu — jednak při rychlosti odstranění a vážení lodyh jsou ztráty vypařením minimální.

Pokusy jsem konal z pravidla tak, že jsem současně a za stejných podmínek pěstoval asi tři serie rostlin:

a) serie rostlin se zachovanými dělohami;
b) serie rostlin, jímž polovice obou děloh odstraněna;
c) serie rostlin, jímž dělohy odstraněny skoro úplně.

Zkoušel jsem difference ještě jemněji odstupňovat, avšak tyto tři stupně se mi zdály dostatečnými k objasnění celé věci.

Úžlabní pupeny se objevily velmi brzy po dekapitaci, ze začátku rostly stejně, avšak brzy na to počal jeden znich přerůstati druhý a sice rozdíl mezi oběma byl tím větší, čím menší množství reservního materiálu ponecháno. Rozumí se, že i silnější úžlabní lodyhy rostlin s nepatrným množstvím ponechaných děloh byly slabší než u rostlin s normálními dělohami. Rovněž součet váhy obou lodyh byl přirozeně menší.

Součtu vah obou lodyh ubývá při nedostatku reservního materiálu, avšak poměr při tom roste a sice dosti silně. A tuto okolnost pokládám právě za velmi pozoruhodnou a na prosto ne samozřejmou. Bylo by tomu tak, kdyby obě úžlabní dělohy slábly ve stejné míře při nedostatku potravy. To se však neděje ve skutečnosti — čím větší je nedostatek potravy, tím více utlačuje silnější lodyha slabší — tím boj korrelační je silnější. Řekněme přehnaný příklad: Větší lodyha by u normální rostliny vážila 10 *g*, menší 9 *g*, tedy poměr by byl 10 : 9. U rostliny s odňatým materiálem, řekněme, váha větší lodyhy by byla desetkrát menší t. j. 1 *g*. Bylo by možno čekat, že váha menší bude také jen desetkrát menší, t. j. 0·9 *g* a poměr tudíž bude 1 : 0·9 čili 10 : 9 — ergo zůstane stejný. Ve skutečnosti, kdyby větší lodyha byla proti normálu desetkrát menší, tu menší lodyha by byla nejméně dvacetkrát menší, čímž by se přirozeně poměr dvakrát zvětšil proti normálu. Podávám příklad skutečný:

Pisum sativum.

Reservní material :	Počet rostlin	Váha celková		Váha průměrná		Součet	Poměr
		větších	menších	větších	menších		
Celé dělohy ..	14	5·20	3·65	0·37	0·26	0·63	1·42
Polovice děloh.	15	5·09	3·35	0·34	0·22	0·56	1·54
Šestina děloh .	14	2·50	0·65	0·18	0·05	0·23	3·84

U *Pisum sativum* za normálních poměrů lodyha větší váží 0·37 *g*; u rostliny, jíž ponechána asi šestina reservního materiálu, klesla váha větší lodyhy na 0·18 *g*, t. j. asi na polovinu. Za těchto okolností však klesla váha menší lodyhy z 0·26 na 0·05, t. j. na pětinu. U bobu jsou poměry analogické.

Nezdá se mi nutným uváděti více příkladů ani podávati více tabulek.

Tedy z pokusů resultují dvě fakta:

1. Při úbytku děložní hmoty zvětšuje se poměr mezi oběma lodyhami rostoucími v úžlabí děloh.
2. Větší změny odehrávají se na ose menší.

II. serie pokusů.

Rostliny rostly v živných roztocích na světle.

První serie pokusů vlastně dala podnět k serii druhé. Úvaha byla celkem jednoduchá. Zvětšuje-li se korrelační poměr ubráním živné hmoty reservní, musí se nutně zmenšovati, přidáme-li živných látek. Je celkem dosti zřejmo, že se nemůže jednati o uhlohydráty, neboť těch má rostlina dosti. Dělohy nejsou totiž ještě daleko úplně vyprázdněny, když už rostlina má vytvořený assimilační aparát a může tvořiti nové. Rostlině spíše záleží na látkách anorganických. Je to patrno už z toho, že první úlohou rostliny je vytvořiti kořen, tedy zařízení k získání anorganických látek a vody. Pak teprve následuje osa — zařízení k tvorbě uhlohydrátů.

Pěstoval jsem tedy rostliny s dělohami zachovanými v živných roztocích. Kontrolní rostliny rostly zase ve vodě. K výživě rostlin jsem užíval vždy roztoku Crone-ova.

Při těchto pokusech očekával jsem výsledky opáčné než při pokusech prvních. Jest-li se totiž korrelační poměr obou lodyh za nedostatku potravy zvětšuje, je přirozeno, nebo dá se aspoň čekati, že se při přidání potravy poměr tento sníží. Konal jsem však pokusy, že jsem pěstoval rostliny v roztoku 2·5krát koncentrovanějším než normální. Ukázal se čekaný výsledek. Rostliny totiž takovou koncentraci už špatně snášejí — ergo korrelační poměr se musí zvýšiti proti rostlinám pěstovaným v roztoku normálním. Pokus domněnku mou také potvrdil.

Podávám příklad:

Pisum sativum.

Živné prostředí :	Počet rostlin	Váha celková		Váha průměrná		Součet	Poměr
		větších	menších	větších	menších		
Voda	15	8·80	3·40	0·59	0·23	0·82	2·59
Crone normální	13	8·80	6·30	0·68	0·48	1·16	1·39
Crone 2·5krát .	12	7·30	5·10	0·60	0·42	1·02	1·43

Z uvedeného příkladu je zase patrno, že roste-li součet váhy obou lodyh, poměr se zmenšuje a naopak. Z pokusů resultují zase podobná fakta:

1. Rostlina je nepoměrně lépe zásobena uhlohydráty než solemi anorganickými, o které stojí hned od začátku. Uhlohydrátů reservních zbývá rostlině ještě v době, kdy je s to, tvořiti si nové sama.
2. Přidáním minerálných látek se korrelační boj zmenší a váhový poměr obou lodyh je menší než roste-li rostlina v pouhé vodě.
3. Hlavní změny zase se odehrávají na ose menší.
4. Silnější koncentrace živného roztoku škodí, ergo poměr se zase zvětšuje proti rostlinám pěstovaným v roztoku normálním.

III. serie pokusů.

Rostliny rostly v živných roztocích ve tmě.

Dále jsem zkoušel, jak se bude jeviti citlivost korrelační ve tmě — zda etiolement má vliv na utváření se korrelací.

Přirozeně u rostlin pěstovaných ve tmě nastalo „etiolement" známý zjev karakterisovaný značným protažením internodií, nepatrným vývinem listů, a voskově žlutou barvou — event. nepatrně zelenou — nebylo-li zatemnění úplné. Prof. Dostál mne upozorňoval a já zkušeností svou to mohu jen potvrditi, že ve tmě se korrelace lépe utvářejí — je to přirozeno při menším množství potravy.

Nás při etiolement nejvíce zajímá příjem minerálných solí. Jiné změny na př. anatomické a p. by ani nezapadaly do rámce našeho pojednání. Uvádím proto také data na srovnání z pokusů na světle. Přirozeně, rostliny ve tmě i na světle pěstované jsou stejného stáří. Je přirozeno, že u obou skupin na světle a ve tmě pěstovaných byla celá řada podmínek různých. Nebudeme proto srovnávati rostliny na př. ve vodě na světle a ve vodě po tmě pěstované. To by nebylo dosti správné. Avšak myslím, že je docela dobře možno srovnávati na př. rozdíly, jaké se ukázaly mezi rostlinami z vody a z Crone-ova roztoku na světle — že tedy tyto rozdíly můžeme srovnávati s rozdíly, jež se objevily při vzrůstu ve tmě.

Uvedu příklad:

Pisum Sativum.

	Prostředí	Počet rostlin	Váha celková		Váha prům.		Součet	Poměr
			Větších	menších	Větších	menších		
světlo	Voda	15	8·80 *g*	3·40 *g*	0·59 *g*	0·23 *g*	0·82 *g*	2·5
	Crone norm..	13	8·80 *g*	6·30 *g*	0·68 *g*	0·48 *g*	1·16 *g*	1·39
	Crone 2·5krát	12	7·30 *g*	5·10 *g*	0·60 *g*	0·42 *g*	1·02 *g*	1·43
tma	Voda	12	9·10 *g*	1·10 *g*	0·76 *g*	0·09 *g*	0·85 *g*	8·27
	Crone norm..	12	11·20 *g*	4·40 *g*	0·93 *g*	0·37 *g*	1·30 *g*	2·64
	Crone 2·5krát	9	8·40 *g*	4·70 *g*	0·93 *g*	0·52 *g*	1·45 *g*	1·78

Jak vyplývá z tabulky u *Pisum sativum* rozdíl mezi — řekněme stručně — vodou a Crone-em činí 34 *g* ve tmě 45 *g*. Mezi poměry je rozdíl ještě nápadnější. Na světle obnáší 1·20, ve tmě 5·63. Tady je možné jen jediné vysvětlení. Rostlina ve tmě činí větší nároky na minerálné látky. Proto korrelační zápas o ně je ve tmě těžší než na světle.

Zase tedy máme výsledky:

1. Přidáním minerálných solí se váhový poměr mezi oběma lodyhami sníží.

2. Hlavní změny se odehrávají na ose menší.

3. Ve tmě je korrelační zápas těžší, protože rostlina spotřebuje víc minerálných látek.

Poslednímu faktu nasvědčuje také, že ve tmě rostlina snáší ještě velmi dobře koncentraci 2·5 Crone-ova roztoku, kterážto koncentrace na světle už škodí. Dále poukazuji na zkušenost, že ve tmě se tyto korrelační pokusy lépe utvářejí, o čemž mi říkal R. Dostál a což jsem také při pokusech pozoroval. Přímý důkaz podávají analysy Wiesmann-ovy (1919).

Zařídil jsem ještě dvě serie pokusů. Kultivoval jsem rostliny se zmenšeným množstvím reservního materiálu v živném roztoku — tedy kombinace předcházejícího. Dále pěstoval jsem rostliny v dobré zahradnické hlíně a v mrtvé sprašové hlíně z okolí Brna. Výsledky v obou případech odpovídaly výsledkům předešlým.

Konal jsem ještě jiné pokusy k vyšetření závislosti množství potravy na korrelační citlivost. Výsledek byl vždy stejný a nevidí se mi nutno o nich podrobněji se zmiňovati. Domnívám se, že uvedené pokusy celou věc dostatečně objasnily. Jen stručně se zmiňuji o pokusích, kde jsem rostliny pěstoval v Schimper-ových částečných roztocích, kde vždy některý z nezbytných prvků schází. Tato věc by stála za důkladné vyšetření. Já uvádím toliko, že při nedostatku phosphoru a dusíku byl korrelační poměr největší.

Jak máme výsledkům všech těchto pokusů rozuměti? Odstraníme-li hlavní osu, vyrůstají dvě osy z úžlabí děloh. Z počátku je pro ně dosti potravy a proto rostou obě svou maximální vzrůstovou intensitou. Avšak dříve nebo později — dle množství zanechané potravy — nadejde doba, kdy už pro obě osy není potravy dosti. Nastane nouze o ni a obě osy stojí proti sobě jako nepřátelé. To právě nejvíce zdůrazňuji, že neuskrovní se obě osy ve stejné míře, že by pak rostly obě dvě stejnoměrně oslabeny nedostatkem potravy. V korrelačním boji začne silnější osa utlačovati osu slabší. Sama sice také bojem tímto trpí — avšak nepoměrně méně. Na ni se odehrávají změny daleko menší než na ose slabší, která žije vlastně — sit venia verbo — z milosti osy starší a sice ne na dlouho. Jakmile osa silnější začne činiti na potravu ještě větší nároky následkem vlastní větší spotřeby způsobené vzrůstem, odepře ose slabší poslední zbytky potravy, takže tato odsouzena je k zániku. A tak za nedostatku potravy vidíme později na rostlině dvě osy vedle sebe, jednu docela svěží, druhou úplně uvadlou a zaniklou. Jakým způsobem se toto zabránění vzrůstu děje, o tom nemáme dosud přesných vědomostí. Existují domněnky, o nichž se na jiném místě zmíním.

Za nedostatku světla spotřebují pravděpodobně rostliny více minerálných solí a je tudíž u rostlin etiolovaných korrelační poměr vždy větší.

Bylo by možno také vzrůst citlivosti korrelační znázorniti si graficky. Uvádím příklad průběhu korrelací u *Vicia Faba.* Na ose X nanáším součet vah obou lodyh, na ose Y jejich poměr. Změny poměru docilováno jednak odřezováním děložního materiálu, jednak kultivací v živném roztoku. Tím způsobem dostaneme křivku — snad parabolu, snad hyperbolu, není vyloučena též křivka exponenciální. Bylo by specielním thematem, a sice myslím velmi vděčným, celou věc matematicky rozřešiti, zkoumati závislost průběhu křivky na různých faktorech a p. Na diagramu nás může zajímati předně, že vůbec závislost součtu a poměru váhového obou lodyh je vyjádřena křivkou. Bylo by docela možno, jak jsem už řekl, čekati y-konstans. To bychom dostali úsečku paralellní s osou X. To by bylo, kdyby obě osy se vlivem potravy měnily stejnoměrně — kdyby intensita korrelačního závodění byla stále stejná. Bylo by také možno, že by tangenta byla konstantní $\frac{y}{x} = tg =$ konst. Dostali bychom přímku protínající osu X v jistém úhlu. To by značilo, že intensita korrelačního zápasu roste lineálně. Avšak ve skutečnosti tato intensita korrelačního závodění roste v křivce buď druhého stupně nebo dokonce v křivce exponentiální. Extremní hodnoty jsou pro $x = 0$, $y = \infty$, to jest, vyroste toliko jedna osa, druhá $= 0$, neboť číslo děleno 0 dá hodnotu ∞. Pro $x = \infty$, $y = 1$, t. j. obě osy jsou stejně těžké a tudíž poměr $= 1$.

Přátelé teleologického nazírání v biologii mohou viděti v popsanem korrelačním závodění zařízení velmi účelné. Rostlina vidí, že by obě osy neuživila, že by obě byly slabé, proto se raději rozhodne jednu zničiti, aby druhá mohla růsti tím lépe, aby se raději zachovala jedna zdatná než dvě slabé. Nechci rozhodovati, běží-li tu o účelnost, či je-li celý zjev fysikálně-chemickou nutností, že totiž lodyha silnější odejme lodyze slabší potravu nějakým prostým mechanickým způsobem; kausalita a teleologie jsou dvě stará dillemata biologická.

Korrelační citlivosti by se dalo snad užíti do jisté míry i prakticky a sice, dala by se velmi zřetelně a snadno poznávati výživnost půdy a snad vůbec vhodnost vzrůstových podmínek. Na př. vidím-li v nějakém prostředí příliš velké difference mezi oběma úžlabními lodyhami, mohu s jistotou souditi, že prostředí to neobsahuje všechny soli anebo aspoň ne v množství dostatečném. Chtěl bych na př. vyšetřiti, zda nějaký živný roztok bude vhodný pro rostliny. Pěstuji-li v něm prostě rostliny a rostou-li ony celkem dobře, nevím, zda by nemohly růsti ještě lépe. Theoreticky za absolutně optimálních podmínek poměr váhový mezi oběma lodyhami musí býti roven *1*. Čím je větší než jedna, tím podmínky jsou horší.

V rostlinné fysiologii většinou měříme toliko relativně — srovnáváme. Na př. řekneme roztok *a* je lepší než roztok *b*. Pomocí citlivosti korrelační bychom snad se mohli i pokusiti o měření absolutní. Na př. u roztoku *a* je poměr váhový obou lodyh roven *1*. Ergo roztok tento je nejlepší jaký může vůbec existovati a není potřebí vůbec s ničím srovnávati. Snad by se daly stanoviti i jakési absolutní jednotky dle poměru korrelačního, a bylo by pak možno říci, že rostlině chybí v tomto prostředí tolik a tolik jednotek k dosažení maximální vzrůstové intensity.

Nyní několik ukázek, jak se korrelační citlivost manifestuje v přírodě. Nejzajímavější jsem našel v Klebs-ově: „Über die Rhytmik in der Entwicklung der Pflanzen, 1911. Jedná se o takový zjev: Přenesou-li se stromy z mírného pásu neb z krajin, kde je podnebí sice horké avšak střídavé, do tropů s podnebím po celý rok skoro stejným (jako má právě Buitenzorg), tu počínají si zvláštním způsobem. Některé větve jejich rostou, jsou plny listů, jiné větve téhož stromu vzrůst zastaví a listy odhodí. Podobným způsobem počínají si i naše keře v létě; některé větve jsou v plném vývoji zatím co jiné zůstávají ve vzrůstu pozadu nebo dokonce odumírají. V tropech je tento zjev daleko nápadnější—a sice platí pro rostliny ze všech možných krajin mírného zeměpásu. Daleko nápadnější je zjev tento u stromu *Tectona grandis*, který tvoří ve střední a východní Jávě mohutné lesy. Za východního monsumu je úplně bez listu a odpočívá, za západního monsumu má listí a roste. V okolí Buitenzorgu — (místo má po celý rok stejnou vlhkost, jinak však se od ostatního podnebí Javanského neliší) v létě má listy, v zimě však některé větve rostou a mají listy dole, jiné jsou úplně holé, ač právě do doby dešťů připadá perioda jeho vzrůstu v Jávě východní. Jak vysvětliti si toto nestejnoměrné počínání si jednotlivých větví v stejnoměrném klimatu?

Perioda odpočinku u rostlin způsobena je třemi faktory (dle Klebse) — nedostatkem vody, tepla neb anorganických solí. Tyto faktory omezí silně vzrůst, assimilační činnost však trvá déle — ještě nějakou dobu. Nastane hromadění organických látek (str. 47), jimiž se fermenty inaktivují a tak vzrůst je pak ještě více omezen. Za nejdůležitější z těchto činitelů pokládá Klebs anorganické soli. Uvádí na př. jak Oedogonium v čisté vodě je přeplněno organickými látkami a neroste, v živném roztoku nastane úbytek uhlohydrátů a vzrůst.

U zmíněné *Tectona grandis* a jiných podobně si počínajících stromů, z uvedených tří faktorů nutno evidentně vyloučiti nedostatek vody a tepla a celý zjev pak přičísti na vrub třetímu — nedostatku solí. Není nepravděpodobno, že anorganických solí je při ustavičné intensivní assimilaci nedostatek k zachování zákonitého poměru k uhlohydrátům, jak je pro vzrůst nutno. Nedostatek solí může býti způsoben nedostatečnou transpirací v příliš vlhkém vzduchu. Snad kořenům škodí nedostatek vzduchu v příliš vlhké zemi, že se pak málo vyvíjejí a tudíž nepřivádějí dostatečného množství solí rostlině. Snad jsou to ještě jiné neznámé příčiny.

A nyní navazuji na své pozorování. Nedostatek živných látek působí velmi intensivně na uplatňování se korrelací. Nastává tuhý zápas o potravu. Silnější připraví slabšího o jeho díl, strhne veškerý přívod živných látek na sebe a vzrůst slabšího zastaví, tak některé větve jsou donuceny ke klidu, zatím co druhé rostou i na jejich útraty. Avšak po nějaké době — snad vlivem navyklé periodicity vzrůstové, vnucené periodickým klimatem — nastane u nich zastavení vzrůstu — korrelační působení na druhé větve se uvolní — ty začnou se vyvinovati a působí pak korrelačně na své dřívější utlačovatele. A tak se celý zjev opakuje.

Naše *Vicia* a *Pisum* představují také system, avšak toliko o dvou větvích. Podmínky jsou pro obě stejné (stejný kus děloh zachován), avšak nedostatek potravy vyvolá silnější korrelační působení, jehož následkem je, že jako u oněch tropických stromů, půl rostliny roste na útraty rostliny celé, a druhá polovice je ve vývoji zastavena.

Našlo by se v přírodě ještě mnoho jiných zjevů, jež možno uváděti v souvislost s korrelačním závoděním. Já nehodlám se o nich rozšiřovati — jen ještě několik stručných poznámek. Doposcheg-Uhlár popisuje anisophyllii u rodu *Sempervivum.* Dokazuje, že je podmíněna gravitací a že se dá experimentálně změniti. Nejzajímavější pro náš případ je toto: Autor píše: „Die Anisophyllie der Semperviven ist labill; sie verschwindet am Ende der Vegetationsperiode, um im Frühjahr neuerdings in Erscheinung zu treten." Vysvětluje zjev tento tak, že na podzim ubývá intensity vzrůstové a mění se kvantita světelného požitku. Z našeho stanoviska bychom mohli říci: Na jaře je větší potřeba potravy, tudíž silnější korrelační závodění a následek toho je utlačení některých listů. Na podzim spotřeba potravy klesne, korrelační úsilí povolí a poměr větších a menších listů v růžici se přibliží hodnotě 1.

Goebel poznamenává, že u rostlin s decussovaným postavením listů u silných výhonků se často vyskytují trojčetné přesleny na př. u *Weigelie* a *Forsythie.* U *kaktů* za příznivých podmínek vzrůstá počet orthostichů. Počet listů v přeslenu se dá výživou zvětšiti neb zmenšiti. Já pozoroval podobný zjev u *Dipsacus laciniatus.* Listy jsou decussované, avšak tu a tam vyskytne se přeslen ze tří listů. Pozoruhodné je, že nacházíme také přechody. Někdy totiž list vystupuje jako jednotný útvar, avšak na jeho basi hlavní nerv je zřetelně dvojitý — ve středu listu obě větve se sbíhají — na konci listu se však zřetelně rozběhnou a každá má samostatný úkrojek čepele. Pozoruhodno je, že u takového útvaru se v úžlabí tvoří vždy dva pupeny vedle sebe a oba pak vyrůstají v úžlabní větve. Tento zjev by snad mohl býti zajímavým pro morfologii a dal by se jím snad řešit problem, zda v nějakém případě se jedná o srůst dvou listů. U *Gypsophyla paniculata* a jiných Caryophylaceí jsou decussované listy, avšak větve úžlabní vynikají vždy jen z jednoho úžlabí a tvoří na lodyze spirálu.

Posledně uvedené případy by snad bylo možno vysvětlovati tak, že orthostichy představují větve, jež stojí proti sobě v korrelačním poměru, závislém na příznivosti podmínek.

* * *

RESUMÉ:

1. Úbytkem děložního materiálu korrelační poměr roste.
2. Přidáním minerálných solí korrelační poměr klesá.
3. Hlavní změny se odehrávají na ose menší.
4. U etiolovaných rostlin přidání minerálných látek snižuje korrelační poměr víc než u rostlin normálních.

V Brně, v červnu 1921.

* * *

Pokusy jsem začal v ústavu pro fysiologii rostlin u prof. Dra. B. Němce v Praze a dokončil v botanickém ústavu vysoké zvěrolékařské školy v Brně u prof. Dra. R. Dostála. Oběma pánům vzdávám srdečný dík za radu a pomoc, již mně při mé práci vždy ochotně poskytovali.

LITERATURA.

Doposcheg-Uhlár: Die Anisophyllie der Sempervivum. Flora 1911. V. Band.
Dostál R.: Korrelační vztahy u klíčních rostlin Papilionaceí. Rozpravy 1908.
Goebel: Organographie der Pflanzen. Jena 1913.
Grafe: Ernährungsphysiologisches Praktikum der höheren Pflanzen. Berlín 1914.
Jost: Vorlesungen über Pflanzenphysiologie. Jena 1913.
Klebs: Über die Rhytmik in der Entwicklung der Pflanzen. Heidelberg 1911.
Kořínek: O symmetrii klíční rostliny. „Věda přírodní“ 1922.
Mc. Callum: Regeneration in plants. Botanical Gazette 1905.
Mogk: Untersuchungen über Korrelationen von Knospen u. Sprossen. Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen. Bd. 38, 1914.
Reitsma: Correlative Variabilität bij Plante. Amster. Dissert. 1907.
Wiessmann: Einfluss des Lichtes auf Wachstum und Nährstoffaufnahme beim Hafer. Landw. Jahrbücher 53. 1919.

Plasmolysa Cyanophyceí.

Napsal
Dr. Silvestr Prát.

(Předloženo dne 4. listopadu 1921.)

Kdežto u „vyšších“ rostlin se plasmolysa stala při fysiologických pokusech nezbytnou a denní operací, byly osmotické poměry Cyanophyceí studovány jen velmi málo. Borzi plasmolysovatelnost buněk Cyanophyceí popíral, naproti tomu Fischer mluví o pravé plasmolyse. G. Hinze a Giklhorn, Bersa pozorovali případy podobné plasmolyse Cyanophyceí u sirných bakterií. Specielně se osmotickými poměry Cyanophyceí zabýval F. Brand. Jeho pozorování o plasmolyse jsem mohl potvrditi a rozšířiti.

Podstatným rozdílem buňky Cyanophyceí od „normální, typické“ je nedostatek vakuol a proto v hypertonických roztocích může býti voda odnímána pouze plasmě; protoplast se tedy při plasmolyse více méně scvrká. Úplné odloučení plasmy od blány buněčné je u Cyanophyceí zjevem velmi řídkým (nejlépe je možno pozorovati na sporách Nostocu) a nikdy se protoplast nestahuje úplně v pravidelnou kouli; skoro vždy býval zachováván tvar nepravidelný; nejčastěji zůstávaly výběžkovité spojky mezi jednotlivými buňkami. Brand a Fritsch vysvětlují tento zjev velikou elasticitou buněčné blány, pevným spojením blány a plasmy. Nepochybně při tom působí též (tuhá) konsistence plasmy Cyanophyceí.

Stanoviti počáteční (hraniční) plasmolytickou koncentraci pro Cyanophycey je velmi obtížné. Při plasmolyse v hypertonickém roztoku je možno na vhodném materiálu velmi dobře pozorovati, jak se nejdříve buňky — (a tím i celé vlákno — Brand) — scvrknou bez zřetelné plasmolysy, pak se obyčejně u příčných přehrádek plasma začíná odlučovati od stěny (až na výběžky a „plasmodesmové“ spojky) a nepravidelně se stahuje až na minimální objem. Při deplasmolyse opět pomalu možno pozorovati tyto fáze při roztahování protoplastu. Podaří-li se pozorovati na rozpadlých vláknech plasmolysovanou buňku z plochy (Oscillatoria limosa), je viděti stažený protoplast úplně od podélných stěn oddělený, ale uložený excentricky.

Ve zředěných roztocích je počátek plasmolysy patrný zřídka; mimo to již Fischer i Brand upozorňuje na to, že se plasmolysa Cyanophyceí velice rychle „vyrovnává“, nastává brzy úplná deplasmolysa. Ovšem neplatí to pro všecka plasmolytika; o proporcionalitě koncentrace plasmolytika a rychlosti deplasmolysy bude ještě zmínka při projednávání plasmolysy určitými solemi. Ve hraničné koncentraci plasmolytické je vyrovnání tak rychlé, že jen při rychlém a opatrném pozorování zastihneme buňky ještě plasmolysované.

Další obtíží je nestejnoměrná plasmolysa; nejen různá vlákna, ale i jednotlivé buňky v tomže vláknu se často plasmolysují velmi nestejně. Zcela pravidelně bylo pozorováno, že u Phormidia a Oscillatorie vrcholové buňky zůstávaly při deplasmolyse déle staženy, nežli další, prostřední buňky vlákna. Řidčeji bylo pozorováno jakési vlnovité střídání — vždy střídavě několik buněk neplasmolysovaných a několik kontrahovaných — a to buď s náhlými přechody — vedle zcela neplasmolysované buňky hned silně kontrahovaná a nebo řada buněk jevících postupně stále menší a menší plasmolysu až do nuly.

Pochvy a slizy ovšem stanovení plasmolytické koncentrace případně úplně zabraňují, poněvadž dovolují pouze pomalou difusi. Možná, že spolupůsobí zde i bubření, jak stanovil Kotte pro mořské řasy.

To vše je asi příčinou, že v literatuře nenalezáme údajů o hraničné koncentraci plasmolysujících roztoků u Cyanophyceí. Při čerstvém materiálu (nově přineseném z přírody nebo z pěkných kultur), u nějž se obyčejně plasmolysa jeví až na malé výjimky dosti rovnoměrně u všech buněk i vláken, jsem se pokoušel stanoviti hraničné koncentrace KNO_3 a NaCl tak, že jsem pozoroval, v které koncentraci se plasmolysa (všech nebo skoro všech) buněk vyrovnala za dobu kratší, nežli 1 minuta. Při řadě roztoků o diferenci 0·2% se pak obyčejně v koncentraci nejblíže nižší plasmolysa nejevila buď vůbec nebo jen přechodně u některých vláken, v koncentraci nejblíže vyšší trvala deplasmolysa déle nežli 1 minutu. Tak byla stanovena hraničná koncentrace Oscillatoria sp. 1·6—1·8% KNO_3, resp. 1—1·1% NaCl. Srovnávati tyto hodnoty s osmotickou hodnotou obyčejných „typických" buněk je ovšem možno pouze velice opatrně. Centrální tlak sice nepadá na váhu, poněvadž při velikosti buňky 10 μ by působil chybu menší nežli 0·05 atmosfér (Höber S. 73). Za to tím více je zde nutno počítati s tlakem bubření; neboť při plasmolyse buněk s velikou vakuolou, kde hypertonický roztok odebírá vodu hlavně buněčné šťávě, nepadá malé množství vody v nástěnné vrstvičce plasmy na váhu; ale již v buňkách bohatých plasmou je nutno bráti tlak bubření v úvahu (Höber S. 74) a proto také Höfler musil při pokusech o proporcionalitě koncentrace plasmolytika a objemu protoplastu zavésti „Plasmakorrektur". Dále také nejen adhaese plasmy k bláně (Höfler), ale pevné spojení protoplasmy s blanou Cyanophyceí (Fritsch, Brand; Hecht) by zvyšovaly chybu ve stejném směru. Konečně nutno vzíti v úvahu permeabilitu, jež podle vyrovnávání plasmolysy je u Cyanophyceí obyčejně značná. I odhlížíme-li od turgescence, vidíme podle toho všeho, že pozorované hodnoty „isosmotické" koncentrace musí býti vyšší, nežli skutečný osmotický tlak, jenž by při uvedených hodnotách odpovídal asi 7 atmosférám.

U různých Cyanophyceí ovšem byla hraničná koncentrace různá, celkem se v pozorovaných případech pohybovala asi mezi 0·8—1·5% NaCl (7—10 atmosfér). Ale i při plasmolyse cukrem, u něhož by nepadala na váhu chyba působená permeabilitou, dospíváme k hodnotám 10—13% saccharosy, tedy asi 6½—8 atmosfér.

Brand pozoroval silné kroucení vláken při plasmolyse glycerinem. Také při plasmolyse 20—50% cukrem se vlákna Oscillarií velmi silně kroutila; kroucení bylo působeno scvrkáním buněk a srážením i zvrásovatěním blan, jež zůstávaly s kontrahovanou plasmou v úplném styku, takže se zde vlastně nejedná o pravou plasmolysu. Narovnání vláken po přenesení do vody a vůbec vždy deplasmolysa jak ve vodě, tak v plasmolytiku byla spojena s čilými pohyby vláken.

Kratší působení hypertonických roztoků snášejí Cyanophycey beze škody, po delší době však vlákna hnědnou a rozpadají se. Různé druhy jsou ovšem velmi různě citlivé, Oscillatoria sp. odumírala dříve nežli Phormidium sp. Působil-li na tyto řasy 20% NaCl, 20% $Ca(NO_3)_2$, 20% $CaCl_2$, asi 10 minut, nejevily po přenesení do živného roztoku ani po 48 hodinách pohybu; ale pěkně se pohybovaly v živném roztoku ještě po 60 minutovém působení 20% $SrCl_2$. Velmi dobře Cyanophycey snášejí i silně hypertonické roztoky saccharosy, zvláště nechá-li se koncentrace odpařováním vody jen ponenáhlu zvyšovati. Některé druhy Oscillatoria, Phormidium jevily po 24—48 hodinném působení 10—30% roztoku saccharosy po přenesení do živného roztoku brzy čilý pohyb. Bylo-li Phormidium pěstováno za nedostatku vody, takže skoro vysýchalo a přeneseno pak do 20% saccharosy, mohl se cukr pomalým odpařováním vody úplně koncentrovati; byl-li pak cukr opět ponenáhlu zředěn, byly vločky řasy v živném roztoku již po 48 hodinách velmi pěkně rozlezlé.

Po delším působení hypertonických roztoků jeví Cyanophycey tak jako jiné buňky také pseudoplasmolysu, kterou zde snadno lze zaměniti s pravou plasmolysou. Při bedlivém pozorování sice bývá obyčejně možno normální plasmolysu od pseudoplasmolysy zcela dobře rozeznati podle silnější a pravidelnější kontrakce protoplastu, případně i podle lomnosti (lesku) a barvy, ale přes to není rozdíl tak přesný jako jinde a zvláště snadno může mýliti, že se pseudoplasmolysa po přenesení do vody často rychle a velmi pěkně vyrovnává jako typická plasmolysa (bubřením?).

Vyrovnání plasmolysy v plasmolytiku nastává, jak již zmíněno, obyčejně brzy. Z toho je ovšem nutno souditi na značnou permeabilitu plasmy u Cyanophyceí. Podobné poměry stanovil u některých zelených řas již 1887 Janse, u mořských řas P. Drevs. I jinde v literatuře jsou uváděny příklady značné permeability protoplastu pro soli — (Tröndle, Höber kap. VIII. a j.).

U Cyanophyceí nastávala deplasmolysa tím dříve, čím méně bylo plasmolytikum hypertonické, tedy v koncentrovanějších roztocích mnohem pomaleji.

V % roztoku NaCl nastávala deplasmolysa za minut:

	Oscillatoria	Phormidium
5%	6 minut	1—2 minuty
6	11	2
7	13	3—5 minut
8	15	7—8
9	16	12—13
10	21	20—25

Různá plasmolytika ovšem působí velmi různě. Několik solí bylo zkoušeno v různých koncentracích a výsledky byly sestaveny v tabulky.

Oscillatoria limosa z Bráníka.

Koncentrace v grammol.	Deplasmolysa za minut v soli							
	NaCl	KNO_3	$MgSO_4$	$Ca(NO_3)_2$	$SnCl_2$	$Sn(NO_3)_2$	$BaCl_2$	$Ba(NO_3)_2$
0·20		plasmolysa nepravidelná, rychle se vyrovnává	plasmolysa trvá	deplasmolysa počíná náhle nepravidelně za 2 hod a pak pomalu velmi nepravidelně postupuje.	10—15′	50—60′ vlákna žloutnou	po 6 hodinách trvá	
0·24					10—20′			
0·28								
0·30					40—60′			
0·40	3—5			deplasmolysa počíná náhle po 25—35′, nejdříve v nejkoncentrovanějším roztoku za rychlého žloutnutí vláken.	60 žloutnutí			
0·50	8—11							
0·68	16—19							
0·85	60—80				po 35′ žloutnutí, po 60′ všecka vlákna úplně žlutá			
1·0							80′ žloutnutí	20—25′
1·2	75—100							
1·3	75—110							
1·5	75—95							
1·6								počátek po 2 hod.

Oscillatoria limosa z Braníka.

Koncentrace v grammol	Deplasmolysa za minut v soli																
	Li Cl	K Cl	KNO_3	K_2SO_4	KH_2PO_4	H_2HPO_4	KCNS	Na Cl	Na_2So_4	Na_3PO_4	$MgSO_4$	$MgCl_2$	$CaCl_2$	$Ca(NO_3)_2$	$Ca(H_2PO_4)_2$	$SrCl_2$	$Al_2(SO_4)_3$
0·2		vůbec neplasmolysuje	neplasmolysuje	>10′				0	2 hod. 30′		0	50′	30′ ojedinělá plasmol. ještě po 24 hod.	<60′		30′	kroucení a hnědnutí vláken, rychlá pseudoplasmolysa
0·3	10—20										plasmolysa začíná po 30′	60′	50′	nepravidelné řady		40′	
0·4	15—30			<10′					2 hod. 30′		3—24 hod.	nepravidelné řady	nepravidelné řady; po 24 hod. krystaly phykocyanu.			nepravidelné řady	
0·5	30			začíná po 10′	24 hod.	1—10′		<6′	2 hod.	>60′	24 hod.						
0·6	<30							18′	2 hod.		vlnění a zlomy			vlnění a zlomy	neplasmolysuje žloutnutí		
1·0			nepravid. řídká plasmolysa				0										

	Li	K	Na	Mg	Ca	Sr	Ba
Cl	+	0	+	++	++	++	++
NO_3		±			++	+	+
SO_4		+	+++	++++			
H_2PO_4		+					
HPO_4		0					
PO_4		±					
CNS		00					

0 značí neplasmolysuje nebo nastává velmi rychlá deplasmolysa.
+ značí plasmolysuje přechodně.
++ plasmolysa trvá déle nežli hodinu.

Je tedy patrný velmi značný rozdíl v působení jednotlivých iontů. U alkalií se jevil nápadný rozdíl mezi působením K a Na. Kaliumsulfát plasmolysoval mnohem nepravidelněji a mnohem kratší dobu, nežli natriumsulfát. V kapce zředěného natriumchloridu (0·2 mol.) na sklíčku nastávala koncentrací na vzduchu brzy plasmolysa, koncentrací kapky kaliumchloridu plasmolysa vůbec nenastávala. Koncentrací kapky lithiumchloridu nastávala pseudoplasmolysa za hnědnutí vláken.

Pro nedostatek místa nelze zacházeti na možná vysvětlení různého působení jednomocných a dvojmocných iontů, uváděti obdoby z pochodů fysikálně chemických. I z řady botanických prací je známa impermeabilita dvojmocných iontů (kationtů) proti jednomocným (Fitting, Osterhout, Tröndle atd.). Nejnápadnější ale byl tento zjev u $MgSO_4$, kde obyčejně nebyla pozorována deplamolysa, plasmolysa patrná často i po 24 hodinách, přecházela pak patrně přímo v pseudoplasmolysu. Ve zředěných roztocích pak nejen, že se jako v jiných solích plasmolysa rychle nevyrovnávala, nýbrž teprve po několika minutách se objevovala (jako v saccharose). Vedle toho bylo také nápadno, že kdežto při plasmolyse natriumchloridem (i jinými solemi) se protoplast obyčejně stahoval tak, že se odtáhl od blány jen u příčných přehrádek, takže zde vznikaly čočkovité mezery mezi buňkami, bylo při plasmolyse magnesiumsulfátem patrné odtažení protoplastu právě od podélných blan vlákna. Přidáním $MgSO_4$ k NaCl byla deplasmolysa velmi zpomalena, tedy permeabilita silně snížena.

Byla-li vlákna deplasmolysovaná v 5, 9, 10% natriumchloridu přenesena do 20% natriumchloridu, nastávala okamžitě intensivní plasmolysa, jež se po přidání vody úplně vyrovnávala; i po dvouhodinném působení 8% natriumchloridu působil 20% NaCl okamžitě silnou „plasmolysu“, ve vodě ihned se vyrovnávající. Ve vyšších koncentracích NaCl bylo někdy jako u solí kalcia, strontia, barya toxické působení tak silné, že deplasmolysa nastávala velmi rychle. Tak Oscillatoria sbíraná 13./IV. 1919 v praménku mezi trávou u Davle se při plasmolyse 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15% NaCl plasmolysovala ve vyšších koncentracích stále více a více nepravidelně, ve 20% roztoku jen sem tam skupiny několika buněk zůstávaly plasmolysovány, jinak nastávala okamžitá deplasmolysa.

LITERATURA.

Borzi A.: Le communicazioni intracellulari delle Nostochinee. Estratto dalla Malpighia, Anno I, Fasc. II.

Drevs Paul: Die Regulation des osmotischen Druckes in Meeresalgen bei Schwankungen des Salzgehaltes im Aussenmedium. Arch. Mecklenb. 49, 1896., 91.

Fischer A.: Untersuchungen über den Bau der Cyanophyceen u. Bakterien. Jena 1897.

Fitting H.: Untersuchungen über die Aufnahme von Salzen in die lebende Zelle. Pringsheims Jahrb. f. wissensch. Botanik 56. 1915. 1.

Fitting H.: Untersuchungen über isotonische Koeffizienten und ihren Nutzen für Permeabilitätsbestimmungen. Ibidem. 57, 1916, 553.

Hecht K.: Studien über den Vorgang der Plasmolyse. Dissert. Halle a. S. 1912.

Höber K.: Physikalische Chemie der Zelle und der Gewebe. Lipsko-Berlín 1914.

Höfler H.: Eine plasmolytisch volumetrische Methode zur Bestimmung des osmotischen Wertes von Pflanzenzellen. Denkschrift d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturw. Kl. 95. 1918.

Janse J. M.: Die Permeabilität des Protoplasma. Verslagen en Madedeelingen d. k. Akad. van Wetensch. 3. IV., 1888.

Kotte H.: Turgor und Membranquellung bei Meeresalgen. Dissert. Kiel 1914. (Bot. Cbl. 131., 1916, 126.)

Osterhout W. J. V.: Souborný referát o několika pracích v Cbl. f. Biochem. u. Biophysik XXII. 1920. 342.

Schwellengrebel N. H.: Über Plasmolyse und Turgorregulation der Presshefe. Cbl. f. Bakteriol. II. 14. 1905. 374.

Tröndle A.: Referáty o posledních pracích v Zeitschr. f. Botan. 11., 1919. 220. Cbl. f. Biochem., Biophys. 22., 1920., 16.

Geologické poměry naftového území u Papradna na Slovensku.

Podává

Quido Záruba v Praze.

(S 1 profilem v tekstu.)

(Předloženo dne 4. listopadu 1921.)

Naftový výskyt u *Papradna* (župa trenčanská) je znám již delší dobu, ale v literatuře není dosud popsán, jen v práci Posewitzově, Petroleum und Asfalt in Ungarn, z roku 1906, je *Papradno* uvedeno jako výskyt naftových stop a v Ungar. Montanindustrie und Handelszeitung (Budapest 1899) je o *Papradnu* zmínka pravděpodobně od R. Zubera.

Účastně se s dr. Kodymem geologických výzkumů prof. Kettnera pro stát. geologický ústav ve flyši moravskoslovenských Karpat, věnoval jsem pozornost geologickým poměrům naftového terénu u *Papradna* a výsledky své práce zde uveřejňuji.

Pramen nafty znám jest již podle našich zpráv v 60. letech minulého století. V roce 1897 bylo místo prohlédnuto a posouzeno C. M. Paulem a R. Zuberem. Oba geologové, jichž dobrozdání dostala se nám do rukou laskavostí p. dr. H. Druckera v Trenč. Teplicích, doporučují pokusné vrtání a pokládají terain za nikoliv nepříznivý. Prof. R. Zuberovi připomíná papradenská nafta haličskou naftu od *Krygu* a *Kobylanky*.

Nafta vytéká v údolí potoka *Medvedje* asi 4 *km* severně od obce *Papradna* a jeví se jako přirozený pramen nafty z břidličnatých a pískovcových vrstev na hladině potoka. Nedaleko tohoto výtoku konal dr. Drucker z Trenčína kutací pokusy v r. 1898, domnívaje se, že tyto břidlice jsou olejonosné. Avšak všechny jeho kutací práce, celkem primitivní (pokusnými šachticemi) byly bezvýsledny.

V poslední době jeví se o papradenský výskyt nafty značný zájem. Při naší první návštěvě tohoto území na jaře 1921 byla zde již založena mělká ruční vrtba, kterou podnikl *Státní pozemkový úřad* a *Moravská agrární a průmyslová banka* garniturou vypůjčenou ze státních Gbelských dolů. Vrtba byla umístěna nikoliv v místě přirozeného výtoku nafty, nýbrž na jižním okraji obce *Papradna,* tedy na místě vzdáleném asi 4½ *km* jižně od místa výtoku a dosáhla hloubky as 80 *m.* Nafta zjištěna nebyla, za to často se objevily stopy plynů. Informace poskytl nám tehdy pan stav. Vosáhlo ve *Vážském Podhradí,* který zde práce vedl a konal přípravy k založení hlubinné vrtby. Při druhé naší návštěvě v srpnu t. r. byly již veškeré vrtací i přípravné práce z neznámých mi důvodů úplně zastaveny.

Naftový terén u *Papradna* a *Medvedje* náleží pásmu *karpatského flyše* a lze tu rozeznati jeho tři stupně. Nejstarší horizont v této krajině jest *istebský pískovec* (též javornický či jamnenský jmenovaný). Náleží *svrchní křídě* (senonu) a vystupuje severně od *Papradna* ve třech pruzích na *Malinovské, Velkém Jastrebí* a *Kikule.*

Dále jsou tu zastoupeny *vrstvy eocenu* a *spodního oligocenu,* equivalentní t. zv. *hieroglyfovým vrstvám,* které značně převládají v okolí *Papradna* a nejmladší je *magurský pískovec,* který tvoří vrcholy horského pásma sev. od *Papradna* a ostrý hřbet *Bukovinu* jižně od *Papradna*

Istebské pískovce mají stejné znaky jako v jiných oblastech flyšových, totiž snadnou rozpadavost, která se projevuje mocně vyvinutou ssutí, pak polohami hrubozrnnými až slepencovitými a přítomností glaukonitických zrnek, jak parno zejména na *Kikule.*

Pokud se týče *podloží istebských pískovců,* nepodařilo se nám ani v této krajině zjistiti odlišně vyvinutého souvrství, které by snad odpovídalo *inoceramovým slínům* polských geologů. Z poznatků získaných v údolí *Popradenského potoka* a v okolí *Púchova* lze míti za to, že v podloží istebských pískovců místy vyskytují se *hrubozrnné slepence,* jichž hlavní částí jsou valouny jurských vápenců. Tyto slepence, které vystupují zřetelně na př. na *Žeravici* u *Stupného* naznačují pravděpodobně transgresi moře svrchního útvaru křídového přes jurské útesy. Lze míti za to, že istebské pískovce (senon) v této oblasti spočívají přímo na starším podkladě snad na spodní křídě a juře. Není tedy odůvodněno předpokládati zde vrstvy *inoceramové* či *ropiankové* známé z haličských oblastí naftových.

V okolí Popradna nejsou vyvinuty v nadloží istebských pískovců *pestré jíly,* které byly seznány jako zcela lokální poloha na př. u *Turzovky, Na Bařině* při Horní Bečvě a j. Horniny upomínající na pestré jíly jedině bylo možno zjistiti na severním svahu *Malinovské* asi 6 *km* severně od Popradna.

Převládající horninou v okolí Popradna jsou jílovité, tence břidličnaté vrstvy s množstvím pískovcových vložek, *equivalentní hieroglyfovým vrstvám.* Tyto pískovcové vložky vyskytují se zde častěji a jsou mocnější než v jiných oblastech hieroglyfových vrstev, ale za to mají na vrstevních plochách daleko méně nepravidelných vyvýšenin a hrbolků t. zv. *fukoidů* či *hieroglyfů.* Vyznačují se však jiným znakem pro hieroglyfové vrstvy typickým, totiž *křivě lupenitým rozpadem* některých pískovcových lavic („krummschalige Sandsteine“).

Jílovité břidlice značně převládají v pruhu hieroglyfových vrstev táhnoucím se přes obec *Papradno,* naproti tomu severněji odtud u *Medvedje* převládají zase pískovce. Takovéto náhlé faciální změny podařilo se nám zjistiti častěji v hieroglyfových vrstvách v jiných oblastech, jak bude patrno z našich prací ve Sborníku státního geol. ústavu.

Vložky *menilitových břidlic* v této krajině skoro vůbec chybí až na malý výskyt u obce *Papradna* v levém břehu potoka.

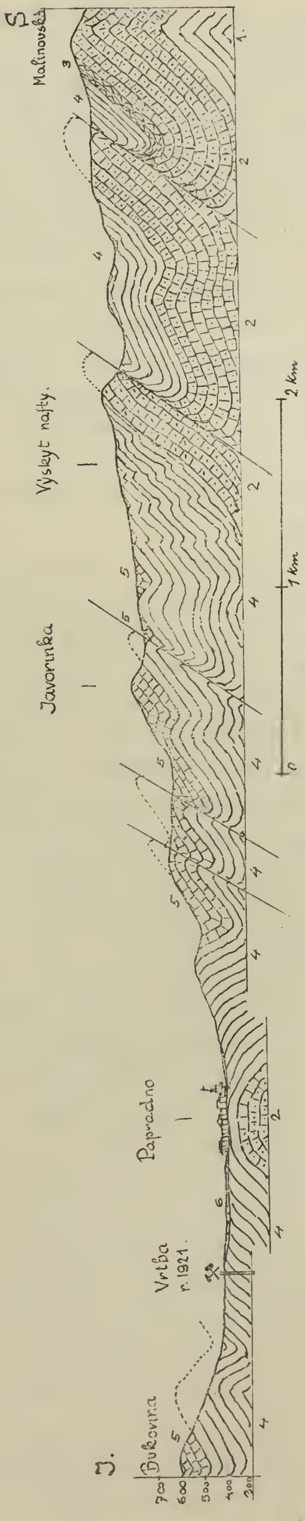
Magurské pískovce (svrchní oligocen), nejvyšší horizont zdejšího flyše, jsou obyčejně jemnozrnné až středního zrna, barvy žluto nebo zelenošedé, polymiktní a vyznačují se ostrohranným rozpadem. Vystupují na *Javorince, Zelenovci, Holém Vršku* severně a na *Bukovině* jižně od Papradna.

Tektonické poměry. Obec *Papradno* leží v ose široké antiklinály hieroglyfových vrstev mající směr *h* 5 (vsv). Sklon vrstev na sever možno sledovati až k samotě *na Košjáru;* zde se sklon náhle obrací a odtud až k *Malinovské* zapadají vrstvy k jihu, ačkoliv i tu lze místy zjistiti sklon k severu. Nasvědčuje to lokálnímu zvrásnění vrstev, které je zvláště patrno v údolí *Medvedje.*

Severně od *Papradna* lze konstatovati podle opakování stejných vrstev *směrné dislokace* (*vrásové přesmyky*), které lze sledovati jednak na širokém pruhu magurských pískovců, jednak na třech pruzích istebských pískovců.

Jako jinde v Karpatech i zde zachovaly se Magurské pískovce na horských vrcholech v synklinálním uložení.

V jižním křídle papradenské antiklinály možno také pozorovati lokální vrásnění vrstev, čímž vysvětluje se značnější šířka pruhu hieroglyfových vrstev.



Geologický profil okolím Papradna.

Vysvětlivky: 1=podloží istebských pískovců. 2=istebské pískovce. 3=pestré jíly. 4=hieroglyfové vrstvy. 5=magurské pískovce. 6=ssuť a hlína.

Až teprve na *Bukovině* vystupují pískovce magurské zase v dokonalé synklinále.

Tektonická povaha krajiny je patrna z přiloženého profilu, který je veden hřbetem *Malinovské*, dále po příčném hřbetě táhnoucím se rovnoběžně s *Medvedským potokem*, poněkud východněji od naftového výskytu, a přes *Javorinku, Zelenoveć, Holý vršek*. Až potud jde profil kolmo ke směru vrstev, dále však se profilová čára lomí, jdouc šikmo ke směru vrstev (*h* 2), a to proto, aby v profilu byla vyznačena též *poloha nového vrtu* u *Papradna*. Tímto stočením profilové čáry je vysvětlitelna i zdánlivá větší mocnost hieroglyfových vrstev v těchto místech.

Vystupování nafty v údolí Medvedje je vázáno na spodní polohy hieroglyfových vrstev, tedy asi na vrstvy eocénové, podobně jako jest tomu v *Turzovce* [1]) a u *Bohuslavic,*[2]) kde je výskyt také nesporně v nadloží istebských pískovců. Lze vůbec na základě dosavadních zkušeností míti za to, že naftová ložiska moravskoslovenských Karpat vázána jsou na vrstvy eocenní.

V sousedství naftových výtoků v údolí *Medvedje* (byly zjištěny dva vedle sebe) lze pozorovati lokální vrásnění vrstev v drobné anti- a synklinály. Celkem lze stanoviti v údolí potoka *Medvedje* za sebou čtyři drobné antiklinály. Výtok nafty je v jižním křídle první antiklinály od nejjižnějšího pruhu istebských pískovců.

Sledujeme-li směr vrstev a vrásových poruch, náleží *mělká nová vrtba* u obce *Papradna* do pokračování výskytu naftového u *Bohuslavic,* kdežto přirozený pramen naftový v údolí potoka *Medvedje* směřuje mezi *Lidečko* a *Horní Lideč,* kde dosud nafta zjištěna nebyla.

Pokud se týče umístění nové vrtby, je patrno z našeho profilu, že byla založena daleko od osy hlavní popradenské antiklinály, blíže lokální synklinály, která je vyvinuta severně od hřbetu *Bukoviny*.

Účel této vrtby je mi záhadný. Založení ruční vrtby nebylo zde na místě, protože ruční vrtání má význam jen tam, kde jde o zjištění určitého vůdčího horizontu nebo kde je naděje, že naftový horizont je blízko povrchu. Na základě našeho profilu lze však ložisko naftové očekávati v hloubce daleko větší, než kam ruční vrtbou lze proniknouti a hieroglyfové vrstvy při své jednotvárnosti neposkytují horizontu, kterého by bylo možno stratigraficky oceniti.

Podle dosud známých výskytů naftových a vzhledem k málo příznivým poměrům tektonickým nedává okolí Popradna velkých nadějí, že tu budou objevena vydatnější ložiska naftová. Jsouť vrstvy příliš příkře postaveny a porušeny četnými dislokacemi a nikde se nevyskytuje, kromě uvedené u obce Popradna, zřetelná antiklinála, která by poskytovala příznivé podmínky pro založení vrtby. Avšak ani hlavní široká antiklinála u Papradna není pro založení vrteb doporučeníhodnou, neboť jest již velmi hluboko denudována a v ose její jdoucí přes kostel v Papradně lze očekávati již v poměrně malé hloubce podloží paleogénu.

---

[1]) R. Kettner: Hornický a Hutnický věstník 1921.

[2]) R. Kettner: Hornický a Hutnický věstník 1920.
E. Schnabel: Zprávy veřejné služby technické, 1921.

Výskyt nafty u Popradna po stránce teoretické je nám důkazem, že paleogen Moravsko-Slovenských Karpat je vskutku olejonosný. Chybí však zde dosud soustavný geologický výzkum, na jehož základě by bylo možno označiti příhodná místa pro vrty, poskytující naděje na lepší výsledky než byly dosavadní.

Geologický ústav čes. vys. učení technického
v Praze.

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 43.

O transgresích a regresích spodnosilurského moře v Čechách.

(Příspěvek k paleogeografii Barrandienu.)

Podává

Dr. Radim Kettner v Praze.

(S vyobrazením v textu.)

(Předloženo dne 4. listopadu 1921.)

Transgresivní povaha českého siluru jest již dávno známa a postřehneme ji z každé přehledné geologické mapy Barrandienu. Spočívají silurské vrstvy někde na kambriu, jinde ale kladou se přímo na algonkium. Kambrium vůbec jest vzhledem k delší ose Barrandienu rozloženo nesouměrně jsouc vyvinuto hlavně v jihových. křídle, kdežto v křídle protějším celkem schází, až na pruh tejřovicko-lohovický, který však leží mimo rozsah pozdějších vrstev Barrandienu (silurských).

Nejnovější stratigrafické výzkumy českých geologů ve spodním siluru a kambriu českém přinesly řadu zajímavých podrobností, z nichž vyplývá, že transgrese spodnosilurského moře *není jednotná,* nýbrž že jest tu vlastně *transgresí několik* časově oddělených a na různých místech Barrandienu v různém rozsahu se jevících, k nimž druží se též někde i *zpětné pohyby moře* (regrese). Tyto pohyby spodnosilurského moře vpřed i nazpět omezují se, pokud až dosud bylo lze konstatovati, toliko na *nejstarší dvě pásma,* a to na *vrstvy krušnohorské* ($d\,\alpha$) a *vrstvy komárovské* ($d\,\beta$). Teprve od doby vzniku *vrstev osecko-kváňských* ($d\,\gamma$) až do konce spodního siluru lze konstatovati nerušený vývoj v sedimentační pánvi, jejíž rozsah positivními neb negativními pohyby hladiny mořské se již podstatně asi neměnil.

Dnes jest nesporno, že mezi sedimenty českého kambria a uloženinami spodnosilurskými jest *časový hiat* vyznačený *suchozemskou periodou svrchnokambrickou,* která byla asi zahájena po uložení vrstev březohorských ($c\,\gamma$) v oblasti brdské a slepenců vosnických ($c\,\beta'_3$) v oblasti skrejsko-tejřovické [1]) *mohutným povrchovým vulkanismem* a posléze byla dokončena *velikou denudací*,[2]) jíž velká část právě vzniklých příkrovů *porfyritových* a *porfyrových* padla za oběť.

Rozsah kambrických uloženin před početím sedimentace vrstev silurských byl zcela jiný, než jaký zaujaly vrstvy silurské. V Barrandienu jsou, jak známo, dvě oblasti kambrických uloženin: veliká *oblast brdská* (příbramsko-jinecká), zabírající jv křídlo Barrandienu, a daleko menší *oblast skrejsko-tejřovická*, vystupující mimo obvod silurských vrstev v sz křídle Barrandienu. Jinak v sz křídle Barrandienu v podloží siluru kambria nikde není. Obě oblasti kambrické liší se faciálně dosti značně. Jest otázka: souvisely spolu před transgresemi silurskými, či vznikly v pánvích samostatných, spolu nespojených? Novější výzkum ukazuje, že *facie skrejsko-tejřovická vznikla asi v zálivu souvisejícím s ostatní oblastí kambrickou*, čemuž nasvědčují jisté shody v lithologickém vývoji některých vrstev a nálezy ostrůvků kambrických dříve neznámých. Ostrůvky kambrické u *Plískova* a *Chotětína*, o nichž pojednal V. Smetana,[3]) a nález kambria u *Medového Újezda* [4]) naznačují nám spojení oblasti skrejsko-tejřovické s hlavní oblastí brdskou. Z kambrických uloženin skrejsko-tejřovických jistě daleko největší část jest skryta v podloží příkrovů porfyritových křivoklátsko-rokycanského pásma. *Kambrium chotětínské a plískovské* ležící mezi hlavní oblastí kambria brdského a oblastí skrejsko-tejřovickou shoduje se s touto petrografickým vývojem svých vrstev spodních (křemitých slepenců a drob), na kambrium brdské však poukazuje vývojem břidlic, čítaných k břidlicím paradoxidovým, které jsou úplně shodné s paradoxidovými břidlicemi [5]) odkrytými v profilu u *Medového Újezda*. Není vyloučeno, že ještě dnes existuje spojení mezi oběma kambrickými oblastmi, a to v podloží vrstev silurských mezi *Medovým Újezdem* a *Chotětínem*.

Nejstaršími silurskými vrstvami v Barrandienu jsou *vrstvy krušnohorské — dα*. Podle paleontologického výzkumu C. Kloučkova [6]) a petrografických studií *autorových* [7]) dělíme je ve tři oddíly: 1. *oddíl*

---

[1]) Srv. R. Kettner-O. Kodym: Nová stratigrafie Barrandienu, Čas. Čes. Musea, 1919.

[2]) Radim Kettner: O kambrických vyvřelinách v Barrandienu a jejich poměru k vrstvám krušnohorským Dd1α, Rozpr. Čes. Akademie, Praha 1916.

[3]) Vojtěch Smetana: O kambriu u Chotětína a Plískova na Zbirožsku• Rozpravy Čes. Akademie 1918.

[4]) Radim Kettner: Příspěvek k petrografii vrstev krušnohorských II. část, Rozpravy České Akademie 1916.

[5]) Na loňské exkursi do Med. Újezda nalezli jsme v břidlicích v profilu na sev. konci obce úlomek nepochybného Paradoxida.

[6]) Celda Klouček: Novinky z krušnohorských vrstev d1α, část II., Rozpravy České Akademie 1917.

[7]) Radim Kettner: Příspěvek k petrografii vrstev krušnohorských, část I. a II., Rozpravy České Akademie 1916.

spodní — vrstvy třenické ($d\,\alpha_1$), t. j. drobové pískovce s hojným klastickým materiálem porfyrovým a často se slepenci na basi souvrství; 2. *oddíl střední — vrstvy milinské* ($d\,\alpha_2$), t. j. železité droby s rohovci a 3. *oddíl svrchní — vrstvy olešské* ($d\,\alpha_3$), t. j. červené železité jemnozrnné pískovcovité a jílovité břidlice.

Vrstvy krušnohorské nejsou ale vyvinuty všude úplně. Zvláště oba svrchní oddíly, někde ale jen střední oddíl pásma $d\,\alpha$ ve vrstevném sledu schází. Tato okolnost jest tím pozoruhodnější, studujeme-li ji zároveň s ohledem na rozšíření vrstev komárovských ($d\,\beta$). Někde se vrstvy $d\,\beta$ usadily bezprostředně po vzniku svrchního $d\,\alpha$ ($d\,\alpha_3$), takže sedimentace v těchto místech nebyla přerušena. Kde ale v podloží $d\,\beta$ ze souvrství $d\,\alpha$ části scházejí, tam jest nutno předpokládati stratigrafické mezery mající své příčiny v paleogeografických poměrech spodnosilurského moře. Ba jest mnoho míst, kde v podloží $d\,\beta$ vrstvy krušnohorské vůbec scházejí, takže pásmo komárovské se klade přímo buď na kambrium nebo na algonkium. Posledního fakta povšiml si již bystrý pozorovatel Karel Feistmantel v roce 1878.[8])

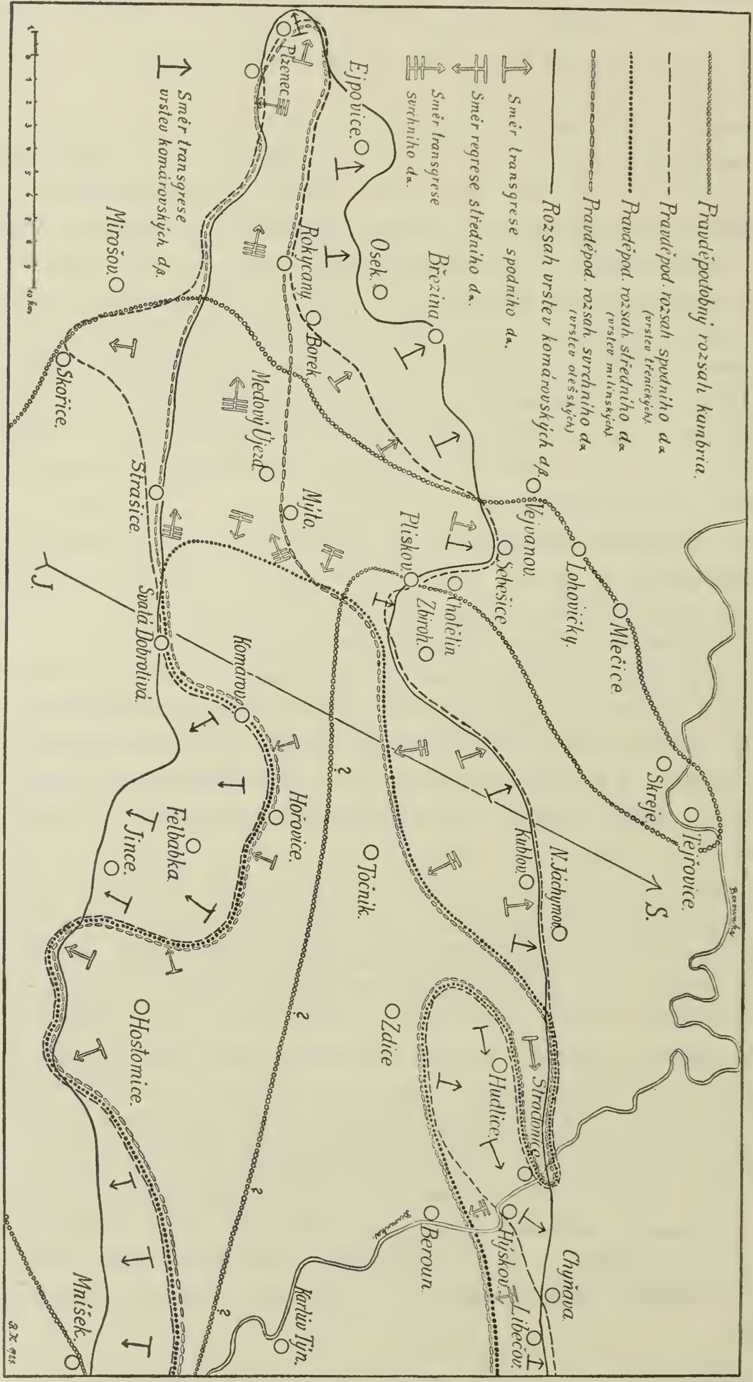
Již z uvedeného jest patrno, že spodní silur český nepočíná jednou transgresí, nýbrž, že lze na basi siluru rozeznati transgrese nejméně dvě. O transgresivní povaze *vrstev třenických* ($d\,\alpha_1$) nemůže býti pochyby. I kdyby nebylo na většině výskytů $d\,\alpha$ přímo zřejmo, že mezi vrstvami třenickými a jejich podložím jest veliká mezera časová, musili bychom usouditi na jejich transgresivnost z jejich petrografické povahy, která dokazuje, že krušnohorské vrstvy se usadily po delší suchozemské periodě, za níž padly starší horniny, zejména svrchnokambrické porfyrity a porfyry denudaci za oběť a poskytly tak klastického materiálu vrstvám krušnohorským.

Třenické vrstvy ($d\,\alpha_1$) *značí největší rozsah pásma* $d\,\alpha$. Tam, kde střední a svrchní oddíl pásma $d\,\alpha$ scházejí, jest vysvětliti jejich nepřítomnost nikoliv snad destrukcí (odnosem) vrstev již hotových, nýbrž *ústupem, stažením moře* z původního rozsahu *na menší prostor*, takže se tu oddíly střední a svrchní vůbec nevytvořily. Zajímavo jest, že v západním konci silurské pánve po tomto ústupu krušnohorského moře nastává na počátku $d\,\alpha_3$ *nový postup moře*, které sice většinou nedosáhlo původního rozsahu $d\,\alpha^1$, ale na jednom místě dokonce tento původní rozsah nepatrně překročilo. V místech, kde nastal tento postup moře svrchního $d\,\alpha$, spočívají *vrstvy olešské* ($d\,\alpha_3$) *přímo na vrstvách třenických* ($d\,\alpha_1$), při čemž vrstvy milinské s rohovci ($d\,\alpha_2$) ve vrstevním sledu scházejí. Hranice mezi $d\,\alpha^1$ a $d\,\alpha_3$ jest ve vrstevním sledu vždy velmi ostrá, není tu mezi oběma přechodů, jaké pozorujeme tam, kde sedimentace pokračovala nerušeně.

---

[8]) Karel Feistmantel: Über die Lagerungsverhältnisse der Eisensteine in der Unterabteilung D1 des böhmischen Silurgebirges, Věstník král. čes. spol. nauk, Praha 1878, str. 122.

Vrstvy komárovské transgredují však na většině míst velmi zřetelně. Tam, kde vyvinuty jsou vrstvy olešské ($d\ \alpha_3$), nenastalo přerušení sedimentace, naopak jeví se tu do $d\ \beta$ i *zcela pozvolné přechody* petrografické i faunistické. Rozsah moře vrstev komárovských však se jen na málo


Pravděpodobný rozsah kambria.
Pravděpod. rozsah spodního dα (vrstev třenických)
Pravděpod. rozsah středního dα (vrstev milinských)
Pravděpod. rozsah svrchního dα (vrstev olešských)
Rozsah vrstev komárovských dβ.
Směr transgrese spodního dα.
Směr regrese středního dα.
Směr transgrese svrchního dα.
Směr transgrese vrstev komárovských dβ.
10 km
Ejpovice
Pilzenec
Osek
Březina
Rokycany
Borek
Mirošov
Skořice
Medový Újezd
Strašice
Mýto
Vejvanov
Plískov
Lohovicky
Mlečice
Sebečice
Chotětín
Zbiroh
Svatá Dobrotivá
Komárov
Hořovice
Felbabka
Jince
Točník
Kublov
N. Jáchymov
Skreje
Týřovice
Berounka
S.
J.
Zdice
Hudlice
Stradonice
Hostomice
Beroun
Hýskov
Chyňava
Libečov
Karlův Týn
Mníšek

místech drží v mezích udaných vrstvami olešskými $d\,\alpha_3$. *Moře $d\,\beta$ transgreduje většinou i přes rozsah největší transgrese alfové* (třenických vrstev), takže na periferii pánve silurské namnoze spočívají vrstvy komárovské přímo na algonkiu nebo kambriu.

Uložením vrstev komárovských přestává, jak se zdá, kolísání hladiny spodnosilurského moře v Barrandienu. *Vrstvy osecko-kváňské* a všecky ostatní vrstvy spodnosilurské vznikly v sedimentační pánvi, která svým rozsahem kryla se v celku s rozsahem moře v době vrstev komárovských. Nepozorujeme po $d\,\beta$ více transgresí a regresí mořských, až teprve na konci spodního siluru (ve svrchním $d\,\zeta$, v době odpovídající kosovským křemencům) dochází k malému hiatu časovému, jenž se jeví v nedostatku nejspodnější svrchnosilurské zony graptolitové (zona s *Diplograptus accuminatus*) a v nápadně ostré hranici mezi $d\,\zeta$ a $e\,\alpha$.[9]

Na mapce tuto reprodukované snažil jsem se schematicky znázorniti transgrese a regrese mořské v nejspodnějším českém siluru. Jest přirozeno, že rozsah jednotlivých vrstev, na př. *vrstev komárovských* ($d\,\beta$) na mapě naznačený neodpovídá zcela původnímu rozsahu moře; toto musilo sahati jistě dále, ale uloženiny padly pak z části za oběť denudaci. Toliko snad okraj *vrstev třenických* neb jiných oddílů pásma $d\,\alpha$ skrytých pod transgredujícím $d\,\beta$ odpovídá v celku někdejšímu okraji spodnosilurského moře.

Z dosavadních výzkumů a z mapy naší jest dostatečně zřejmo, že z území spodnosilurských jest zejména *Komárovsko* oblastí, kde sedimentace ve spodním siluru nebyla vůbec přerušena. Jest tu nepřetržitý vrstevní sled od nejspodnějšího $d\,\alpha$ až do $d\,\beta$ a dále, jak patrno jest i z pozvolných přechodů hornin a faun na rozhraní jednotlivých vrstevních oddílů a pásem.

Ale již na západ od *Kareza, Cheznovic* a *Tění* směrem k *Rokycanům* a *Plzenci* máme ve spodním siluru poměry podstatně jiné. Po usazení vrstev třenických ($d\,\alpha_1$), které lze zjistiti dnes nejzáze u *Sebešic*, na *Chlumu* u *Volduch*, na *Borku* u *Rokycan*, u *Plzence* a u *Skořice*, nastalo značné stažení moře krušnohorského na menší prostor. *V území na západ od linie Zbiroh—Strašice nikde nenalezneme uloženin středního oddílu vrstev krušnohorských — milinských drob s rohovci* ($d\,\alpha_2$) — jelikož se tu již nikde neusadily. Jejich nejzápadnější výskyty jsou v okolí *Olešné* a *Miliny*.

Za to však se potkáváme v území na západ od linie *Zbiroh—Strašice* s pozoruhodným zjevem, že *moře ve svrchním $d\,\alpha$ po uložení milinských vrstev v krajině komárovské opětně transgreduje k západu směrem k Plzenci*. Lze to konstatovati na *Kotli* u *Rokycan*, i u *Plzence*, zvláště ale v překrásných odkryvech v *Medovém Újezdě*,[10]) z nichž jest zcela jasno, že

---

[9]) Srv. Jar. Perner a Od. Kodym: O rozčlenění svrchního siluru v Čechách, Časopis čes. Musea 1919.

[10]) Srv. R. Kettner: l. c. 7., II. část, profily Medovým Újezdem.

vrstvy olešské ($d\,\alpha_3$) *kladou se přímo na vrstvy třenické* ($d\,\alpha_1$), při čemž hranice mezi oběma jest *naprosto ostrá, bez přechodů* souvrství spodního do souvrství svrchního. Ba dokonce pozorujeme i na basi $d\,\alpha_3$ polohu slepencovou. Podle sdělení pak kol. Dra O. Kodyma, jenž konal u Plzence detailní studia, *transgredují vých. od Plzence vrstvy olešské i přes původní rozsah spodního* $d\,\alpha$.

Transgresivnost komárovských vrstev ($d\,\beta$) západně od krajiny komárovské jest všude nadobyčej jasna. Na *Zbirožsku* u *Plískova* a *Sebešic* dosáhlo moře pásma $d\,\beta$ přibližně rozsahu vrstev třenických. Ale již na Rokycansku, zejména u *Březiny, Oseka* a zvláště na *Ejpovicku* proniklo moře $d\,\beta$ daleko za původní břeh moře z doby spodního $d\,\alpha$ (vrstev třenických), *takže vrstvy pásma* $d\,\beta$, převážnou většinou v podobě jemných, světle zelenošedých břidlic klabavských či eulomových vyvinuté, *kladou se přímo na algonkium.*[11]) Rovněž u *Plzence* (*sv. Blažej*) lze konstatovati uložení břidlic eulomových přímo na algonkiu. Mezi *Plzencem* a *Sv. Dobrotivou* drželo se asi moře pásma komárovského v rozsahu moře vrstev olešských ($d\,\alpha_3$), nedosáhnuvši zde pravděpodobně někdejšího rozsahu moře vrstev třenických ($d\,\alpha_1$), jež zastihneme vyvinuty až i u *Skořic.*

V jv. křídle Barrandienu mezi *Sv. Dobrotivou* a *Mníškem* zůstávalo moře spodnosilurské po celou dobu trvání $d\,\alpha$ přibližně v těchže mezích, takže tu nepozorujeme nikde patrných zpětných neb progresivních pohybů mořských. Za to *vrstvy komárovské* na dvou místech jeví *zřetelně transgresivní povahu* přestupujíce přes původní rozsah pásma $d\,\alpha$ na podklad kambrický. Jest to jednak na *Jinecku*, jednak na *brdských Hřebenech.* Na Jinecku[12]) u *Ohraženic, Křešína* a *Felbabky* (na *Ostrém*), jakož i na záp. svahu *Plešivce* leží pásmo komárovské přímo na kambriu (hlavně na vrstvách březohorských $c\,\gamma$), kdežto vrstvy krušnohorské zde ve vrstevním sledu scházejí. Podobně jest to na *Hřebenech,*[13]) kde to prokázaly jednak pokusné práce hornické, jednak jest to zřejmo *v údolí Moklickém* u *Řevnic.* V jv. křídle Barrandienu mezi *Sv. Dobrotivou* a *Mníškem* jedině v malém úseku na *Písku* a *Babě* u *Hostomic* jest vyvinuto mezi kambriem a pásmem $d\,\beta$ pásmo $d\,\alpha$.

V sz. křídle Barrandienu mezi *Zbirohem* a *Libečovem* komplikují se poměry ve spodním siluru oproti křídlu jv. *patrnou regresí krušnohorského moře na počátku středního* $d\,\alpha$. Na nejzazších výskytech alfových na sz, na *Velízi* a *Krušné Hoře* jsou vyvinuty pouze vrstvy třenické ($d\,\alpha_1$), ostatní části $d\,\alpha$ však scházejí. Moře krušnohorské stáhlo se po uložení vrstev třenických směrem k *Točníku.* Podobně jest tomu i u *Libečova,* kdež po uložení vrstev spodního $d\,\alpha$ následoval ústup moře směrem k jv, takže u *Libečova, Chýňavy* a j. v okolí *opětně scházejí střední a svrchní oddíl vrstev krušnohorských.*[14])

---

[11]) Radim Kettner: Příspěvek ku stratigrafii vrstev komárovských a oseckokváňských. Rozpravy České Akademie XXVI., 1917.

[12]) Srv. R. Kettner: l. c. 7., část II., str. 31.

[13]) Srv. R. Kettner: l. c. 7., část II., str. 30.

Zdá se, že u *Stradonic* tvořilo moře krušnohorské úzký záliv, v němž vyvinuly se částečně i všecky tři oddíly krušnohorských vrstev, a že mezi *Hýskovem* a *Hudlicemi* byla v době celého *d* α souš, přes kterou moře *d* α nepřestoupilo. Tomu všemu nasvědčuje zvláště rozsah a uložení vrstev komárovských (*d* β). *d* β transgreduje od *Točníka, Zdic* a *Berouna* směrem k sz, dostupuje všude původního rozsahu vrstev třenických, a u *Hudlic* a *Hýskova* zaplavuje i algonkickou souš omezenou na jedné straně souvislým rozsahem vrstev *d* α, na druhé pak zálivem stradonickým. Tufy diabasové s rudami i mandlovce komárovského pásma leží na algonkickém podkladě, jak velmi snadno lze zjistiti v odkryvech u *Svaté* a *Hudlic.*[15])

Tím vylíčili jsme poměr pásem *d* α a *d* β k sobě v jz. polovině Barrandienu. V části východní zajisté rovněž lze konstatovati oscilace spodnosilurského moře, ale území toto z daleka neposkytuje příkladů tak názorných, jako část západní. Okraj silurských uloženin jest zde z části zakryt mladšími formacemi, zejména křídou v křídle severním, z části jest porušen přesmykem závistským v křídle jižním, takže nejspodnější stupně silurské nejsou zde přístupny. Kromě toho v území východním nejsou dosud pásma *d* α a *d* β tak detailně petrograficky a paleontologicky prozkoumána, jako na západě, takže pro úvahy paleogeografické není zde dosud půda tak připravena. Třeba tu vyčkati výsledků paleontologického bádání C. Kloučkova u *Ouval* a mapovacích prací O. Kodymových a Al. Matějkových ve východním okolí pražském.

Geologický ústav čes. vys. učení technického
v Praze.

---

[14]) Srv. Celda Klouček: Novinky z krušnohorských vrstev *d* α, část V., Rozpravy Č. Akademie 1919.

[15]) Srv. o tom K. Feistmantel: l. c. 8.) a R. Kettner, l. c. 7.), č. II., str. 30.

Hermaphroditní útvar v abnormálním květu lilie bílé (Lilium candidum L.).

Příspěvek k teratologii květu.

Napsal

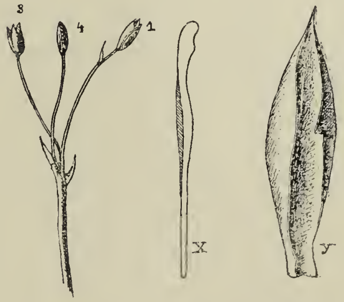
dr. Jan Vilhelm,
docent university Karlovy v Praze.

S 2 vyobrazeními v textu.

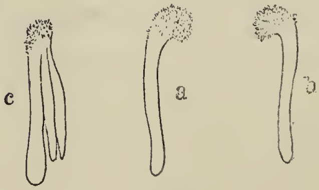
(Předloženo v sezení dne 18. listopadu 1921.)

Různé abnormity v květech *lilie bílé* (*Lilium candidum L.*) byly již mnohokráte v literatuře zaznamenány [1]) a týkají se ponejvíce *petaloidie, pleiotaxie, multiplikace, fasciace* a *spiralismu.* Ke konci června 1921 p. univ. prof. dr. Boh. Němec dal mi laskavě k prostudování morfologickému květ *lilie bílé,* který byl abnormálně vyvinutý. Lodyha byla zakončena zdánlivě celkem 3 květy, z nichž dva byly úplně pravidelné, u jednoho však bylo o jeden okvětní lístek více, a třetí byl na první pohled redukovaný a zdeformovaný.

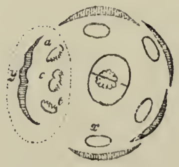
I



Při bližším prohlédnutí bylo shledáno, že tento *abnormální květ* (na vyobrazení I. 2. a 3.) vlastně *jest srostlý ze dvou květů, nestejným způsobem redukovaných.* Také hroznovité květenství nebylo zcela normálně vyvinuto a podle očíslování květů na vyobrazení postupně rozvíjely se květy ze svých pupenů. K orientaci květů náležející listeny nebyly rovněž pravidelně vyvinuty. Listen třetího květu posunul se až do květu druhého, kde postavil se mezi okvětní lístky abnormálního květu (na vyobrazení I. *y*).



II.



---

[1]) L. c. Penzig: *Miscellanea Teratologica.* 1884. — Masters-Dammer: *Pflanzen-Teratologie.* 1886.

Že tu skutečně jde o srůst dvou květů, svědčí také zevně zřetelný srůst květních stopek, jež pod květem tvoří oddělené od sebe valy, ač jinak spolu souvisí úplně. Srůstem květních stopek, následkem srůstu květních pupenů, oba květy se vyvinuly pro nedostatek místa nepravidelně, *redukovaly počet svých částí a vytvořily nepravidelně některé z těchto částí.*

Při podrobném rozboru srostlých květů, zdánlivě napodobujících jeden květ, bylo okvětí složeno ze pěti bílých okvětních lístků, z nichž jeden byl kratší a sahal asi do polovice ostatních. Tento nepravidelný okvětní lístek bílý (na vyobr. y) měl střední žebro nazelenalé a na špičce hnědočervené. Také tvar tohoto lístku nebyl souměrný, nýbrž byla značněji vytvořena jedna jeho polovina. Podle mého názoru jest to *přeměněný petaloidně listen patřící k druhému květu více redukovanému, jehož okvětí vůbec abortovalo.*

Ostatní čtyři okvětní lístky patří k prvnímu květu, z nichž dva jsou vnější a s nimi střídavé dva vnitřní. Od normálních se mnoho neliší, jen okraje jejich dovnitř se poněkud zahrnují a zahalují před nimi postavené tyčinky. Před každým z těchto lístků vyvinula se tyčinka, z nichž jedna krajní jest do polovice zpetalisovaná. Na konci stejně dlouhé nitky (na vyobr. x), jako u normální tyčinky vyvinul se místo prašníků petaloidní bílý, poněkud zkroucený útvar odpovídající jednomu pytlíčku, kdežto druhý pytlíček vyvinul se normálně s pylovými zrnky. Uprostřed tohoto květu jest pestík, složený ze dvoupouzdrého semeníku s čnělkou a dvoulaločnou bliznou, jenž jevil se nehledě k počtu plodolistů zcela normálním.

První vytvořil se *ze srostlých květů* tedy *dvoučetně ve všech svých částech,* a jedna z tyčinek jeho byla z polovice petaloidní.

Druhý ze srostlých květů (viz vyobr. II. diagram), který se vsunul do mezery mezi prvním a čtvrtým okvětním lístkem v úžlabí petaloidního menšího listenu, byl ještě více než první redukován a složen z velice pozměněných částí. Vyvinuly se tu jen tři části květní, jež mají charakter zcela zvláštní, nepodobný okvětí, tyčinkám a plodolistům.

Dva útvary tohoto květu byly celkem shodné, dužnaté, nazelenale bělavé, asi jako normální semeník vysoké, na konci kyjovitě zduřelé, žlutozelené, k sobě zahnuté (viz na vyobraz. a, b). Jejich struktura na povrchu, zvláště na koncích nahoře, byla bradavkovitá a na špičce z jemných nitkovitých žlázek složená. Celkem tato struktura byla zcela shodná se strukturou na bliznách normálních květů.

Tato abnormálně vyvinutá část květu mohla by se srovnati *s petalisovaným plodolistem, na jehož špičce zůstala struktura bliznová.*

Třetí část druhého abnormálního květu byla rovněž zajímavá a zvláštním způsobem znetvořena. Byla to zpetalisovaná tyčinka, jejíž nitka byla podobně zduřená jako u předešlých dvou zpetalisovaných plodolistů a na konci této byly opět vytvořeny struktury bliznové, dolu zahnutý prašník, přiložený ke zduřelé nitce. Prašník byl žlutý, pouzdra jeho bez vyvinutých pylových zrnek. Tento *hermaphroditní útvar* mohl se nazvati *polotyčinkou* a *poloplodolistem zároveň.*

Nejzajímavějším právě z těchto srostlých dvou abnormálních květů jest tato poslední část květní, zpetalisovaná částečně nitka tyčinky, nesoucí na konci hořením bliznu, s vyvinutým sice prašníkem, ale bez klíčivých pylových zrnek (vyobr. *c*).

Tento *hermaphroditní útvar abnormální* jest zase *novým dokladem pro srovnávací morfologii květní,* že *tyčinka* a *plodolist mají stejný význam morfologický ve květu,* jak to bylo pozorováno již jednou na abnormálních tyčinkách Englerem u *Sempervivum tectorum,* jejichž část nesla vajíčka a část prašná pouzdra (l. c. Pflanzenfam. I. a. p. 147).

Za poskytnutí materiálu k tomuto pojednání dovoluji si p. univers. prof. dr. Boh. Němcovi, řediteli ústavu pro anatomii a rostl. fysiologii na universitě Karlově v Praze vzdáti svůj vřelý dík!

Výklad vyobrazení v textu.

Obr. I. Konec květenství s *1* a *4* normálními květy a se srostlými dvěma abnormálními květy *2*, *3*.
- *y* listen druhého abnormálního květu.
- *x* zpetalisovaná tyčinka s 1 prašným pytlíčkem z prvního abnormálního květu.
- *a*, *b* zpetalisované plodolisty z druhého abnorm. květu.
- *c* hermaphroditní útvar z druhého abnorm. květu.

Obr. II. Diagram dvou abnormálních květů srostlých.

O spodním siluru mezi Vinoří a Brandýsem n. L.

Alois Matějka v Praze.

(Se 2 obrázky.)

(Předloženo dne 18. listopadu 1921.)

Spodnosilurské vrstvy severního křídla Barrandienu, jež ztrácejí se severovýchodně od Prahy mezi *Kobylisy* a *Hloubětínem* pod uloženinami křídovými, vynořují se opětovně z křídové pokrývky v oblasti potoka *Valchy* mezi *Vinoří* a *Brandýsem.* Jsou tu přístupny jednak přímo v údolí tohoto potoka, jenž zařízl se křídovými sedimenty až na zvrásněný silurský podklad, jednak vyskytují se na místech, jež v době transgresse křídové tvořila vyvýšeniny čnějící z jinak rovného téměř dna v podobě nízkých návrší zaoblených tvarů. Tato návrší nebyla pokryta uloženinami našich nejstarších dvou pásem křídových, a když, tedy byla jimi zahalena v nepatrné mocnosti. Proto po značné denudaci křídových vrstev vynikají dnes jako ostrovy z křídové tabule zachované v předkřídových depressích.

Proto nenalézáme tu též nikde tak příznivých odkryvů jako jinde ve stř. Čechách, kde můžeme sledovati nepřetržitý sled celé řady souvrství nad sebou uložených, nýbrž jsme odkázáni na odkryvy více meně neúplné, takže s výjimkou drabovských křemenců, není přístupno žádné z ostatních silurských pásem v údolí Valchy se vyskytujících v úplné své mocnosti.

Starší mapy geologické[1]) zakreslují výchozy silurských pásem, jak měl jsem příležitost se přesvědčiti při novém podrobném geologickém mapování této krajiny, dosti neúplně a rovněž zprávy o povaze vrstev zde se vyskytujících[2]), zvláště pak o poměrech tektonických, jsou často nepřesné.

Poznámky stratigrafické.

Kromě útvaru algonkického tvořeného břidlicemi různých barev a rozmanité povahy petrografické, jež obsahují buližníkové vložky různě mocné, přístupno je v okolí potoka Valchy pět nejstarších pásem spodnosilurských: *vrstvy krušnohorské d α*, *pásmo d β* a *d γ*, *křemence drabovské d δ* a posleze *vrstvy zahořanské d ε*.

---

[1]) Mapa bývalého říšského geol. ústavu vídeňského 1 : 144.000 Krejčí-Helmhacker: Geologická mapa okolí pražského. Archiv pro přírodovědecký výzkum Čech 1893. Počta: Geologická mapa Čech. Sekce V. Širší okolí praž. Tamtéž 1903.

[2]) Vysvětlivky ku geol. mapě Krejčí-Helmhackerově, Krejčí: Geologie 1877. Katzer: Geologie von Böhmen 1892.

Vrstvy krušnohorské d α, pokud jsou přístupny, tvořeny jsou horninami valnou většinou *značně rozdílnými* od oněch, s nimiž setkáváme se na ostatních lokalitách středočeských. Nikde nejsou odkryty v úplné své mocnosti až do nadložních vrstev pásma následujícího, takže *neznáme* bezpečně jejich *svrchního oddílu*. Setkáváme se s nimi pouze na dvou místech. Jednak na *Zabitém kopci* (kota 261) vjv od *Myškovic*, kde otevřeny jsou štěrkovým lomem, a pak poblíže koty 210 západně od *Popovic*.

Na Zabitem kopci odkryty jsou tyto vrstvy:

Nejspodněji jsou *basální slepence*, skládající se z dokonale zakulacených valounů buližníkových dosahujících často až 30 *cm* v průměru; řidčeji přistupují též valounky křemenné. Tmel je buď železitopísčitý (slepence jsou rudě zbarveny), místy křemitý. V základní této hmotě setmelující valouny jsou přítomna drobná zrnka buližníková i ostrohranné úlomky a někdy i úlomky rozložených algonkických břidlic.

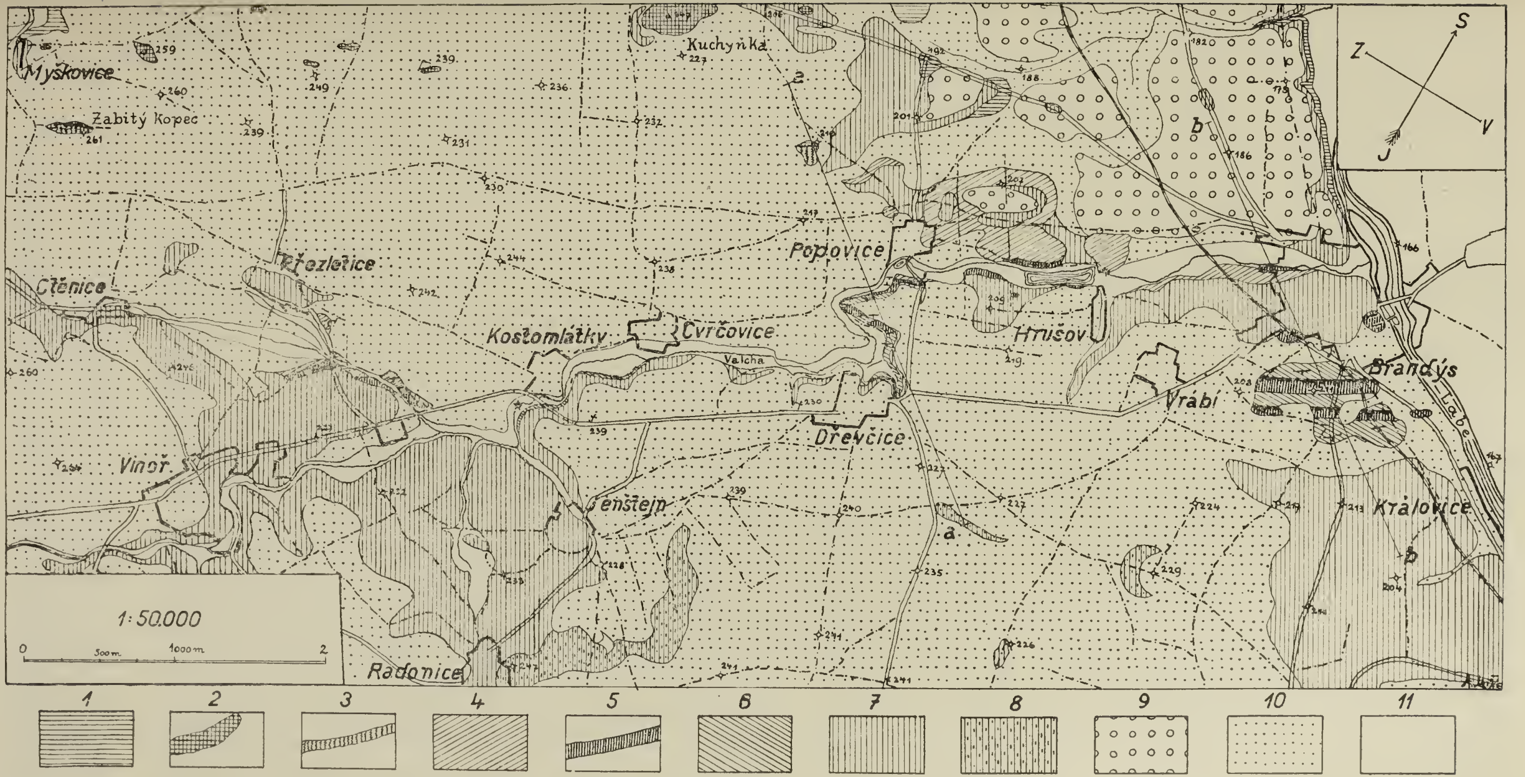
Směrem do nadloží ubývá velkých valounů buližníkových a vyskytují se místo nich ostrohranné úlomky buližníkové prostřední velikosti. Tmel stává se více křemitým, takže následkem menšího obsahu tmelu železitého má hornina daleko světlejší barvu než slepenec basální. Mocnost těchto dvou souvrství odhaduji přibližně na 10 *m*.

Následující vrstvy význačny jsou úplným nedostatkem železitého tmelu, a stejnou velikostí částic křemenných a buližníkových. Tmel jest křemitý. Jsou to *křemité hrubozrnné pískovce* — až *slepence*, tvořící lavice průměrně 20 *cm* silné. Mocnost jejich je asi 15 *m*. Nejvyšší polohu jejich tvoří as 3 *m* mocná poloha *šedozeleného křemence*.

Nejvýše přístupné vrstvy tvořeny jsou *rudohnědými slídnatými železitými pískovci*, po případě břidlicemi.

Lokalita na *Zabitém kopci* byla podrobně popsána již Krejčím a Helmhackerem, kteří také již uvádějí, že vrstvy jsou vesměs překocené, následkem tektonické poruchy, takže zapadají pod buližník na Zabitem kopci vystupující. Údaj jejich, že vyskytují se tu rudy a diabasový tuf, dlužno ovšem opraviti. Spodní slepencovou polohu a křemite slepence a pískovce čítají tito autoři rovněž jako Katzer k vrstvám krušnohorským, červené železite pískovce a břidlice však neprávem k pásmu komárovskému, neboť horniny tyto jsou shodny s krušnohorskými vrstvami objevujícími se u *Kobylis*. Po zkušenostech v oboru pásma *d α* v pražském okolí čítal bych je k jeho *svrchnímu oddělení*.

Zda i vrstvy v podloží jich vystupující náležejí ještě svrchnímu *d α*, nebo snad částečně již střednímu, nemožno rozhodnouti; rohovce typické pro tento horizont tu vyvinuty nejsou a naděje, že by se tu našla nějaká


Myškovice
259
260
Zabitý Kopec
261
239
249
236
Kuchyňka
227
232
231
230
244
Přezletice
Členice
242
246
260
Koštomlátky
Cvrčovice
Valcha
Popovice
238
Hrušov
Vrábí
Brandýs
Labe
Drevčice
Vinoř
Jenštejn
Královice
Radonice
a
b
S
Z
V
J
1:50.000
0
500 m
1000 m
2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Obr. 1. Geologická mapa území mezi Vinoří a Brandýsem n. L. 1 = algonkické břidlice, 2 = buližníky, 3 = krušnohorské vrstvy $d\alpha$, 4 = vrstvy komárovské $d\beta$ a osecko-kváňské $d\gamma$, 5 = křemence drabovské $d\delta$, 6 = vrstvy zahořanské $d\varepsilon$, 7 = I. a II. pásmo křídové, 8 = III. pásmo křídové, 9 = diluviální štěrky a písky, 10 = diluviální hlíny a ssuti, 11 = alluvium.

fauna, která by o tom rozhodla, při petrografické povaze těchto uloženin je pranepatrná.

V pokračování výskytu krušnohorských vrstev na Zabitém kopci leží druhý jejich odkryv u koty 210 *západně od Popovic.* Tektonická porucha způsobuje, že jest tu vyvinuta pouze poloha křemitých pískovců a slepenců. Jejich daleko větší mocnost než u *Myškovic* vysvětluje se menším přesmykem, jenž způsobuje tu jejich opakování.

Vrstvy komárovské $d\,\beta$ a *oseckokváňské* $d\,\gamma$. Pokud se týče pásma komárovského, nikde nenašel jsem v okolí Brandýsa hornin význačných pro ně, na př. západně od Prahy v údolí šáreckém (diabasové tufy, mandlovce a žel. rudy). V místě, kde nejspíše bylo by možno očekávati výchozy pásma $d\,\beta$, totiž v nadloží výskytu krušnohorských vrstev u *Popovic,* vystupují v polích pod korycanskými pískovci *zelenavé, slídnaté, jílovité břidlice.*

Jest pak možný dvojí výklad. Buď jsou tu vrstvy komárovské vyvinuty ve facii vulkanické, ale jsouce málo mocné nejsou přístupny, anebo nevycházejí na povrch následkem tektonické poruchy. Druhá možnost je ta, že *pásmo* $d\,\beta$ *je vyvinuto v podobě zelených a šedých jílovitých břidlic.* Domnívám se, že druhý výklad je pravděpodobnější. Svědčí mu okolnost, že *mocnost břidlic oseckokváňských,* v případě, že zařazovali bychom k nim veškeré břidlice vyvinuté v podloží nejsevernějšího pruhu drabovských křemenců jižně u *Popovic,* i když musíme v nich předpokládati opakování vrstev následkem přesmyku zjištěného poněkud východněji u *Brandýsa, byla by více než dvakráte větší,* než s jakou setkáváme se u pásma $d\,\gamma$ v pražském okolí. Druhý důvod, který činí výklad tento pravděpodobnějším, je vývoj pásem $d\,\beta$ a $d\,\gamma$ jz od *Kobylis.* Na této lokalitě diabasové mandlovce, tufy a deskovce mají *nepatrnou mocnost* několika metrů, kdežto mocnost nadložních břidlic až k drabovským křemencům je daleko větší než obvyklá mocnost samotného pásma osecko-kváňského, takže je *zřejmo,* že *část vrstev komárovských* je tu *zastoupena horninami* petrograficky *shodnými* s $d\,\gamma$.

Že předpoklad o nedostatku vulkanických hornin ve vrstvách $d\,\beta$ u Brandýsa není nemožností, toho nejlepším dokladem jsou i poměry v záp. Barrandienu, kde místy je souvrství komárovské tvořeno *břidlicemi klabavskými.*3) Dále pro to mluví krajina v okolí *Ouval,* kde podle Kodyma 4) budovány jsou komárovské vrstvy horninami naprosto shodnými s břidlicemi seznanými u Brandýsa.

Z vylíčených poměrů je zřejmo, že *nelze stanoviti přesné hranice mezi pásmem* $d\,\beta$ *a břidlicemi osecko-kváňskými.* Tyto liší se ovšem od břidlic pásma komárovského přítomností křemitých kuliček, ale ty bývají tu

---

3) R. Kettner: Příspěvek ku stratigrafii vrstev komárovských ($D d_1 \beta$) a osecko-kvaňských ($D d_1 \gamma$). Rozpravy Č. A. 1918.

4) O. Kodym: Ložisko železné rudy u Ouval vých. od Prahy. Hornické a hutnické listy 1921.

velmi vzácné. Jinak jsou vrstvy jejich petrograficky ve spodnějších polohách tytéž, jako břidlice pásma *d* β. Toliko v přímém podloží drabovských křemenců je rozdíl větší, neboť břidlice mají černou barvu a nejsou tak slídnate.

Vrstvy *d* γ přístupny jsou v podloží drabovských křemenců severně od *Vinoře.* Na pravé straně silnice vedoucí od vinořského cukrovaru do *Přezletic* odkryty jsou dobře v jámě, a nalezneme tu v nich dosti křemitých konkrecí, avšak bez zkamenělin. Další odkryvy jsou v okolí *Popovic,* hlavně na cestě z této osady k *hrušovskému mlýnu.* Poslední výskyt je v údolí potoka Valchy severně od Pražské ulice v *Brandýse n. Lab.*, kde vystupují pod peruckými pískovci zelenošedé, hrubě slídnaté, jílovité břidlice se vzácnými křemitými konkrecemi. Nalezl jsem v nich: *Orthoceras sp., Illaenus sp., Calymmene Arago, Orthis moesta.*

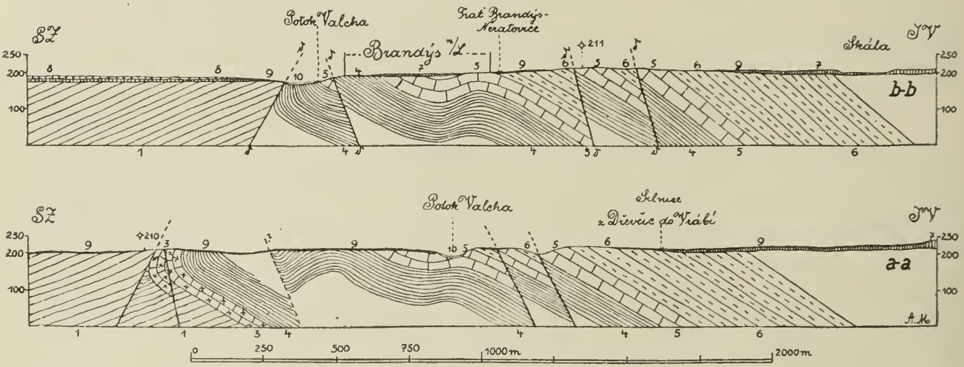
Drabovské křemence d δ spolu s pásmem následujícím jsou nejčastěji přístupnými vrstvami brandýsského paleozoika. Jsou to jemnozrnné až celistvé křemence světlých barev, jež neliší se téměř vůbec od pásma *d* δ pražského okolí. Vystupují v lavicích 20—80 *cm* mocných, zřídka slabších. Na hranici mezi nimi a vrstvami zahořanskými objevují se mezi lavicemi křemencovými vrstvičky jílovitých nazelenalých nebo šedých břidlic, mocné 5—15 *cm,* vzácně až ½ *m* (jižně od *Popovic*), nebo vložky křemitých drobových břidlic šedozelených (jižně od *Brandýsa*).

Jsou odkryty *severně od Vinoře* v údolí potoka tekoucího od *Ctěnic.* Odtud až k *Dřevčicům* nevycházejí na povrch. Pěkné odkryvy jsou jižně od *Popovic,* kde opakují se ve třech pruzích následkem směrných přesmyků. Nejsevernější pruh možno pak sledovati až k *Hrušovu.* V *Brandýse n. L.* a jižně od něho objevují se opět ve třech pruzích, jež tvoří zřejmě pokračování křemenců přístupných mezi *Popovicemi* a *Dřevčicemi.* Malá osamělá kra vystupuje kromě toho z alluvia potoka Valchy na východní straně Brandýsa.

Vrstvy zahořanské d ε objevují se nejprve u mlýna *Podolánky* pod peruckými pískovci a sledují odtud pravý břeh Valchy až do Dřevčic, jsouce místy zakryty svahovou hlinou, jež pokrývá často údolní stráň, nebo ssutí z vrstev křídových. Jsou to černé, slídnaté břidlice značně jílovité, místy s polohami břidlic drobových, jež jeví roubíkovitý rozpad. Jižně od *Popovic* objevují se v nadloží zmíněných již tří pruhů pásma *d* δ a jeví tu v nejspodnějších polohách 30—150 *cm* mocných poněkud odchylný ráz. Jsou to jílovité břidlice světlých barev (šedavé, načervenalé) shodné úplně s jílovitými vložkami mezi lavicemi drabovských křemenců. Jižně od Brandýsa n. L. vystupují opětně ve třech pruzích v pokračování výskytů popovických.

Tektonika.

Směr vrstev silurských je, nehledíme-li k místním úchylkám, *h* 4—5, kdežto směr algonkia *h* 3, čímž naznačena je zřetelně *diskordance* mezi oběma útvary Přímého uložení vrstev krušnohorských na algonkiu však nenalézáme, ježto *hranice mezi nimi a algonkiem je tektonická,* jsouc podmíněna přesmykem, podle něhož *vyzdvižena byla kra* severnější, *algonkická, nad* jižnější *silurskou.* Dislokační plocha tohoto přesmyku zapadá k sz — tedy *v opačném smyslu,* než je normální *úklon vrstev silurských* a v opačném směru než úklony směrných přesmyků severního křídla Barrandienu. Že předpoklad tento je správný a že podle této poruchy udál se pohyb kry algonkické přes silurskou, dokazuje *překocení vrstev krušnohorských na Zabitém kopci u Myškovic a u Popovic,* kde vrstvy tyto zapadají pod úhlem 65—70° k sz. Přesmyk tento není téhož směru, jako vrstvy silurské, nýbrž



Obr. 2. Profily spodním silurem záp. od Brandýsa n. L. 1 = algonkické břidlice, 3 = vrstvy krušnohorské *d* α, 4 = vrstvy komárovské *d* β + osecko-kváňské *d* γ, 5 = křemence drabovské *d* δ, 6 = vrstvy zahořanské *d* ε, 7 = křída, 8 = štěrky a písky, 9 = hlíny a ssuti, 10 = alluvium.

svírá s nimi nepatrný úhel. Následkem toho na západním konci Zabitého kopce vystupuje basální slepenec *d* α, kdežto na východním objevují se v sousedství buližníku teprve polohy přecházející již do křemitých slepenců a pískovců, a na výskytu krušnohorských vrstev u *Popovic* již jen vrstvy křemité slepence a pískovce, a to opět v poloze překocené.

Dále k východu není příznivých odkryvů, na nichž dala by se zjistiti přítomnost tohoto přesmyku, ale i tu možno souditi na jeho existenci. Po pravé straně železniční trati *Brandýs n. L.—Neratovice,* v místě, kde přetíná cestu vedoucí od kapličky sv. Anny u Brandýsa k Popovicům, odkryty jsou v opuštěné pískovně algonkické jílovité břidlice směru *h* 3, zapadající pod nepatrným úhlem k sz, ač měly by tam vycházeti břidlice *d* β + *d* γ, vystupující u hrušovského mlýna a v polích severně od něho. Jediný možný výklad vysvětlující tento zjev je ten, že *přesmyk* zjištěný na *Zabitém kopci* u *Myškovic* a záp. od *Popovic* následkem odchylného směru od vrstev spodnosilurských *způsobuje pozvolné tektonické vytrácení nejspodnějších* jejich *horizontů směrem k východu,* takže na vých. konci *Brandýsa* hraničí algonkium již s nejsvrchnějšími polohami pásma *d* β, po případě s vrstvami osecko-kváňskými.

Překocení nejspodnějších pásem silurských od *d* α do *d* δ pozorujeme i v okolí *Kobylis* a i tam je hranice mezi silurem a algonkiem tektonická. Je-li porucha oddělující zde silur od algonkia pokračováním přesmyku zjištěného v krajině brandýsské, nemožno bezpečně tvrditi, neboť vzdálenost mezi oběma místy je dosti značná a silurské vrstvy jsou tu pokryty křídou, takže bezpečných důkazů pro to podati nemůžeme. Myslím však, že možnost ta je velmi pravděpodobná. Zajímavo je, že již Krejčí a Feistmantel[5]) povšimli si tohoto zlomu a správně jej na profilech zakreslují.

Poruchu tuto možno srovnati se *závistským přesmykem* v jv křídle Barrandienu.[6]) Podle obou přesmyknuto bylo algonkium přes okraj staropaleozoické synklinály, oba svým nesouhlasným směrem s vrstvami silurskými způsobují tektonické vytrácení nejspodnějších souvrství staropaleozoických a úklon jejich dislokačních ploch je opačný, než u obvyklých přesmyků v příslušných křídlech Barrandienu. Myslím, že i vznikem svým spadají do doby současné.

Kromě zmíněného překocení vrstev krušnohorských *zapadají vrstvy* ostatních pásem *silurských*, tak jak je to pravidlem v severní části Barrandienu, *převážně k jv.*

Toliko *jižně od Popovic* a pak v *okolí Brandýsa n. L.* setkáváme se ještě s odchylnými úklony, způsobenými *synklinálním* a *antiklinálním ohybem drabovských křemenců*. Místní antiklinálu pozorujeme dále na cestě mezi *Popovicemi* a *hrušovským mlýnem v břidlicích oseckokváňských*. Nepravidelnosti tyto jsou však rázu toliko místního. Katzer kreslí na profilu mezi *Zabitým kopcem* a *Jenštejnem* drabovské křemence a břidlice *d* γ zapadající k sz; že tento údaj je nesprávný, přesvědčíme se snadno na odkryvu břidlic osecko-kváňských severně od Vinoře. Tyto zapadají právě směrem opačným.

Kromě zmíněného již přesmyku, jenž probíhá na hranici mezi silurem a algonkiem, zjištěny byly v krajině brandýsské ještě *tři směrné přesmyky*, způsobující *čtveré opakování drabovských křemenců*. Nejsevernější způsobuje vystupování slabé kry křemencove v alluviu Valchy u Brandýsa. Směrem k západu nedá se však již zjistiti, neboť průběh jeho je jednak zakryt diluviální hlinou, jednak nelze ho vymapovati v petrograficky jednotvárném souvrství pásem *d* β + *d* γ, ač z mocnosti jejich přítomnost jeho nutně vyplývá.

Druhé dva přesmyky vystupují v zářezu Valchy mezi *Dřevčicemi* a *Popovicemi* a pokračují východním směrem, takže jižně od Brandýsa jsou tektonické poměry pásem *d* δ a *d* ε úplně stejné. Svou povahou shodují se tyto směrné poruchy s ostatními, objevujícími se jinde v Barrandienu.

---

[5]) Krejčí — Feistmantel: Orografický a geotektonický přehled území silurského ve středních Čechách. Archiv po př. výzkum Čech 18 0.

[6]) Viz R. Kettner: Vrstevní zlom mezi Závistí a Modřanskou roklí. Sborník Č. spol. zem. 1911.

Týž: Ein Beitrag zur Kenntnis der geologischen Verhältnisse der Umgebung von Königsaal Verhandl. d. geol. R. A. 1914.

Příčné poruchy zjištěny byly *severně od Vinoře,* a pak v údolí Valchy mezi *Popovicemi* a *Hrušovem.* Přítomnost jejich je zřejmá z průběhu drabovských křemenců.

Závěr.

Spodnosilurská pásma vystupující v okolí potoka Valchy mezi Vinoří a Brandýsem n. L. jeví tyto poměry stratigrafické:

Vrstvy krušnohorské d α zastoupeny jsou na basi horninami značně odchylnými od oněch jinde ve stř. Čechách vyvinutých. Nejsvrchnější přístupné jich části jsou petrograficky shodné se svrchním oddílem tohoto stupně a přísluší jim nejpravděpodobněji i stejné s nimi stáří.

Vrstvy komárovské d β jsou tvořeny zelenavými hrubě slídnatými jílovitými břidlicemi stejného rázu petrografického jako spodní polohy pásma *d* γ, od nichž liší se jen nepřítomností křemitých konkrecí.

Vrstvy osecko-kváňské d γ, *křemence drabovské d* δ a *vrstvy zahořanské d* ε jeví stejný vývoj jako v okolí pražském, toliko pásmo *d* γ ve spodních polohách je stejné jako *d* β, ale liší se od něho přítomností křemitých konkrecí.

Směr vrstev silurských je *h* 4—5, *úklon* kromě místních odchylek k jv. *Diskordance vůči algonkiu* je zřejmá, neboť vrstvy jeho mají směr *h* 3 a úklon k sz.

Hranice mezi *silurem* a *algonkiem* je *tektonická,* jsouc způsobena přesmykem, podle něhož přesmyknuta byla kra algonkická přes silurskou, následkem čehož vrstvy krušnohorské a částečně i břidlice *d* β + *d* γ jsou překoceny. Mezi Dřevčicemi a Popovicemi a jižně od Brandýsa nacházíme lokální synklinální a antiklinální ohyb v drabovských křemencích.

Následkem tří *směrných přesmyků* opakují se drabovské křemence na týchž místech ve čtyřech pruzích.

Státní geol. ústav
Československé republiky.

Psáno v listopadu 1921.

O hálkách háďátka Heterodera radicicola na cukrovce.

Píše

Dr. Bohumil Němec.

(S 1 obr. v textu.)

(Předloženo dne 4. listopadu 1921.)

Několik let před válkou zkoumal jsem hálky působené na kořenech různých rostlin háďátkem *Heterodera radicicola.* Pokusy s cukrovkou ukázaly, že háďátko toto infikuje velice snadno její kořeny a způsobuje na nich nádory. V létě rozmnožilo se háďátko velmi silně i ve volné přírodě ale přes zimu nevytrvá a květináče, v nichž rostly v létě silně infikované rostliny, roku příštího vůbec již infekce nevykazují.

Pokud se týče stavby hálek, nevykazují odchylek od nádorů, jak byly již dříve popsány (Tischler, Němec). Kolem úst háďátka vyvinují se ve svazku cévním obrovské, mnohojaderné buňky, které nejspíše fungují jako jakési nektarium, neboť nejsou poraněny a blána jejich směrem k ústnímu otvoru háďátka není perforována. Pravděpodobně tedy vylučují aktivně živné látky, jak jsem učinil pravděpodobným také pro háďátko *Heterodera Schachtii.* Jádra se v obrovských buňkách rozmnožují karyokineticky, ale hned od počátku v nepravidelných skupinách spolu splývají, načež se opět dělí karyokineticky. Jádra se dělí přibližně současně v jedné buňce a shledáváme tudíž dělící figury s velmi různým, ovšem zvýšeným počtem chromosomů. Fixoval jsem nádory na kořenech v pravidelných intervalech po infekci a mohl jsem tak postupný vývoj obrovských buněk sledovati. Když se jádra již přestala děliti, počínají se téměř všecka v buňce sbližovati a částečně i splývati, jak to též z jiných rostlin háďátkem tímto infikovaných známe. Je tedy sblížení všech jader v jednu skupinu a částečné jich splynutí vlastně již příznakem zastavení dalšího zmnožování jader a vzrůstu obrovských buněk.

V tomto sdělení upozorním na abnormity, které jsem pozoroval při hyperchromatických mitosách v obrovských buňkách. Jsou zajímavy jednak proto, poněvadž jsou u rostlin velmi vzácny, jednak poněvadž bychom je mohli považovati za jakýsi způsob regulace, kterou hyperchromatická jádra zmenšují počet chromosonů jader dceřinných.

Zprvu odehrávají se mitosy zcela normálně. Počet chromosomů jader haploidních činí dle Mattiesena (Tischler, 1915) 8, diploidních 16. V ranné profási objevují se chromosomy jako krátké uzliny v jaderném sítivu, spojené zprvu tenkými vlákny. Těchto spojení ubývá, až se chromosomy úplně isolují. K vytvoření jednotného spiremu tedy nedochází. Chromosomy po isolaci jsou krátké, tyčinkovité nebo ovální, později se prodlužují a zakřivují více nebo méně. Podélným rozštěpením se záhy jejich konce poněkud ztlušťují. Že toto stadium protáhlejších chromosomů je starší, dokazuje také okolnost, že na nich je podélné rozštěpení lépe viditelno. Zřídka objevují se chromosomy uprostřed zaškrcené, takže podélně jsouce rozštěpeny činí dojem čtveřic. Jde tu bezpochyby o zjev analogický tomu, jejž Digby a Sakamura popisují pro chloralisované kořeny. V tomto stadiu, při němž hotové chromosomy pravidelně jsou v jádru rozloženy a hlavně pod blanou jadernou umístěny, je jadérko ještě zachováno.

Nezřídka jsou jádra v profási se nalézající zaškrcena, což je nejspíše zbytek předcházejícího jejich splývání.

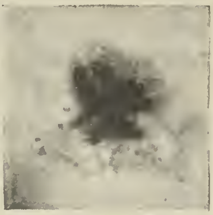
Poněvadž jádra jsou většinou rozříznuta na několik řezů a leckteré chromosomy navzájem se kryjí, nelze přesně v profási počet chromosomů stanoviti. Proto čísla, která jsem napočítal, mohou býti jen přibližně přesná. Napočítal jsem chromosomů: 24, 34, 36, 56, 116. Zřejmě tu jde o jádra didiploidní až oktodiploidní.

Ve stadiu metafáse jsou v některých obrovských buňkách ekvatoriální desky normální, takže jsou všecky chromosomy v jedné rovině rozloženy. Jsou tyčinkovité a zahnuté obloučkovitě až háčkovitě. Napočítal jsem v takovýchto ekvatoriálních deskách 44 až 64 chromosomy, očividně šlo o jádra tridiploidní až tetradiploidní. Ačkoli chromosomy leží hustě, přece se neslepují a lze je dobře rozpoznati. Mnohé z nich leží párovitě rovnoběžně vedle sebe, ale ne všecky. Při pohledu s plochy jsou ekvatoriální desky přibližně kruhovité.

Průměr ekvatoriálních desek je různý dle množství jejich chromosomů. Při tubu 160 *mm*, apochr. č. 2 a mikr. okuláru č. 3 (Zeiss) měřil jsem tyto průměry: 4·5, 5, 5·5, 5·5, 6, 6, 6, 6·5, 6·5, 7, 7·5, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8·2, 8·2, 8·5, 9·5 dílků. Průměr ekvatoriálních desek nepřekročil 9·5 dílků. Měříme-li průměr ekvatoriálních desek polycentrických a sice jednotlivých jejich součástí a sečteme průměry, obdržíme čísla poněkud větší. Tak měřeny byly průměry: $4{\cdot}5 + 3 + 4 = 11{\cdot}5$, $4 + 3 + 4 = 11$, $5 + 3 + 2{\cdot}5 = 10{\cdot}5$, $6 + 4 = 10$. Zdá se tedy, že se polycentricita figur dostavuje, když by uspořádání chromosomů v jediné rovině dalo desku o průměru přesahujícím nějaký maximální rozměr.

Polycentrické figury mají velmi různý tvar. První známkou polycentricity jsou ekvatoriální desky mající na podélném řezu tvar Y, tedy jakoby rozštěpené. Rozštěpení postupuje v jiných případech hlouběji, až vznikají ekvatoriální desky tvaru V. Nejpravidelnější polycentrické figury měly ekvatoriální desku rozdělenu ve tři stejné roviny stejné úhly spolu svírající. Byly to tedy figury třípólové. U nich také metakinesu jsem pozoroval. Není však vyloučeno, že mohou býti též figury o větším ještě počtu pólů, což na řezech těžko lze rozeznati. Větší počet pólů měly nejspíše figury, které se na řezu jevily značně nepravidelnými.

V jedné buňce zastihla fixace jádra ve stadiu telofáse. Skupiny sesterských jader jsou nápadny tím, že kolem nich je nahromaděno hojně cytoplasmy. Sesterská jádra ležela blízko u sebe a nebyla vždy ani v téže skupině stejně veliká. Nejčastější jsou skupiny o třech jádrech, dále byly skupiny, kde dvě jádra spolu byla spojena, třetí samostatné, dále trojlaločné velke jádro .vzniklé nejspíše splýváním tří jader. V téže buňce byly skupiny dvou jader samostatných, nebo dvou jader splývajících. Konečně nepravidelně laločnatá jádra.


Polycentrická figura z obrovské buňky v hálce hádátka Heterodera radicicola.

Nejhojnější byly skupiny tříjaderné, z čehož lze souditi, že nejčastější byly figury třípólové. Poněvadž nebyly všecky polycentrické figury stejně pravidelně vytvořeny, nýbrž vykazovaly různé nepravidelnosti, je pochopitelno, že také dceřinná jádra nemusí býti stejně veliká. Vůbec dávaly polycentrické figury, které jsem pozoroval, možnost vzniku velice rozmanitým případům vzájemného poměru sesterských jader.

Popisuji tyto polycentrické figury proto, poněvadž jsou důkazem, že i bez obvyklého typu dělení redukčního, t. j. dělení heterotypického, je možná redukce chromosomů jinou cestou. Netřeba totiž obšírně doličovati, že polycentricitou figur podmíněn je vznik většího počtu dceřinných jader než-li dvou a tato jádra že musí míti menší počet chromosomů než jádro původní.

Vezměme za příklad jádro o 9 chromosomech. Dicentrickým dělením vzniknou z něho dvě jádra opět o 9 chromosomech. Tricentrickým vzniknou z něho však tři jádra, každé o 6 chromosomech. Z jádra o sudém, čtyřmi dělitelném počtu chromosomů mohou vzniknouti čtyři jádra s polovinou chromosomů počtu původního. Tu redukce počtu chromosomů na polovici je sice opět spojena s počtveřením jader, ale redukce sama děje se docela jiným mechanismem než při dělení heterotypickém.

Takovýmto tetracentrickým dělením mohlo by býti zdánlivě mnohem jednodušeji dosaženo redukce počtu chromosomů na polovinu, než-li dělením heterotypickým. Ve skutečnosti tomu tak není. Již Boveri (1914) ukázal, že při polycentrickém dělení není garancie, že se dostane do dceřinných jader celá sádka chromosomů potřebných k normálnímu vývoji. Čím více chromosomů normální sádka obsahuje, tím větší je pravděpodobnost, že vzniknou jádra s neúplnou sádkou. Při redukci chromosomů nejde rostlině o pouhé snížení počtu chromosomů na polovinu, nýbrž také o to, aby se do všech jader dostala celá sádka kvalitativně různých chromosomů. To je heterotypickým dělením zaručeno, nikoli však polycentrickým. Právě naopak, při něm je dána možnost, že vznikají jádra s neúplnou sádkou chromosomů a Boveri uvádí pathologické zjevy na larvách polyspermaticky zúrodněných vajíček ostnokožců na neúplnost sádky chromosomů, které se dostaly do jednotlivých blastomer.

Boveri považuje polycentrická dělení jader za příčinu vzniku tumorů. Obrovské buňky v hálkách háďátkem *Het. radicicola* působených samy jsou již zjevem pathologickým a nelze stanoviti nějaké specifické nové zjevy podmíněné snad polycentrickým dělením jejich jader. To tím méně, poněvadž jádra jím vzniklá nejspíše opět splývají, čímž se eventuální škodlivé následky polycentrických dělení odstraní.

Je-li správna domněnka o chromosomech jako nositelích dědičných základů, pak musí míti polycentrické dělení za následek abnormity a pathologické zjevy, neboť se nedostane všem jádrům úplné sádky chromosomů. Z toho však neplyne, že by polycentrická dělení musela býti původcem tumorů. Jako v hálkách háďátka mohly by býti též v tumorech zjevem druhotným. Tomu nasvědčuje také zpráva Reicholdova,*) že se ve tkáni karcinomů polycentrické figury objevují účinkem Röntgenových paprsků, tedy druhotně.

V kořenech bobu *Vicia faba* opětovně chloralisovaných pozoroval jsem až i oktodiploidní jádra. Ale polycentrických dělení jsem neshledal. Také ne v endospermu, kde snadno vznikají polytriploidní jádra, ani v buňkách tapetových, v nichž se často objevují jádra polydiploidní. Zvláště obrovská jádra opětovaným splýváním jader vznikají v tapetu lociky *Lactuca sativa*, ale polycentrických dělení tu není.

Jediný mnou dosud pozorovaný případ polycentrických figur týká se živných chlupů v hálkách některých roztočů (*Eriophyes padi* a *tiliae*). I zde je primárním zjevem vícejadernost, splývání jader a hyperchromasie, jejímž následkem se pak zdá býti polycentricita.

Vlivem benzolových par vytvářejí se dle Blažka polycentrické dělící figury v kořenech hrachu. Tu tedy bychom měli methodu sledovati následky polycentrického dělení pro další vývoj buňky. Zvláště vhodné byly by k tomu výtrusy, ktere skutečně v samostatné rostliny se vyvíjejí, jako na př. výtrusy mechů nebo tajnosnubných rostlin cévnatých. Myslím, že by bylo zde možno chloroformováním docíliti polycentrických dělení, soudě aspoň podle zkušeností s chloroformováním prašných květů modřínových.

---

*) Reichold A., 1921, Die Wirkung der Röntgenstrahlen auf die Mitosen im Karzinomgewebe und auf die Blutgewehe. Münch mediz. Wochschr. p. 881.

Má mesonefros ssavčích embryí exkretorickou funkci?

Napsal

Prof. Dr. Z. Frankenberger, Lublaň.

(S 1 tabulkou.)

Práce z ústavu pro histologii a embryologii prof. Dra O. Srdínka na lékařské fakultě university Karlovy v Praze.

(Předloženo dne 4. listopadu 1921.)

Otázka položená v titulu této práce byla dosud málo zkoumána, ač počet morfologických prací o mesonefrosu je velmi veliký. Několik málo zmínek o této věci, které v literatuře nalézáme, má sotva hodnotu skutečného vědeckého poznání, neboť opírá se nikoliv o přesně zjištěná fakta, event. o experimentální důkazy, nýbrž jen o theoretické úvahy, vycházející z morfologického vzhledu mesonefrálních epithelií a z poměru mezi mesonefrosem a metanefrosem. Jest to tím více s podivem, že o mikroskopickém vyšetřování funkce trvalé ledviny, arci pouze u dospělých organismů, máme již celou řadu prací; poukazuji v tom ohledu na obšírný přehled literatury u Arnolda nebo u Turchiniho z doby nejnovější, k němuž budeme se v následujících úvahách ještě častěji vraceti.

V celku nutno říci, že úsudek autorů, kteří se dosud této otázky dotkli, je kladnému jejímu zodpovědění velmi nepříznivý. Tak dochází Weber ve své práci, na základě časového srovnání zániku mesonefrosu a vývoje prvních malpighických tělísek metanefrosu, k závěru, že mesonefros ssavčích embryí nedospívá k sekreční funkci. U člověka, morčete, krtka a myši nastupují regressivní změny mesonefrosu dříve, než se vyvine dostatečně trvalá ledvina, a už proto není možna žádná sekrece. U vepře byla by sekrece sice myslitelna, neboť zde přetrvá dobře vyvinutý mesonefros dosti dlouho (regressivní změny až od stadia asi 5 *cm* dlouhého), aby mohl metanefros převzíti jeho funkci „Ob man aber, nachdem die

Verhältnisse bei allen anderen bis dahin untersuchten Säugern durchaus gegen eine Funktion der Urniere sprechen, ohne positive Beweise beim Schwein eine solche wird annehmen dürfen, das ist eine Frage, welche ich glaube mit Nein beantworten zu müssen."

K jeho úsudku přidává se též Felix i Broman; prvý z jmenovaných uvádí jako důvod proti sekreční funkci mesonefrosu též tu okolnost, že mesonefros ssavčí skládá se jen z jedné řady kanálků, kdežto všechny nesporně fungující mesonefrosy mají kanálky ve více vrstvách nad sebou. Tito autoři pak přisuzují vylučování močoviny, které se skutečně u plodu děje, diffusním pochodům v pupečních cévách.

U dřívějších autorů nebylo ovšem pochyb o tom, že mesonefros funguje jako exkreční orgán; Mihalkovics, Nagel, Janošík, ač přímo a podrobně se touto otázkou nezabývali, považují funkci takovou za samozřejmou. Selenka zjistil funkci exkreční mesonefrosu i v životě extrauterinním nepochybně u Marsupialií, jež se ovšem rodí ve stavu velmi nedokonalém, Kallay myslí rovněž, že mesonefros funguje, a v souvislost se začátkem funkce uvádí vústění Wolffových vývodů do kloaky a mohutný vzrůst allantois (u embryí vepře).

U embryí kuřecích pokusila se o přímý důkaz sekreční schopnosti mesonefrosu Bakouninová. Injikovala embryím kuřecím od 5. dne po nasazení do oběhu krevního roztok indigokarminu a zjistila, že barvivo přechází do lumen kanálků mesonefrosu. Z toho uzavírá, že schopnost secernovati je snad menší v epitheliích tělesa Wolffova nežli ve vlastních epitheliích ledvinných, ale existuje nepochybně od začátku embryonálního vývoje. Je podivno, že tento tak důležitý objev Bakouninové nalezl tak málo povšimnutí.

Tyto nejasnosti a pochyby vedly mne k tomu, pokusiti se o přesné, experimentální zjištění, zda mesonefros ssavčích embryí funguje jako exkreční orgán čili nic. Bylot mi už předem pravděnepodobno, že by na př. tak objemný, vysoce vyvinutý orgán, jako je specielně mesonefros vepřových embryí, neměl žádne specifické funkce. K tomu cíli volil jsem ony methody, které nám podaly dosud tak cenné výsledky u výzkumu exkrečních pochodů v ledvině: vitální injekce barviv. Po pokusech s několika jinými barvivy omezil jsem se posléze pouze na methylenovou modř.

Postup práce byl následující: z čerstvě vyňatého březího uteru svině bylo malým nástřihem stěny děložní vytaženo embryo, jež zcela zřejmě bylo dosud úplně živé. Do veny v pupečním provazci injikováno injekční stříkačkou co možná pomalu, pod velmi mírným tlakem, asi 0·5 až 0·7 *ccm* 1%ního roztoku methylenové modři ve fysiologickém roztoku kuchyňské soli. Rychle dostavilo se celkové modré zbarvení embrya. Na to vsunuto embryo — jež zůstalo v neporušeném vaku amniovém — zpět do uteru, jenž značně dlouho zachovává teplotu Po nějakém čase — ovšem krátkém, jen několika minutách — embryo opět vyňato; předem zjištěno, zda embryo ještě žije, což možno považovati celkem za jisté dle zachovaného tepu srdečního, načež rychle vypreparovány oba mesonefrosy, jež fixovány v prvé tekutině Turchiniho (nasyceného vodního roztoku kyseliny pikrove 60 *ccm*, formolu 20 *ccm*, nasyceného vodního roztoku molybdeňanu ammonatého 20 *ccm*). Tento roztok osvědčil se mi lépe než druhá tekutina téhož autora, sestávající z 200 *ššm* nasyceného vodního roztoku kyseliny pikrové a 25 *ccm* 2%ního roztoku kyseliny osmičelé. Mesonefrosy vyprány po několika hodinách ve vodě, provedeny rychle řadou stoupajících alkoholů a přes benzol zality do parafinu. Řezy 3 až 10 μ silné montovány pak buď bez barvení, nebo po barvení safraninem, někdy též vesuvinem. Kromě toho fixoval jsem mesonefrosy nenastříknuté k účelům cytologickým v tekutině Zenkerově, pro výzkum elementů chondriomových pak v tekutině Regaudově a Bendově.

Bylo by zbytečno, abych se v této práci zabýval obšírným výzkumem morfologie kanálku mesonefrosu; přejímám proto pro orientaci vylíčení, jak je nalézáme od Felixe v Hertwigově příručce. Jak známo, skládá se kanálek po svém značném vzrůstu do délky a z toho vyplývajícím mnohonásobném složení ze tří oddílů. Později se první a druhý (střední) oddíl značně rozšíří a vytvoří tubulus secretorius, kdežto třetí oddíl původního mesonefrálního kanálku zůstane úzký a představuje tubulus collectivus. Jak z dalšího vyplyne, odpovídají tyto názvy plně funkcionálnímu významu jednotlivých oddílů.

Tubulus secretorius je tvořen jednovrstevným epithelem, složeným z buněk cylindrických, někdy vyšších, jindy nižších; v některých partiích přecházejí buňky skoro ve tvar kubický. Jádro jejich je kulaté nebo oválné, světlé, chová obyčejně jeden dosti veliký nukleolus, několik málo karyosomů nepatrné velikosti a síť lininovou. Ojediněle nalezáme též jádra menší, více protáhlá, silněji chromatická, v nichž chromatin je přítomen v podobě hojnějších drobných zrnek, tak že celá jádra jeví se tmavší. Protoplasma těchto buněk je světlé, jeví zřetelně vláknitou strukturu, zvláště v basální části, kde vlákénka protoplasmatická stojí kolmo k basi. Po fixaci některou z udaných method na chondriom a barvení železitým haematoxylinem nalézáme v protoplasmatu hojný chondriom. Na basi buněk jsou to silné, krátké nebo delší chondriokonty, upomínající na Heidenhainovy tyčinky v té podobě, jak je známe z ledviny žabí. V některých buňkách je jen tento chondriom, nad jádrem není v plasmatu žádných zbarvených elementů (obr. 1.) nebo nejvýš jen ojedinělá zrnka mitochondriová. Jinde je celá buňka vyplněna elementy chondriomu; pod jádrem nalézáme popsané právě tyčinky, po stranách jádra tyčinky kratší a zrnka, nad jádrem pak převážně zrna mitochondriová (obr. 2) Differencujeme-li kamencem železitým kratší dobu, je celá buňka černě zbarvena, jen jádro odbarvuje se dříve. Nejpovrchnější vrstva protoplasmatu je vždy chondriomu prosta, jeví se buď úplně světlá nebo je homogenně šedavě zbarvena.

Na praeparátech mesonefrosů injikovaných nalézáme bez následného barvení jádra úplně bezbarvá, viditelná jen dle svého značnějšího lesku (obr. 9.). Epithel kanálků je opět tvořen oněmi cylindrickými nebo kubickými buňkami, jejichž hranice tam, kde není vůbec stopy po modrém zbarvení, jsou velmi nezřetelné. V protoplasmatu je opět viditelna vláknitá struktura zvláště v basální části. Barvíme-li praeparáty safraninem, je protoplasma zbarveno bledě červeně nebo růžově, vláknitá struktura basálních partií je rovněž dobře viditelna. Místy jsou zachovány stopy řasínkového (kartáčkového) povrchu. Jádra jsou opět onoho dvojího typu, jejž jsme poznali již na praeparátech barvených železitým haematoxylinem: jednak velká, kulatá nebo příčně oválná, málo chromatická, tedy světlá, se zřetelným, jasně červeným jadérkem, několika málo drobnými karyosomy a světle růžovou sítí lininovou, jednak menší, podlouhlejší, silně chromatická, s chromatinem v podobě drobných zrnek; nukleolus je malý nebo schází. Těchto druhých jader je daleko méně. Buňky nasedají na basální membránu, často velmi nezřetelnou; pod ní vidíme krevní kapiláry přikládající se přímo ke stěně kanálků nebo jemné řídké vazivo ve velmi malém množství. V epitheliích jsou dosti hojné mitosy.

V některých kanálcích však vidíme intensivní modré zabarvení, rozmanitého vzhledu. V nejjednodušších případech, jež asi představují začátek sekrece, resp. teprve přijímání barviva buňkami mesonefrálními z cév krevních, je modře zbarvena jen tenká basální blána (obr. 3.), jejíž zbarvení je velmi intensivní. Někdy, jak právě na našem vyobrazení je zřejmo, vycházejí od tohoto modrého lemu maličké, zoubkovité výběžky mezi jednotlivé buňky. Jinde, v případech patrně pokročilejší sekrece, nalézáme vedle tohoto intensivního zbarvení basální blány v basální části protoplasmatu modře zbarvené vláknité útvary, jež svým vzhledem a uspořádáním odpovídají úplně jednak vláknitým útvarům, jež jsme poznali již v buňkách, kde nebylo modrého zbarvení vůbec, a kde vláknitá struktura protoplasmatu jevila tinkci červenavou, jednak chondriomovým elementům, jež jsme popsali výše. Zvláště intensivně jsou však zbarveny hranice buněk, takže v tubulech, do nichž vnikla methylenová modř, jsou hranice buněčné mnohem zřetelnější nežli jinde.

V méně pokročilých případech jdou ona basální vlákenka od base buňky až k jádru, výše pak jich nenalézáme. Pouze ony modře zbarvené hranice buněčné sáhají mezi jádry výše k povrchu, někdy pak dosahují až na povrch epithelu (obr. 4., 5.), kde se končí. Na toto stadium možno řaditi buňky, kde modře zbarvených vlákének je velmi mnoho; jednak jsou přítomna dlouhá vlákenka na basi pod jádrem, jednak kratší vlákenka vroubí jádro, a konečně i nad jádrem v povrchní vrstvě prostoplamatu nalézají se modře zbarvené elementy, buď v podobě kratičkých vlákének nebo malých, kulatých nebo nepravidelných zrnek. Takovou buňku představuje nám obr. 6.

Posléze nalézáme buňky, kde basální membrána není již modře zbarvena; v basální partii buňky mohou býti ještě modře zbarvené vláknité útvary, ale hlavní massa modré barvy se nalézá na samém povrchu buňky v podobě širokého, intensivně modře zbarveného lemu nepravidelných obrysů. Nějakých formovaných elementů v tomto lemu nenacházíme, je zcela diffusně modře zabarven. Konečné stadium sekrece pak nám představuje obr. 8. Ani basální blána, ani nějaké elementy v těle buněčném nejsou modře zbarveny, pouze povrchní lem vykazuje intensivní modré zabarvení. Na našem obrázku je barva dosti bledá, poněvadž vyobrazení zhotoveno dle praeparátu velmi tenkého (3 μ). V basální části buňky je zřejma vláknitá struktura, ale zbarvená červenavě.

Podotýkám ještě jednou, že nikdy jsem nenašel ani nejmenší stopy modré barvy v jádrech, což je svědectvím pro skutečně vitální obarvení dotyčných plasmatických elementů.

Srovnáme-li tento náš popis a vyobrazení našich praeparátů s popisem a obrázky Turchiniho, vzatými z ledviny žáby, vidíme úplnou shodu. Také on viděl, že nejprve tvoří barevná massa kontury jednotlivých kanálků, dříve než vnikne do buněk samých. Pozoroval, že barvivo vniká potom do prostůrků mezibuněčných, čímž zvětší se plocha, na níž může se díti vnikání dovnitř buňky. Později jsou v buňkách zbarvena basální vlákénka (tyčinky Heidenhainovy) a granula, jež považuje Turchini — a jistě právem — za elementy chondriomové, mitochondrie, resp. malá sekreční zrnka z nich vzniklá. Zrnité mitochondrie pak vznikají dle jeho mínění rozpadem útvarů vláknitých. Jako v našem případě, tak i on může na základě srovnání s praeparáty barvenými některými z method na mitochondrie identifikovati tyto vitálně obarvené částečky s elementy chondriomu. „Nous croyons que la disposition des chondriocontes en batonnets paralleles est une disposition du chondriome en rapport avec le role de la cellule rénale." Otázku identity Heidenhainových tyčinek (stejně jako ergastoplasmatu jiných buněk žlázových) s chondriomem můžeme dnes pokládati definitivně za rozřešenu v kladném smyslu.

Turchini soudí tedy, že methylenová modř prochází buňkou ledvinovou zbarvujíc chondriom. To jest opět v souhlase s názory předních badatelů o mitochondriích, kteří je považují za elektosomy schopné vybírati z vnitřního prostředí určité látky a použíti jich buď k vytváření sekretů nebo specifických formací při různých pochodech histogenetických. Poslední fase sekrečního pochodu v ledvině, vyloučení barviva do lumen kanálků, děje se dle Turchiniho dialysou kartáčkovým lemem nebo povrchem kutikulárním. Také toto pozorování je úplně ve shodě s tím, co jsme mohli zjistiti v našich praeparatech.

Jsou tedy naše nálezy v mesonefrosu ssavčích embryí nejen podobny, nýbrž takřka totožny s nálezy Turchiniho v nesporně fungující ledvině žab, po použití těchže method. Můžeme-li pak přijímati nálezy Turchiniho jako nesporný morfologický projev ledvinné funkce — a já nevidím důvodu, proč bychom neměli tak učiniti, — musíme zajisté přijmouti stejný závěr i pro náš případ, pro mesonefros embryí ssavčích, resp. v speciálním případě vepřových. Lze-li již z přítomnosti a různého vzhledu chondriomových elementů v buňkách kanálků mesonefrosu, jak jsme je výše popsali, souditi na sekretorickou činnost těchto buněk—neboť podoba se známými obrazy nejrůznějších buněk žlázových je evidentní — jest tato činnost dokázána úplně jejich vitálním obarvením a souvislým sledem stadií vylučování barviva, jak jsme je výše popsali, alespoň potud, pokud možno i u ledviny dospělých organismů činiti z takovýchto výzkumů závěry o existenci a mechanismu exkrečních pochodů v epitheliích ledvinných.

Literatura:

Arnold, J.: Über Plasmastrukturen und ihre funktionelle Bedeutung. Jena 1914.

Bakounine, S.: Sur l'activité sécrétrice des épithéliums de Wolff et des épithéliums rénaux dans les premiers jours de développement embryonnaire. Arch. ital. de biol., T. XXIII. 1895.

Broman, I.: Normale und abnorme Entwicklung des Menschen. Wiesbaden 1911.

Felix, W.: Die Entwicklung des Harnapparates. Hertwigs Handb. d. vergl. u. exp. Entw. d. Wirbelt. 3. Bd. I. Teil, Jena 1906.

Janošík, J.: Histologisch-embryologische Untersuchungen über das Urogenitalsystem. Sitzungsber. d. k. k. Ak. d. Wiss. Wien, Bd. XCI. 1885.

Kallay: Die Niere im frühen Stadium des Embryonallebens. Mitt. embr. Inst. d. Univ. Wien, 1885.

Mihalkovics: Untersuchungen über die Entwicklungsgeschichte des Harn- und Geschlechtsapparates der Amnioten. Int. Monatsschr. f. Anat. u. Hist. 1885.

Nagel, W.: Zur Entwicklung des Urogenitalsystems beim Menschen. Arch. Anat. u. Entw. 1896.

Selenka, E.: Studien zur Entwicklungsgeschichte der Tiere. H. 4. Wiesbaden 1887.

Turchini, J.: Contribution à l'étude des processus cytologiques de l'élimination des matriées colorantes par le rein. Thèse, Paris 1919.

Weber, S.: Zur Entwicklungsgechichte des uropoetischen Apparates bei Säugern, mit besonderer Berücksichtigung der Urniere zur Zeit des Auftretens der bleibenden Niere. Morph. Arb., herausg. v. G. Schwalbe. Bd. VII. H. 3. 1897.

Vysvětlení obrázků.

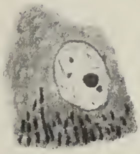
Veškeré obrázky kresleny při zvětšení Merker, homog. imm. 1/12, oc. 4, (kreslicí stolek ve výši stolku mikroskopu, výtah tubu 160 mm.

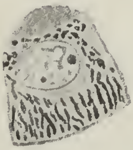
Obr. 1 a 2. Buňky mesonefrosu embrya vepře 25 mm dlouhého s chondriomem. Fix. Regaud, barv. žel. haem.

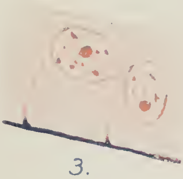
Obr. 3—8. Buňky mesonefrosu embrya vepře 32 mm dlouhého, nastřiknutého vitálně methylenovou modří, fix. dle Turchiniho. Safranin. (Různá stadia sekrece viz v textu.)

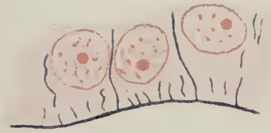
Obr. 9. Buňky mesonefrosu stejného embrya, bez barvení.

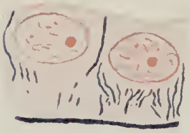
Prof. Dr. Z. Frankenberger: Má mesonefros ssavčích embryí exkretorickou funkci?

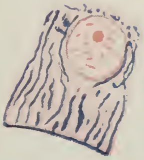

1.

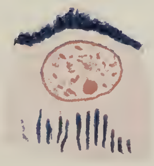

2.

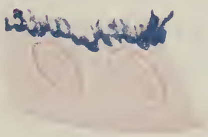

3.

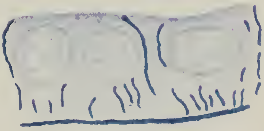

4.


5.


6.


7.


8.


9.

Rozpravy: Roč. XXX. Tř. II. Čís. 47.

Ročník XXX. TŘÍDA II. Číslo 48.

Čedič z Vinařické hory.

Napsal

Aug. Ondřej v Praze.

(S jedním obr. v textu.)

(Předloženo 3. června 1921.)

Táhlý a klikatý hřbet vinařické hory vypínající se mezi Kladnem a Slaným a povlovně přecházející na V. v sedimenty křídové, byl často předmětem pozornosti geologů i petrografů. První zmínku věnoval mu v. Lipold,[1] jenž v přehledné práci své o kamenouhelném útvaru kladensko-slánském stručně popisuje erupci i kontakt se sousedními horninami. Dle líčení jeho lze souditi, že vinařické hoře přikládá povahu stratovulkánu a horninu samu řadí blíže k znělcům než vlastním čedičům.

První podrobný popis mikroskopický podal Bořický.[2] Petrograficky přiřaďuje horninu tuto k jemnozrnným nefelinitoidům t. j. čedičům obsahujícím směs nefelinu a leucitu tvořící větší shluky a příslušejícím lokálně dílem k čedičům leucitickým dílem nefelinickým. Vedle nefelinu a leucitu zjistil magnetit, apatit a biotit, a jeho hlavní součást „amfibol, souhlasící s amfibolovými krystaly z čediče řipského.“ Jak patrno, Bořický, jako častěji i zde zaměnil amfibol za augit, kterýžto omyl, pokud se týče čediče řipského, arciť později sám opravil; v hornině neuvádí olivinu. Původní preparát Bořického uložený v Národním museu má olivin v krystalech šestibokých obrysů průměrně ½—2 *mm* dlouhých. Krystaly jsou jen z části zachovalé, většinou proměněny buď v hmotu serpentinovou neb nahrazeny pleromorfosami uhličitanů. Preparát obsahuje čistý a hojný nefelin, nemá však leucitu. Krejčí a Helmhacker[3]) opakují údaje

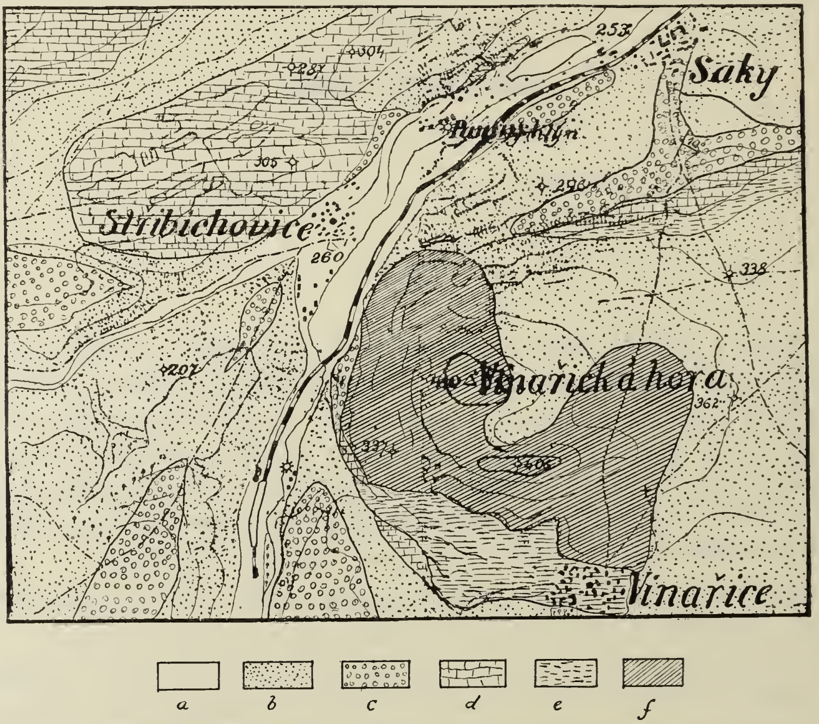
---

[1] Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanstalt 1862. p. 517.

[2] Archiv pro přírodovědecké prozkoumání Čech. II. 1. II. Praha 1873. p. 58. tab. III. obr. 8.

[3] Archiv pro přírodovědecké prozkoumání Čech IV. Praha 1879. p. 152.

Bořického, uvádějí žíly čedičové v obvodu slojí uhelných u Motyčína, kdež kontaktem uhlí bylo zkokováno; v. Foullon[4] opravil omyl Bořického v určení augitu, popírá přítomnost leucitu, naproti tomu zjistil nosean a skrovný olivin. Označuje horninu jakožto noseanický nefelinický čedič. Pokud se noseanu týče, zaměnil asi v. Foullon preparáty z vinařické hory s výbrusy z hory slánské. Hlavní pozornost věnoval žilám čediče prorážejícím sloje uhelné. Rozložená hornina šachty Mayrau byla dle chemického rozboru a druhotných nerostů asi olivinickým živcovitým čedičem, jehož živec autor určil suspensí a chemickým rozborem jakožto albit. Sigmund[5] označuje vinařickou horu za proud vyniklý na povrch z pukliny směru JZ, jež provázena je četnými puklinami menšími, jež paprsčitě z centra vybíhají. Lávové poresní formy určil Becke[6] za nefelinitoidickou lávu, podobnou některým lávám Eifelu. Schröckenstein[7] rozeznává tři proudy lávové. Hlavní pozornost věnoval žilám



Geologická mapka okolí Vinařické hory. I : 25.000

Obr. 1. a = aluvium, b = hlíny a písky, c = permokarbon, d = pískovce a slepence spodní křídy, e = opuky, f = čedič.

---

[4] Verhandlungen d. k. k. geol. Reichsanstalt 1885. p. 277.

[5] Die Basaltberg b. Schlan u. Vinařic. Program něm. gymn. na Smíchově, 1893. p. 25.

[6] ibid. p. 24.

[7] Věstník král. spol. nauk. 1900. XXIV.

čedičovým v podzemí. V dole Ronna 1200 *m* JV od vrcholu hory zjistil žílu živcovitého čediče s olivinickými hlízami, dále úzké žíly v obvodu šachty mayrauské a Maxovy, v šachtě Barréově diabas. Mikroskopických a chemických zkoumání neuvádí. Tufy, jež dle Schröckensteina provázejí žíly čedičové, jsou pravděpodobně eruptivními a dislokačními brekciemi. Z autorů uvedených kromě malé zmínky Foullonovy, žádný nepostřehl souvislosti mezi efusivní massou a rojem žilných vyvřelin v podzemí.

Novější dobou otevřen byl čedič dvěma velikými lomy v části severní (záp. od cô 410) a jižní (JV od cô 406), jež poskytují dosti dobrý přehled o této erupci. Čedič prorazil tu vrstvy několika útvarů (obr. 1). Pod křídovými opukami uloženy jsou slepence a pískovce spodnokřídové, dále pískovce a slepence permské a karbonské, jež místy vystupují na den a pod těmi patrně spility a algonkické břidle, jichž drobné úlomky čedič místy vynesl na povrch. Opuky jsou bělavě šedé, tence břidličnaté, téměř horizontálně uložené. Ve výbruse patrno je jemné zrno i bohatý obsah vápenitohlinitý. Spodnokřídové sedimenty jsou homomiktní slepence a pískovce s místní příměsí muskovitu, jichž snadná drobivost a rozpadavost dala vznik četným a mocným vrstvám hlin. Tmelem jest žlutá hlinitá hmota větráním hnědnoucí, kontaktem červenající. Perm zastoupen jest polymiktními slepenci, arkosami a pískovci větrajícími v červenou půdu, karbon arkosami. Kontaktní účinky na sedimenty jsou, jak u efusivních hornin obvyklo, celkem malé. Křídové a permské usazeniny jsou v bezprostřední blízkosti čediče vyzdviženy a kontaktem metamorfovány blízko styčné plochy tak, že opuka změněna v jemnozrnnou směs vápence, křemene a nezřetelných silikátů struktury panalotriomorfně zrnité, muskovitický pískovec vypálen do tmavočervena tak, že ve výbruse jsou křemeny částečně sesklovatělé a spolu se zprohýbanými lupénky muskovitu spečeny hmotou krevelovou.

Vinařická hora má dva nejvyšší vrcholky severní (cô 410) a jižní (cô 406), jež oba odpovídají různým erupcím. Lom v severní části poskytl průřez směru SJ a přehled o erupci této části. Zde střídá se několik proudů s vrstvami tufovými i krami z hlubiny přinesených sedimentů. Tufy složeny jsou z úlomků a kaménků čediče i sedimentů stmelených materiálem zemitým i popelovým, proniklým hmotou železitou neb vápenito-zeolitickou. Efuse čedičové provázeny jsou místy lávami. Jsou to pórovité, modravě šedé ukázky složené z kalného skla, augitu, nefelinu, jichž magnetit oxydován byl v krevel, olivin serpentinisován a dutinky vyplněny vápenci podobnými druhotnými nerosty. Jest tedy tento hřbet výsledkem několikeré erupce, střídající se s násypy tufů. Další proud čedičový vylil se směrem JZ, jiný pak na J směrem k Vinařicům a rozlil se do široka SV sdtud. Ten odkryt byl několika povrchovými lomy S od obce. Vzájemné otáří těchto proudů dá se sledovati nejlépe jen ve svahu Z směrem k Třebichovicím.

Rozpukání čediče v souhlase s proudovým charakterem celé erupce jest deskovité Lavice spodní orientovány jsou někdy téměř kolmo na povrch.

Čedič sám je šedé až modrošedé barvy, velmi jemného zrna, lasturnatého lomu a zřetelně magnetický. Hustota jeho kolísá vzhledem k poněkud měnlivému obsahu magnetitu a nefelinu. Nalezena byla methodou pyknometrickou pro vzorky z různých míst tato čísla: 3·049, 3·072, 3·203, 3·260, průměrem tedy 3·146. Veliká pevnost i tuhost a malá opotřebovatelnost činí jej cenným materiálem k výrobě štěrku i dlažebních kostek. Hanisch[8]) udává maximální pevnost kamene v tlaku na 3448 kg/cm^2 a průměrnou 3159 kg/cm^2 a opotřebovatelnost (po 440 otáčkách a při poloměru desky brusu 25 *cm*) na 12·6 cm^3.

Z nerostů provázejících čedič vinařický zjistil jsem tyto:

Thomsonit, který z této lokality poprvé Kratochvíl[9]) uvádí, tvoří paprsčitě kulovité aggregáty o facetovaném povrchu a průměru 3—4 *cm.* Na příčném lomu projevuje se radiálně paprsčitý sloh tím způsobem, že vnitřní část složena je z koncentrických, bílých, hedvábitě lesklých vláken, vnější zona pak přechází v rovnoběžné aggregáty hrubších krystalků prismatického typu, průhledných a bezbarvých, zakončených párem nízkých vicinálních plošek brachydomatických, jichž úklon, ca $177\frac{1}{2}^0$ poukazuje k tvaru, který Brögger vyčísluje $^1/_{48}P\breve{\infty}$ (0 . 1 . 48) a Luedecke $^1/_{50}P\breve{\infty}$ (0 . 1 . 50). Plochy svislých pinakoidů jsou směry dobré štěpnosti a jelikož vertikála je optickou normálou, bylo možno na štěpném úlomku měřiti mikroskopem přibližný úhel os optických, $2E =$ ca 90^0, při dispersi $\rho < v$. Lom světelný zjistil jsem pomocí oleje kmínového o $n = 1·4924$ a sasafrasového o $n = 1·528$, mezi kterýmižto čísly leží hodnoty vyjadřující krajní indexy jeho lomu. Hustota určená suspensí v acetylentetrabromidu jest 2·379. Dmuchavkou těžko se taví na bílé sklo, rozpouští se úplně v HCl a poskytuje reakce na Al a Ca. Chová zarostlá cizorodá zrnka čirého vápence ($h = 2·707$).

Chabasit tvoří třpytné povlaky pokrývající v rozsahu více cm^2 v hustých druzách droboukých krystalků dutinky a pukliny čediče. Krystalky jsou průměrem nejvýše ½ *mm* dlouhé. Barva jich je bílá neb šedavě bílá, typ obvyklý klencový o velikosti štěpné hrany asi 85^0, plochy nerovné a rýhované. Hustota zjištěna suspensí v acetylentetrabromidu na 2·168, lom světelný jest nízký, nedosahuje ani lomu 1·50.

Dmuchavkou roztápí se těžko na bílé sklo, rozpouští se beze zbytku v kyselině solné a roztok poskytuje reakce na Al a Ca. ·

---

[8]) Prüfungsergebnisse mit natürl. Bausteinen. Vídeň 1912. p. 109.

[9]) Nerosty širšího pražského okolí. Výr. zpráva st. reálky v Praze III. 1912. p. 27.

Vápenec vyskytuje se v několika formách. Tvoří radiálně paprsčité shluky krystalů v dutinách čediče. Jádro bývá tvořeno jemnozrnnou žlutohnědou hmotou, přechází ponenáhlu v bílé agregáty bezbarvých krystalů vápencových, omezených tvarem $-\frac{1}{2}R\,(01\bar{1}2)$, o velikosti asi 1 *cm*. Krystalisačním centrem shluku bývá jako mák veliká kulička sferosideritu, koncentrického miskovitého slohu. Jinak tvoří výplně puklin, jakožto agregát bledězelených, perleťově lesklých, nepravidelně se křížících a zprohýbaných lístků, upomínajících spíše na hmotu prehnitu neb delessitu podobnou. Jindy pak drusami krystalů pokrývá stěny puklin a dutin horniny a i tu jeví se tendence po sestavování paprsčitých skupin. Vápenec tvoří dále hnědé neb nazelenalé drusy v koule sestavené, tvořené krystaly omezenými $-\frac{1}{2}R\,(01\bar{1}2)$; hnědá barva jich způsobena jest příměsí železa, zelená manganu. Analyticky nalezené množství MnO jest 1·72%. V tufech se vyskytují hlízovité shluky paprsčitého slohu, velikosti až pěsti, splývající v útvary velké cicváry připomínající. Šedozelený vápenec tento je rovněž velmi bohat manganem a znečištěn hojným Al i Fe. Hlízovité shluky jsou povlečeny na povrchu bílou práškovitou korou. Kde vyskytují se větší krystaly, jsou plochy jich pravidlem tabulkovány hypoparalelním srůstem.

Vápenec uzavírá neb v drusových dutinách hostí drobná zrnka, neb krychlové krystalky *pyritu* někdy kovově nabíhajícího. Ten mění se v hnědavou hmotu limonitickou, rezavě barvící okolí. Produktem jeho přeměněny jsou též oranžové a hnědé kupky kryjící stěny některých krystalů vápence neb drusové dutinky a připomínající asi *kastanit.*

Natrolit jest poměrně vzácný. Na stěnách brekcie čedičové s přimíšenými úlomky opukovými tvoří povlaky a vrstvy až 2 *cm* silné, bělostné barvy, hedvábitě třpytného lomu, zrnitého slohu, hustoty 2·215. Některé povlaky zdobeny jsou hustými, jehličkovými až vláskovitými krystalky tvořícími menší paprsčité shluky, Druzy natrolitu dosahují až 1 *dm* rozsahu, krystalky až 1 *cm* délky. Hustota krystalků jest 2·239.

Mikroskopicky možno konstatovati augit, nefelin, olivin, magnetit, biotit, velmi skrovný pyrit a stopy hmoty hauynu a sodalitu.

Augit je ponejvíce drobný, průměrné velikosti $0{\cdot}5 \times 0{\cdot}1$ *mm* a jest četnými přechody spojen s drobnými jedinci generace druhé. Krystaly více *mm* jsou vzácností. Jsou průřezu 6 neb 8bokého, a jen zřídka možno zjistiti srůst dvojčatný dle orthopinakoidu neb dle tohoto zákona vsunutou lamelu. Pleochroismus jest jedva patrný (ton žlutohnědý až šedohnědý), úhel shášení štěpných lamel 46°. Jen veliké krystaly jsou struovány zonárně a kromě magnetitu neuzavírá žádných vrostlic. Augit je hlavní součástí horniny a tvoří až i $^2/_3$ její hmoty.

Nefelinu jest asi polovina oproti augitu, jakž obyčejně bývá tam, kde je pyroxen starší. Proto dosti zřídka tvoří krátké sloupečky, za to často pojivo mezi krystalky augitovými a výplně větších mezer, jimž Bořický dal název hmoty nefelinitoidní. Isotropní průřezy, v nichž Bořický spatřuje leucit, dají se rozpoznati jakožto nefeliny blízko base sříznuté. V hmotě nefelinové uzavřeny jsou hojné jehličky apatitu, z části krystalky pyroxenu a snad i něco aegirinu.

Olivin náleží převětšině jen intratelurické generaci. Čiré a bezbarvé krystaly jeho jsou typu krátce sloupcovitého, až 2 *mm* dlouhé. Větrajíce mění se v serpentin nahloučený po obvodě a štěpných puklinách a nepravidelných trhlinách. Jelikož při tom vzniká jen málo neb žádné rudy železné, možno souditi, že olivin blíží se extremu forsteritovému.

Magnetit tvoří většinou drobné krystalky rovnoměrně promíšené v hornině. K němu přidružuje se dosti *ilmenitu*, jenž jen někdy může býti rozlišen, i trochu *pyritu*. Magnetitu patří dále i velké krystaly kostrovitého vývoje složené z paralelních, krychlově orientovaných vrstev.

Biotit je vzácný a tvoří jen velmi drobné lístečky, objevující se ve společnosti nefelinových shluků.

Tamtéž nálézáme i sledy hmoty *hauynové* a *sodalitové*. Množství SO_3 resp. Cl nalezené analysou vede k 1·76% hauynu (o směsi $Na_3CaAl_3Si_3O_{12} . SO_4$) a 4·95$^0/_0$ sodalitu (vypočteno pro vzorec Clarkův $Na_5Al_4Si_4O_{16}Cl$). Skutečný podíl sodalitu jest asi menší, jelikož část Cl připadá apatitu, jehož jest asi 3·23% s obsahem asi 0·16% Cl (vedle F), čímž podíl hmoty sodalitové klesl by na polovinu. Jak uvedeno, chybí hornině leucit, a obsah K_2O možno všechen přičísti nefelinu, neboť nefeliny pravidlem mají Na_2O asi do $^1/_4$ zastoupeno draslíkem.[10]

Na přítomnost někdejšího *basaltického amfibolu* lze souditi ze směsice hmoty nefelinu, magnetitu a augitu, jež zbývá po jeho resorpci a z obrysů naznačených tmavým rámcem tvořeným hustě nakupenými lištičkami pyroxenu a rudami.

Nerostná skladba horniny mění se poněkud vzhledem na komplikovanou skladbu celé erupce. Ukázky z lomu S od Vinařic mají více olivinu, méně nefelinu než ony z cô. 406, vzorky z míst severnějších mívají celkem více augitu i leckde slabou příměs skla, nefelinem nejbohatší jsou vzorky z cô. 410, odkudž patrně i preparát Bořického pochází.

Strukturu horniny možno označiti za holokrystalicky porfyrickou, při čemž porfyricky vyloučené součástky nedosahují ani velikého počtu ani velikosti. V tom spočívá též anamesitický ráz celé horniny.

Jelikož hornina naše nebyla dosud zkoumána chemicky, vybral jsem z lomu SV od Vinařic vzorek jemnozrné tmavošedé horniny k tomuto účelu.

Chemický rozbor horniny vykonal asistent p. ing. chem. Jos. Kavina za vedení p. Dra J. Šplíchala. Čísla uvedená jsou průměrem dvou dobře se shodujících analys.

---

[10] Hintze, Handbuch d. Mineralogie II. p. 868.

Výsledek analysy jest tento:

SiO_2	39·39%
TiO_2	3·48
Al_2O_3	10·55
Fe_2O_3	8·15
FeO	7·81
MnO	0·51
CaO	11·95
MgO	9·00
Na_2O	5·54
K_2O	0·78
H_2O	1·02
H_2O hygr	0·06
S	0·18
SO_3	0·25
Cl	0·28
P_2O_5	1·34
Součet	100·29%
h	3·064.

Povšimnutí zasluhuje nízký obsah Al_2O_3, přibližná rovnováha kysličníků dvojmocných kovů i dosti značný podíl TiO_2. Tento způsoben jest přítomností ilmenitu, kdežto augit zdá se prostým titanu. Získaná čísla připomínají analysy nefelinických čedičů neb některých limburgitů. Pokud se týče prvých, bývá obsah SiO_2 kol 40%, avšak podíl Al_2O_3 bývá vyšší a tam, kde rovná se podílu v hornině naší, bývá opětně vyšší obsah MgO a CaO než v případě našem a sice hlavně na úkor alkalií. Melilitické basalty podobají se naší hornině stejnou aciditou i obsahem Al_2O_3, mají však téměř vždy více MgO než CaO a méně alkalií. Limburgity pak mívají více Al_2O_3 a méně Fe_2O_3 než hornina naše. Poměry tyto lépe vyniknou diskusí analysy po propočtení methodou *Osannovou.*

Redukcí analysy vynecháním vedlejších součástí (I.), vypočtením molekulárních procent (II.) a přepočtením jich na 100 (III.) získáme čísla:

	I.	II.	III.
SiO_2	40·89	68·15	42·27
TiO_2	3·61	4·15	2·57
Al_2O_3	10·95	10·74	6·66
FeO	15·72	21·83	13·54
MnO	0·53	0·75	0·47
CaO	12·40	22·14	13·73
MgO	9·34	23·35	14·48
Na_2O	5·75	9·27	5·75
K_2O	0·81	0·86	0·53
Součet	100·00	161·24	100·00.

Z těchto odvozené hodnoty:

$$s = 44{\cdot}84,\ A = 6{\cdot}28,\ C = 0{\cdot}38,\ F = 41{\cdot}84,\ n = 9{\cdot}22$$

vedou k vzorci:

$$s_{44{\cdot}04}\ a_{2{\cdot}60}\ c_{0{\cdot}16}\ f_{17{\cdot}24}\ n_{9{\cdot}22}$$

zkráceně

$$s_{45}\ a_{2{\cdot}6}\ c_0\ f_{17}\ n_9.$$

Koëficient kyseliny křemičité $K = 0{\cdot}56$; číslo $m = 6{\cdot}75$, patří tedy hornina tato řadě φ.

Z poměru Al_2O_3 k alkaliím i CaO plyne, že hornina patří k horninám nasyceným aluminiem, u nichž mimo to poměr Al_2O_3 k alkaliím je téměř rovnovážný; veliká převaha Na_2O nad K_2O jeví se v hodnotě n i přísluší analysovaná hornina řadě α.

Vinařická hornina nejblíže stojí nefelinickému čediči z Ptačího pohoří (loc. Meiches) o magmatické formuli:

$$s_{43{\cdot}47}\ a_2\ c_0\ f_{18}\ n_{8{\cdot}5}\ (\alpha),$$

patřící typu Käsegrotte o vzorci:

$$s_{44}\ a_2\ c_1\ f_{17}.$$

Jiné přiblížení prozrazuje se k limburgitům, na př. k limburgitu z Beuelsbergu v Porýní o vzorci

$$s_{47{\cdot}9}\ a_2\ c_{0{\cdot}5}\ f_{17{\cdot}5}\ n_{8{\cdot}5}\ (\alpha),$$

patřící typu Hutberg o typovém vzorci:

$$s_{47}\ a_2\ c_1\ f_{17}\ n_{8{\cdot}5}.$$

Z ostatních příbuzných hornin nejbližšími jsou pouze melilitické čediče, na př. nefelinický melilitický čedič z Raudenu (Hegau) o vzorci:

$$s_{43{\cdot}66}\ a_2\ c_{0{\cdot}5}\ f_{17{\cdot}5}\ n_{7{\cdot}8}\ (\alpha)$$

a stejném koëficientu acidity 0·56.

Dle rozpočítání analysy podle Loevinson-Lessingova návodu vyplývá pro horninu naši magmatický vzorec:

$$6{\cdot}7\ RO\ .\ 1{\cdot}6\ R_2O_3\ .\ 7{\cdot}2\ SiO_2$$

$$4{\cdot}2\ RO\ .\ R_2O_3\ .\ 4{\cdot}5\ SiO_2$$

$$R_2O : RO = 1 : 5{\cdot}7$$

koëficient acidity $\alpha\ 1{\cdot}3 =$, koëficient $\beta = 115$.

Dle hodnot těchto padá i tu analysovaná hornina v příbuzenství nefelinických čedičů a limburgitů.

Vlastnosti chemické i minerální skladba vedou tedy k závěru, že vinařická hornina jest nefelinickým čedičem s obsahem olivinu, blízkým limburgitům. Horninu lze nazvati *anamesitickým limburgickým čedičem nefelinickým.* Podobné typy z Čech popsal již Bořický[11]) z Nového Města, Mšena, Sedlce a Chlomku, Zahálka[12]) z Homole u Řepína a j., nověji pak H. Braunová[13]) z Buchbergu u Malé Jizery. Analysa jí provedená (I) velmi se podobá naší (II), jak patrno ze srovnání obou rozborů přepočtených na 100 po vynechání vedlejších součástí a převodu Fe_2O_3 na FeO:

	I.	II.
SiO_2	40·96	40·89
TiO_2	2·80	3·61
Al_2O_3	14·24	10·95
FeO	14·14	15·72
MnO	—	0·53
CaO	11·90	12·40
MgO	11·15	9·34
Na_2O	3·35	5·75
K_2O	1·45	0·85.

Jistý rozdíl patrný jest pouze v obsahu MgO a s ním v obvyklé protiváze stojícího Al_2O_3. Rozdíl tento způsoben jest velikými vrostlicemi olivinu v čediči z Buchbergu.

Mineralogicko-petrografický ústav
vysokého učení technického v Praze.

---

[11]) l. c. p. 61, 62.
[12]) Věstník král. Spol. nauk 1905. III. p. 11.
[13]) Lotos LXV. 1917. p. 1.

ROČNÍK XXX. TŘÍDA II. ČÍSLO 49.

Tektonické studie od Březiny sev. od Rokycan.

Podává

Dr. Radim Kettner v Praze.

(Se 4 vyobrazeními v textu.)

(Předloženo dne 18. listopadu 1921.)

Okolí rokycanské náleží tektonicky k oněm částem Barrandienu, v nichž účinky hlavní fáze variského vrásnění se jeví u porovnání s jinými částmi jen měrou nepatrnou, jež však prostoupeny jsou nesmírně četnými dislokacemi, zejména příčnými, rozdrobivšími celý terén v řadu drobných i větších ker nepravidelně omezených. Přihlížíme-li ke stupňům silurským, jež na Rokycansku jsou zastoupeny ($d\,\alpha$, $d\,\beta$, $d\,\gamma$ a $d\,\delta$), jsou vrstvy jen mírně zvlněny do vrás mělkých a široké amplitudy, řídících se v celku směrem vsv-zjz (h. 4—5); pozorujeme tu však též hojné odchylky od tohoto normálního směru. Tak na *Ejpovicku* převládá směr v-z, ve skupině *Čiliny* pak dokonce zsz-vjv. Tento směr dostavuje se též mezi *Borkem* a *Volduchy* a. j. Veliké nepravidelnosti ve směru vrstevním charakterisují zvl. křemencové pohoří *Plecháče* a skupinu *Radečskou*. Příčinou všech těchto abnormit jsou po mém soudu *pozdější dislokace příčné*, jimiž vrásové pruhy byly rozděleny ve kry a lokálně *vzpříčeny* neb *stočeny*.

Území algonkické, rozkládající se v sz Rokycansku severně a západně od terénu spodnosilurského, vyznačuje se poměry zcela odchylnými od oblasti silurské. Jest sice prostoupeno stejně příčnými zlomy, jako území silurské, avšak směr vrstev jest tu většinou zcela jiný. Obyčejně jdou zde vrstvy od ssz k jjv (úklon skoro vesměs k vých.), podobně jako na blízkém *Radnicku*, jehož jest *algonkické Rokycansko* vlastně pokračováním. Jen podřízeně objevuje se též směr sv-jz (úkl. k jv), jako jinde v Barrandienu, a to obyčejně v úzkých pruzích na delší vzdálenost sledovatelných. Takovým pruhem jest na př. pásmo buližníkové táhnoucí se od ohybu Klabavky u *Kyšic* přes *Kokocko* a *Přeltov* k *Březině*. Severně i jižně takových pruhů převládá opětně směr ssz.[1])

---

[1]) O algonkiu sz. Rokycanska srv. R. a M. Kettnerovi: O granodioritových a porfyrových intrusích na Rokycansku; Rozpravy Čes. Akad. 1917.

Co jest příčinou tohoto zvláštního směru algonkických vrstev na Rokycansku a Radnicku, není dosud s naprostou určitostí vyzkoumáno. Těžko lze si představati, že by tento směr byl algonkickým komplexům vtištěn *až později* vzpříčením ker při vzniku příčných dislokací podobně, jak měli jsme za to u vrstev silurských. Spíše jest pravděpodobno, že ve směru ssz značí se stopy *původního směru algonkických vrstev*, jejž měly před početím variského vrásnění. Snad pochází tento směr z dob *vrásnění předkambrického*,[2]) jemuž byly vrstvy algonkické na Rokycansku určitě podrobeny. Pruhy vrstev sv-jz směrem probíhajících, od vrstev ssz nesporně oddělené dislokacemi sv-jz směru, mohly by snad odpovídati účinkům, jež způsobeny byly v terénu algonkickém hlavní fází variského vrásnění.

Mírné zvrásnění silurských komplexů na Rokycansku má tyto dvě své hlavní příčiny:

Drabovské křemence vyvinuté z nadloží poměrně slabých břidlic osecko-kváňských a eulomových břidlic dosahují na Rokycansku dosti značné mocnosti a skládají se při tom z lavic až 5 *m* mocných, tvořených jednolitou hmotou křemencovou. Lavice takové kladly vrásnícímu tlaku asi značný odpor, nesnadno se asi pro svou křehkost vrásnily, a když, tedy vždy jen do vrás velmi mělkých. Spíše hned na počátku tříštily se ve plástve směrem vrásových pruhů protáhlé, které se pod vlivem vrásnícího (tangenciálního) tlaku přes sebe přesmykovaly podle příkře k jihu spadajících dislokačních ploch.

Druhou hlavní příčinou mírného zvrásnění rokycanského siluru byl asi *podklad algonkický*, již před početím horotvorného procesu variského zvrásněný, a to na Rokycansku a Radnicku asi ve směru ssz, tedy ve směru kolmém na směr působení tlaku variského vrásnění. Tento zvrásněný podklad algonkický, v nevelké hloubce pod uloženinami silurskými vystupující (kambrium a $d\,\alpha$ z největší části na Rokycansku scházejí!) choval se vůči vrásnícímu tlaku variskému jako *pevná tabule, nového zvrásnění těžko schopná*[3]). Břidlice eulomové a osecko-kváňské, v nejbližším Rokycansku tak široké plochy zabírající, nacházely se tedy mezi dvěma nepodajnými komplexy (algonkiem a křemenci $d\,\delta$), i tvoří proto jen mělké, široké vrásy.

Jelikož pevný podklad algonkický reagoval na vrásnící tlak variský spíše *vznikem puklin* kolmých na směr působení tlaku, podle nichž dály se pak jednostranné zdvihy (přesmyky), pozorujeme i v mírně zvrásněném siluru hojnost *podélných* dislokací rázu přesmykového. K hlavním takovým přesmykům náležejí na Rokycansku dislokace na sev. okraji *Kotle* a *Žďáru*,[4]) přesmyk *borecký*,[5]) dislokace na sz straně *Vydřiduchu*,[5]) přesmyk *osecko-voldušský*[5]) běžící údolím mezi *Chlumem* a *Plecháčem* přes samotu *Habr* k *Těžkovu*, dále četné drobnější směrné dislokace v křemencové skupině *Plecháče*, na *Chlumu* u *Volduch* a j. — Vedle podélných přesmyků existují na Rokycansku pravděpodobně též *podélné poklesy*, tak zejména v pohoří *Plecháče*.

---

[2]) Téhož názoru jsou i pp. prof. Cyr. Purkyně a Dr. Fr. Slavík.

[3]) Srv. Cyr. Purkyně: Nástin tektoniky Třemošenského pohoří mezi Strašicemi a Rokycany, Rozpravy Čes. Akad. 1915, str. 12.

[4]) Srv. Cyr. Purkyně: Kambrium mezi Plzencem a Žďárem u Rokycan, Sborník měst. histor. musea v Plzni III. 1914 a l. c. [3]).

Zvláštního rázu jsou na Rokycansku *dislokace příčné*. Kdežto jinde v Barrandienu udály se podle nich většinou posuny horizontální neb zdvihy vedoucí ku zmenšení prostoru („*příčné přesmyky*“)[6]) a jen zřídka docházelo k pravým poklesům (hlavně u dislokací vysloveně *požulových*),[7]) jsou příčné dislokace rokycanského okolí podle mého názoru většinou *pravými poklesy*. Udály se zde tedy na dislokacích příčných hlavně pohyby radiální vedoucí nikoliv ke zmenšení, nýbrž ke *zvětšení* prostoru. Pohyby takové vznikají tam, kde panuje v kůře zemské *tah* a s ním spojené *tříštění* vrstev, a k těmto oblastem náleží v Barrandienu právě Rokycansko. Nejlépe illustrují povahu příčných dislokací na Rokycansku poměry ve *štole Kristiánově u Klabavy*, kdež rudní ložisko nejspodnějšího $d\gamma$ rozděleno jest třemi dislokacemi ve 4 části.[8]) Kdežto vrstvy silurské jsou zde skloněny k jz, zapadají dislokace v *Kristiánce* k sv. Doplníme-li si podle nich obraz silurských vrstev, jak vypadaly před dislokováním, obdržíme rozměry *užší*, než-li jsou dnes — po dislokování. Též abnormální směr vrstev vyvinutý u siluru j. od *Klabavy* (sz-jv) a zračící se nejlépe na křemencové *Čilině* bude asi podmíněn tříštěním kůry zemské, při němž byly kry ze svého původního směru značně pootočeny resp. vzpříčeny.

Předchozí řádky, v nichž v krátkosti jsem shrnul své poznatky o tektonice Rokycanska, bylo nutno předeslati, aby bylo správně porozuměno poměrům, jež v této zprávě mají býti popsány. Tříštivé pohyby vyvolaly největší a nejčastější poruchy obyčejně ve vrstevních komplexech křehkých a těmi jsou ovšem na Rokycansku křemence drabovské, o jichž zvláštní povaze jsme se již výše zmínili. Vedle *Čiliny* vystupují účinky tříštivých pohybů nejpatrněji v křemencové *skupině radečské* a v sousedním pohoří *Plecháče*. Bohužel však hustý porost lesní a nekonečná ssuť tvořící se ze skal kvarcitových velice stěžují výzkumy v těchto oblastech, pro pochopení celkové tektonické stavby Barrandienu tak důležitých. Při tektonických studiích v této krajině jsme obyčejně odkázáni *na morfo-*

---

[5]) Srv. R. Kettner: Příspěvek k poznání stratigrafie vrstev komárovských a osecko-kváňských. Rozpravy Čes. Akad. 1917.

[6]) Srv. Odolen Kodym: Tektonické studie v údolí prokopském, Rozpravy Čes. Akad. 1918.

[7]) R. Kettner: Jahrbuch d. k. k. geol. Reichsanstalt Wien, 1917., str. 258 a násl.

[8]) M. V. Lipold: Die Eisensteinlager der silurischen Grauwackenformation in Böhmen, Jahrb. d. k. k. geol. R.-A., 1863, str. 408, obr. 25.

logické utváření krajinné, v němž zračí se výrazně složitá tektonika křemencových pohoří.

Nejlepšího pohledu do stavby těchto částí Barrandienu poskytuje nám *záp. okraj Plecháče*, a to specielně nejbližší okolí *Březiny* sev. od Rokycan, kdež končí lesní porost a kde jest i hojnost umělých odkrývek, zejména zbytků po pracích hornických. Zvláštní náhodou nahromadila se na tomto okraji i taková spousta dislokací podélných, příčných i diagonálních, jakou nalézáme jen málokde jinde ve stř. Čechách. Tím stává se okolí *Březiny* jedním z tektonicky nejzajímavějších míst Barrandienu. Ve zprávě této chci podati podrobný popis tektonických poměrů nejbližšího okolí obce *Březiny*, kdež jsem od r. 1913 vícekráte konal detailní studia stratigrafická a tektonická, zvl. r. 1916, kdy zahájeny zde byly firmou C. T. Petzold a spol. pokusy kutací.

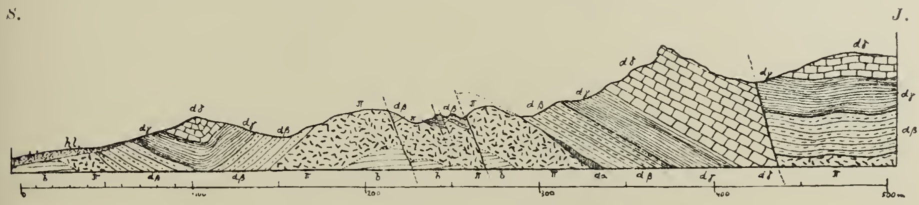
Obec *Březina* leží na sz úpatí pohoří *Plecháče* při silnici vedoucí z *Rokycan* přes *Osek* do *Radnic*. Cele severní, západní a jihozáp. okolí její tvořeno jest břidlicemi algonkickými a zdá se, že i velká část obce leží již na algonkiu. Většinou však jsou algonkické vrstvy pokryty mohutným nánosem svahových hlin a ssuti, obsahujících hlavně úlomky z křemenců drabovských. Algonkium vystupuje ze ssuti na několika místech sev. od vsi a má zde směr ssv-jjz až s-j s úklonem 30° k vých., pak j. o *Březiny* zejména u silnice osecké. Zde možno zjistiti charakteristický směr radnického okolí: ssz-jjv, úkl. 30° k v. Asi 1 *km* na záp. od *Březiny* končí buližníkové pásmo *přeltovské* vyznačující se směrem sv-jz. Ukončení jeho je pravděpodobně tektonické odpovídajíc veliké příčné poruše ssz směru.

Ostatek nejbližšího okolí *Březiny* jest zabrán vrstvami spodního siluru, z nichž zvl. tvrdé křemence drabovské se nejnápadněji uplatňují budujíce význačné hřbety a kamýky v pohoří *Plecháče*. Zvláště výhodně od *Březiny*, počínajíc zříceninou u březinského zámku táhne se imposantní pásmo křemencové s nejvyšším bodem *Hradištěm* (kota 619), odkud otvírá se pohled široko daleko na jednotvárnou planinu západočeského algonkia.

Na obvodě křemencového pohoří *Plecháče* potkáváme se na mnoha místech s vrstvami tvořícími podloží křemencům drabovským. Nejčastěji jsou to černé slídnaté břidlice osecko-kváňské ($d\,\gamma$) a železité pásmo komárovské representované hlavně krevelovými rudami. Vrstvy krušnohorské ($d\,\alpha$) na největší části podkladu *Plecháče* asi scházejí, a tam, kde jsou vyvinuty, tvořeny jsou jen spodním svým oddílem (slepenci a třenickými vrstvami). Kambrické sedimenty scházejí v podkladu *Plecháče* veskrze, i jest tedy podložím spodnosilurských uloženin většinou algonkium.

Pohoří *Plecháče* a specielně nejbližší okolí *Březiny* jest důležitým místem pro stratigrafii Barrandienu potud, že podstatně přispělo při řešení *otázky stáří vyvřelin křivoklátsko-rokycanského pásma*. Na záp. okraji *Plecháče* vystupují totiž v podloží pásma $d\,\beta$ namnoze tmavofialové celistvé vyvřeliny zcela shodné s porfyrity (felsofyrity a keratofyry) pásma křivoklátsko-rokycanského. Klasickým místem stal se lom v *Turkovně* (1 *km* j. od Březiny), kde v nadloží tmavých felsofyritů objeveny byly *zelené tufovité brekcie porfyrové,* horniny obsahující veliké kusy sytě zelených celistvých slíd (rozloženého to skla). V těchto celistvých slídách nutno hledati nesporný původ zrnek z úlomečků celistvé zelenavé slídové hmoty v sedimentech pásma krušnohorského (*d* α) dříve nesprávně vykládaných za glaukonit. Podrobně o tom pojednávám ve svých pracích o krušnohorských vrstvách a o kambrických vyvřelinách v Barrandienu,[9]) i odkazuji zde na své dřívější vývody.

Nejbližší jižní sousedství *Březiny* mezi obcí a lesem, v okolí nápadné křemencové skalky (kota 556), která celému širému obvodu vévodí, jest důležitým místem někdejších čilých prací hornických. Bezprostředně u vsi nacházela se stará díla Šternberská, poněkud jižněji pak díla erární z let 50—60tých min. stol., o nichž M. V. Lipold[10]) se zmiňuje ve svém výborném spisu o železných rudách silurských. Dnes se zde již arci dávno nepracuje, vzdor tomu ale nalézáme zde ve starých obvalech a jamách, jež tu zbyly, tolik odkrývek, že na základě jich můžeme sestrojiti detailní zajímavý profil geologický (srv. obr. 1 v textu).



Obr. 1. *Profil z jižního konce Březiny a starými obvaly Šternberských hornických prací.* (*b* = algonkium, π = kambrické porfyrity, *d* α = vrstvy krušnohorské, *d* β = pásmo komárovské, *d* γ = břidlice osecko-kváňské, *d* δ = křemence drabovské, *hl.* = hlína a ssuť).

Křemencová skalka 556, o níž jsme se právě zmínili, budována jest lavicemi křemencovými vsv směru (h. 5) a ukloněnými pod úhlem 50° k j. Stará díla rozkládají se vesměs severně od této skalky. V podloží k jihu zapadajících křemenců vidíme ve starých jamách vystupovati nejprve černé jemně slídnaté břidlice osecko-kváňské s malými tvrdými kuličkami a pod těmito pak oolithické krevely a břidlice s oolithy pásma komárovského (*d* β). Pásmo toto spočívá přímo na temně fialových, zhusta brekciovitých celistvých porfyritech křivoklátsko-rokycanské vyvřelé formace,[11]) které se tu mírně nad své okolí zvedají a oddělují tak posléze jmenovanou rudní partii pásma *d* β od rudních partií dalších. Porfyritové spousty tvoří v celku antiklinálu, jejíž vrchol jest několika směrnými dislokacemi porušen a uzavírá v sobě oddělenou malou rudní partii pásma *d* β, která byla tu předmětem patrně povrchového dobývání a z níž vidíme ještě dnes zachovaný veliký pilíř rudní. Částečně zde tato rudní partie do porfyritů vklesla, částečně byly porfyrity přes ni přesmyknuty.

---

[9]) R. Kettner: Příspěvek k petrografii vrstev krušnohorských I. a II. Rozpravy Čes. Akad. 1916 a O kambrických vyvřelinách v Barrandienu a jejich poměru k vrstvám krušnohorským. Tamtéž 1916.

[10]) M. V. Lipold l. c.[8]) str. 401—403.

[11]) Srv. R. Kettner: O Kambr. vyvřelinách v Barrandienu etc. str. 7-8 a 28.

Zachovaný rudní pilíř nám ukazuje, že pásmo komárovské spočívá zde přímo na porfyritech. Porfyrity vyznačují se v podloží rudním kulovitou odlučností. Podle nádherného odkryvu, jejž nám pilíř poskytuje, skládá se pásmo komárovské u *Březiny* na spodu z pěkného seménkového krevele, jenž k nadloží přechází do žlutavých neb žlutošedých břidlic s oolithy jednak krevelovými jednak myelinovými.[12] Na haldách v sousedství pilíře nalezneme jednak kusy *třenických drob* pásma krušnohorského (*d* α),[13] jednak zajímavé *lumachelly brachiopodové*: železité to droby s příměsí krevelových oolithů a se spoustou drobných úlomků brachiopodových skořápek (patrně od *Obolella complexa*) složených z isotropního vápenatého fosforečnanu *kolofanitu.*[14] Přímých výchozů na povrchu bohužel nepozorujeme ani u vrstev krušnohorských, ani u brachiopodových lumachell, i musily patrně býti tyto horniny vyvezeny při někdejším dobývání rudním ze štol. K výskytu vrstev krušnohorských poznamenává již Lipold, na str. 402, že v erárním díle u *Březiny* byly dokázány v obvodu rudního lože „*Alois*" stopy jejich mezi uložením rudním a „porfyry". Jinak ale všude spočívá ruda podle Lipolda přímo na „porfyrech" nebo na bělavé, po příp. šedé tufovité hornině přecházející do spodu v porfyrové brekcie. Pod těmito prý následuje všude celistvý „porfyr". Mám za to, že tufovité horniny a porfyrové brekcie Lipoldovy odpovídají asi porfyrovým tufovým brekciím odkrytým v *Turkovně,* celistvé „porfyry" pak porfyritům. Kam připadá ve vrstevním sledu obzor lumachell brachiopodových, zůstane nám bohužel nadále záhadou.

Sledujeme-li dále náš profil, přicházíme za antiklinálou porfyritovou opětně do rudonosného pásma komárovského. To tvoří zde synklinálu, v niž pojaty jsou též břidlice osecko-kváňské (*d* γ) a i křemence drabovské, jež před samou vsí v synklinálním uložení můžeme pozorovati. Břidlice osecko-kváňské i rudonosné pásmo komárovské vycházejí zřetelně na povrch jak jižně, tak i severně od této křemencové skalky bohužel však není nám známo, jaké je zde podloží železitého pásma v severním křídle synklinály. Počínajíť zde mocné uloženiny ssuti a svahových hlin zahalující nám zcela výchozy podložních hornin.

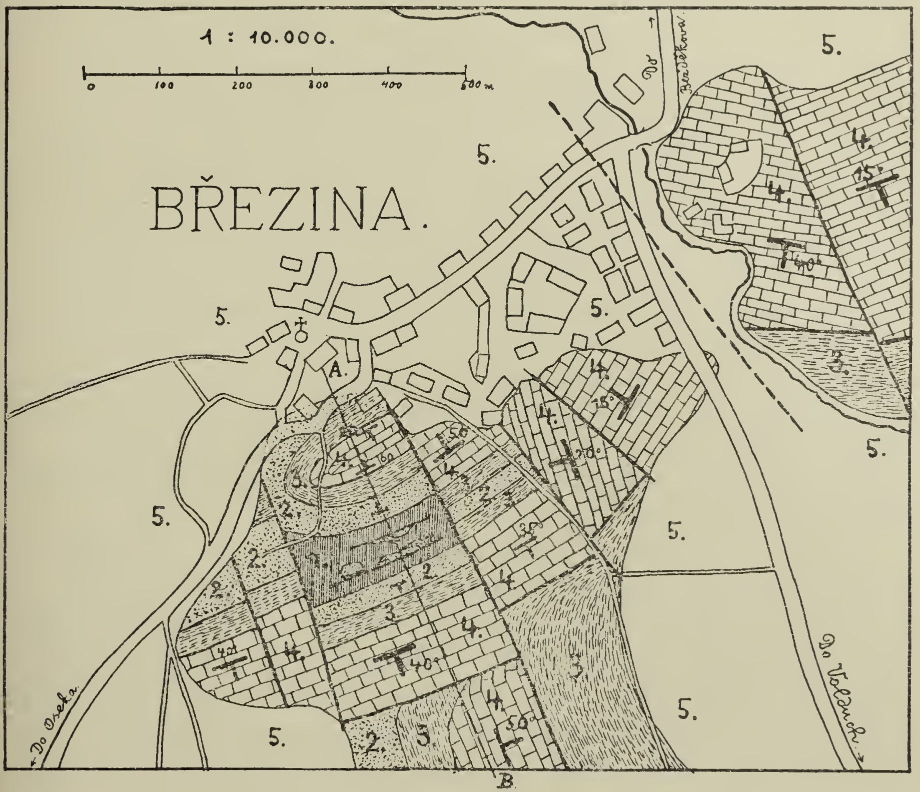
---

[12] L. a Fr. Slavíkovi: Studie o železných rudách čes. spod. siluru, č. II., Rozpravy Čes. Akad. 1917.

[13] R. Kettner: Příspěvek k petrografii vrstev krušnohorských, č. II., str. 9—10.

[14] Popis této horniny viz v práci L. a Fr. Slavíkových, l. c. [12]).

Tím popsali jsme nejúplnější profil, jejž v nejbližším okolí *Březiny* snadno můžeme konstatovati v obvodu starých Šternberských a erárních děl hornických. V místech těchto bude však jistě imponovati každému množství *příčných dislokací,* jež jsou zde hustě na sebe nakupeny a rudonosné pásmo i křemence nadmíru porušují. Podrobně popisovati jich nebudeme, jsou dostatečně patrny z přiložené mapky obr. 2. Nepřihlížíme-li k drobným isolovaným krám křemencovým, bezprostředně u vsi vystupujícím, jsou křemencové skály nejbližšího jižního okolí *Březiny* v celku pokračováním křemencového hřbetu *Hradiště.* Příčné poruchy způsobují, že pokračování to bylo oproti *Hradišti* značně k jihu posunuto. V místech, kde patrný jest nejnápadnější ohyb křemencového pásma, t. j. bezprostředně záp. od březinsko-voldušské silnice, dostavují se abnormální směry vrstev jednotlivých ker: ssv-jjz, úkl. k zsz, nebo ssz-jjv, úkl. zjz. Abnormity tyto podmíněny jsou patrně vzpříčením ker při posunování.



Obr. 2. *Detailní tektonická mapka nejbližšího okolí Březiny.*
(1. = kambrické porfyrity, 2. = pásmo komárovské *d β*, 3. = břidlice osecko-kváňské *d γ*, 4. = křemence drabovské *d δ*, 5. = hlína a ssuť; *A.—B.* = profil znázorněný na obr. 1.)

Odkryvy v již. okolí *Březiny* sahají skoro těsně až k silnici osecko-březinské; dále na západ je vše přikryto ssutí. V místech, kde před samou vsí odbočuje od hlavní silnice polní vozová cesta v levo, bylo v r. 1916 a 1917 hloubeno několik pokusných šachtiček a poblíže bylo i vrtáno na rudu železnou asi do hloubky 64 *m*. Uložení zjištěno bylo zde nejvýš nepravidelné a nikde nebylo dosaženo rudy pásma komárovského. Ve zkusných šachtičkách a překopech od těchto šatiček vedených nalezeny byly většinou břidlice osecko-kváňské, tu a tam s oolithy chamositovými (osecký rudní obzor!),15) a což zajímavo, též diskordantně prorážející žíly žlutavého porfyru zcela shodného s porfyry kyšickými.16) Hlubinné vrtání vedle polní cesty u silnice prováděné vyneslo vrtný profil velmi podivný: nejprve zastiženy byly do hloubky 2— *m* břidlice $d\gamma$, pod nimi 15 *m* křemence drabovské, pod těmito až do hloubky 53 *m* následovaly opětně černé slídnaté břidlice $d\gamma$ a od 55 do 64 m ku podivu opětně křemence $d\gamma$. Kterak si máme tento vrtný profil vyložiti, zůstane nám záhadou. Jisto je jen tolik, že vrstvy u *Březiny* jsou nesmírně porušeny. Patrně bylo vrtání založeno náhodou přímo na dislokační ploše, čímž jedině bylo by lze si vysvětliti, proč tytéž vrstvy byly dvakrát nad sebou zastiženy. Dislokace u *Březiny* pravděpodobně jsou *doprovodem veliké příčné poruchy*, která běží ssz směrem na nejzazším okraji *Plecháče* a mezi *Březinou* a buližníkovým hřbetem *přeltovským* a jež podmiňuje zde jednak styk algonkia se silurem, jednak náhle utíná sv směrem se táhnoucí buližníkový pruh přeltovský.

Hlavní poruchy záp. okraje *Plecháče* neomezují se však toliko *na nejbližší okolí Březiny*, též jižně odtud až k sev. konci *Volduch* potkáváme se s terénem velmi porušeným (srv. obr. 3. a 4.). Tak hned jižně od křemencového kamýku 556 (j. od Březiny) probíhá patrná přesmyková linie vsv směrem, představující nám západní pokračování příčnými dislokacemi březinskými k jihu posunutého přesmyku jižního svahu *Hradiště*. Podle této linie všude byly vyzdviženy osecko-kváňske břidlice nad křemence drabovské.

V lese na záp. okraji *Plecháče* přicházíme jižně od kamýku 556 na skály křemencové označené v mapě 1 : 25.000 nápisem „*Skalka*“. Směr vrstev je tu ku podivu velice abnormální: ssz-jjv až skoro s-j; v podloží křemenců, pod úhlem 50^0 k vých. zapadajících, táhne se na pokraji lesa řada obvalů po někdejších pracích hornických. Podloží pásma rudonosného je tu bohužel zakryto mohutnou ssutí z křemenců drabovských, dle všeho bude však tvořeno asi porfyrity a tufovými porfyrovými brekciemi. Severojižní směr vrstev dá se sledovati k jihu na vzdálenost asi ½ *km*, načež jest přerušen morfologicky význačným hřbetem křemencovým, v němž vrstvy zapadají k jjv (mírně, $10-15^0$). Jest přirozeno, že náhlá změna směru vrstevního, jež se dostavuje, je způsobena opětně dislokací, a to dislokací směru vsv (h. 5). Avšak i východní strana ssz-jjv hřbetu „*Skalky*“ jižně

---

15) Srv. R. Kettner: l c.5).

16) Srv. R. a Ml. Kettnerovi, l. c.1).

od *Březiny,* jest tektonická, jinak bychom si nedovedli vyložiti výskyt břidlic osecko-kváňských připadajících zde zdánlivě do nadloží křemenců drabovských. Porucha mezi oběma stupni běží rovnoběžně se směrem křemenců, tedy ssz směrem a jest jednou z příčných dislokací, jež zasahují do porušeného terénu starých šternbergských děl u *Březiny.* Příčně probíhající křemencový hřbet „*Skalky*“ představuje nám tedy kru se všech stran tektonicky omezenou a patrně vzpříčenou.

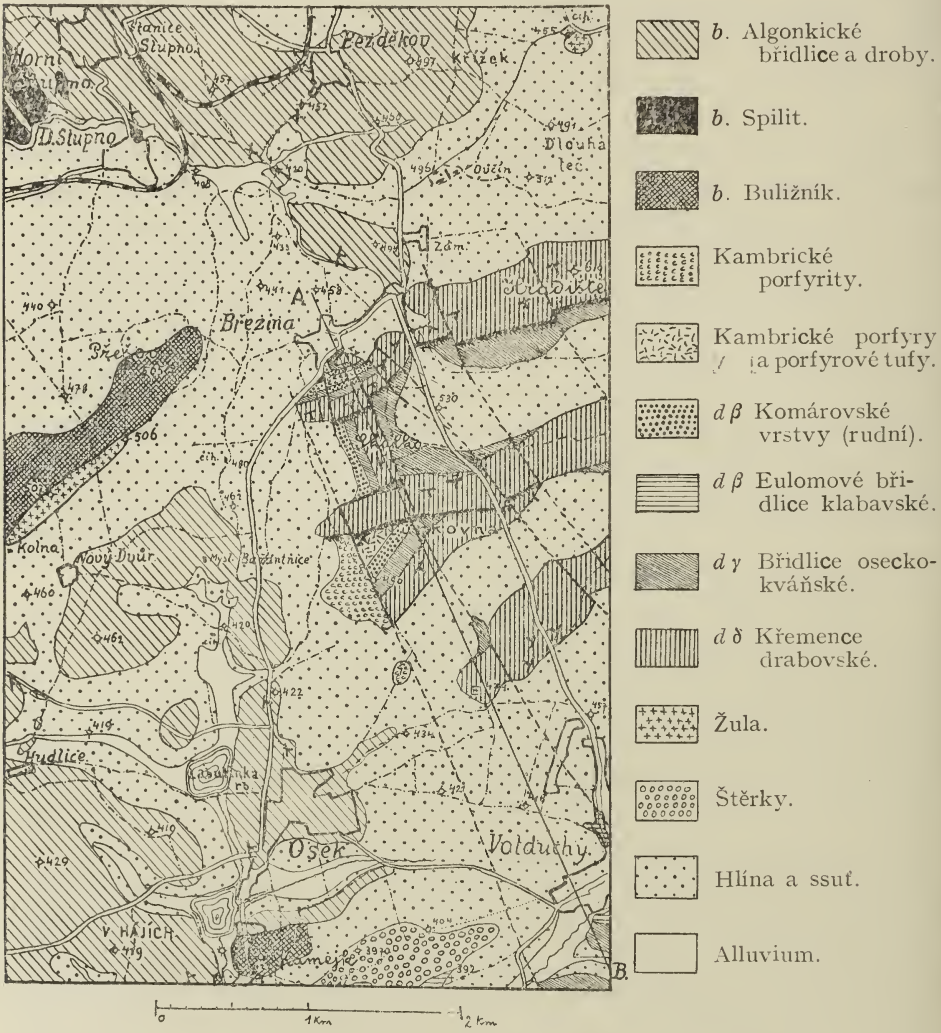
Křemencový hřbet omezující tuto vzpříčenou kru na jihu buduje koty 543 a 577, poblíže koty 558 přestupuje silnici březinsko-voldušskou a pokračuje přes kotu 563 na *Seidlovku* (586). Na západ vybíhá tento hřbet znatelně daleko do polí. Od voldušské silnice na západ skládá se hřbet z křemenců mírně k jjv skloněných (10—15^0) a jest i po jižní straně omezen tektonicky; východně od voldušské silnice, tak zvl. na *Seidlovce,* dostavuje se však dokonalé uložení synklinální a po obou křídlech této křemencové synklinály vystupují břidlice $d\,\gamma$. Výchozy jejich jsou arci pro mohutnou ssuť z křemenců vzácné, byly však na několika místech dokázány ve vývratech jakož i na starých haldách, které tu a tam, snad po pokusech kutacích zbyly. Rozumí se, že i hřbet křemencový táhnoucí se přes *Seidlovku* jest postižen řadou příčných dislokací, z nichž nejdůležitější je ona, která dělí asi část východní o stavbě synklinální od části západní, v níž zachováno jest jen křídlo k jjv zapadající. Dislokace tato běží od *Březiny* asi těsně po východní straně voldušské silnice přes kotu 558 k jjv.

Byl-li v záp. části posléze popsaného křemencového hřbetu směr vrstev h. 5, jest jižně odtud na záp. okraji pohoří *Plecháče* vyvinut směr čistě sv-jz (úklon 35—45^0 k jv). Zde jsme v tak zvané *Turkovně* proslulé svým výskytem tufových porfyrových brekcií v nadloží celistvých felsofyritů. Výskyt tento jest popsán podrobně v mé práci o kambrických vyvřelinách v Barrandienu.[17]) Zdá se, že lomem v *Turkovně* probíhá malý příčný zlom ssz směru, podle něhož tufové porfyrové brekcie poněkud poklesly proti felsofyritům. Nadloží porfyrových brekcií tvořeno jest pásmem komárovským ($d\,\beta$) a to pěkným seménkovým krevelem. Severně od lesního průseku jdoucího zjz směrem od koty 531 na voldušsko-březinské silnici nalézáme v sousedství lomu na porfyrové tufové brekcie v lese několik starých obvalů a jam, svědčících o někdejším dobývání železné rudy v těchto místech. U Lipolda ani jinde v literatuře není o tom zmínky. Křemence drabovské připadající do nadloží tohoto výskytu železných rud otevřeny jsou na zmíněném průseku lomem na štěrk. Směr jejich jest zde čistě sv-jz, úklon 35^0 k jv.

Jižně od tohoto lomu až ke hřbetu *Čihadla* vyčnívajícímu nápadně ze skupiny *Plecháče* směrem k *Oseku* přicházíme pro západní straně březinsko-voldušské silnice k polokruhovité a k jz otevřené kotlině pokryté mohutnou ssutí z křemenců drabovských. Přímého výchozu hornin zde viděti není. Vlastní *Čihadlo* s vrcholem 512 a se svým nejzazším výběžkem 471 na jihozápadě, kdež v dřívějších dobách nacházel se hřbitov,[18]) tvořeno jest křemenci drabovskými o uložení, jak se zdá, synklinálním. Směr vrstev jest zde ale opět jiný, totiž ssv-jjz a lze ho sledovat za březinsko-voldušskou

---

[17]) l. c.[11]), str. 6—7, 23—27.


Horní Stupno
Stanice Stupno
Bezděkov
Křížek
D. Stupno
Dlouhá leč
Ovčín
Zám.
Čihadlo
A
Březina
Plecháč
Kovna
Kolna
Nový Dvůr
Mysl. Bažantnice
Hudlice
Kabáľka
Osek
Valdušky
V Hájích
B.
512
538
506
0
1 Km
2 Km
b. Algonkické břidlice a droby.
b. Spilit.
b. Buližník.
Kambrické porfyrity.
Kambrické porfyry a porfyrové tufy.
d β Komárovské vrstvy (rudní).
d β Eulomové břidlice klabavské.
d γ Břidlice osecko-kváňské.
d δ Křemence drabovské.
Žula.
Štěrky.
Hlína a ssuť.
Alluvium.

silnici až téměř k vlastnímu *Plecháči,* kdež jest přerušen příčnou dislokací. Vlastní hřbet *Plecháče,* jdoucí zde kotou 538, má směr téměř v-z (h. 5½), vrstvy křemencové zapadají pak tu mírně k severu. Po severní straně *Čihadla* nalezneme ve stráni výchozy černých osecko-kváňských břidlic s kuličkami. Kusy drabovských křemenců poblíže těchto výchozů se povalující obsahují zbytky zkamenělin a upomínají na analogické výskyty fossilií v pásmu *d* δ na *Čilině*, *Karýzecké hoře* a j.[19])

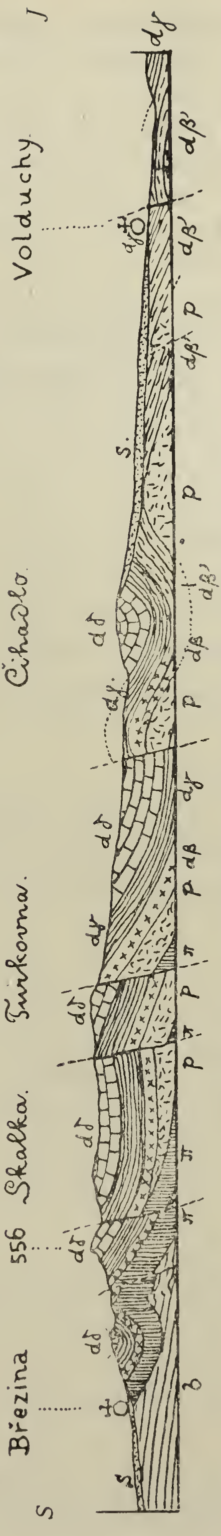
---

[18]) Nyní jest zrušen a není po něm v návrší porostlém mladým lesem ani stopy. Na mapách generál. štábu je však ještě zaznamenán.

Mezi křemencovou synklinálou *Čihadla* a křemenci u *Turkovny* třeba rovněž předpokládati dislokaci, výchoz její jest nám však ssutí zahalen. Jižně od *Čihadla* až po *Volduchy* není odkryvů. Mohutná ssuť a svahové hlíny sahají zde až k *Volduchům*. Na sev. konci *Volduch* v zářezu březinsko-voldušské silnice vystupují *eulomové břidlice* (*d* β). Tektonické poměry jižního okolí *Volduch* vylíčil jsem ve svém příspěvku ke stratigrafii pásem *d* β a *d* γ (l. c.[5]), kdež jsou znázorněny i profily a geologickou mapou.

Pro správné porozumění tektonických poměrů zde popsaných přikládám zde nástin geologické mapy a profil západním okrajem křemencové skupiny *Plecháče* (obr. 3. a 4.).

Vedeme-li si parallelní profil skupinou *Plecháče* poněkud dále východněji, t. j. od *Hradiště* přes *Seidlovku* a *Plecháč* k *Habru*, obdržíme obraz poněkud jednodušší a pravidelnější. V křemencové skupině *Plecháče* opakují se nám tu několikráte pruhy drabovských křemenců a mezi nimi vycházejí na den pruhy břidlic osecko-kváňských. Z podélných poruch, zde profilem proříznutých, náleží dislokace na již. svahu *Hradiště* a dislokace jdoucí údolím od *Volduch* přes *Habr* k *Těžkovu* přesmykům, všecky ostatní jsou buď pravými vrženími, podle nichž dály se pohyby shora dolů a nebo snad i z části přesmyky, jichž dislokační plocha jest skloněna nikoliv kj., nýbrž k severu. V celku vzato, byla křemencová skupina *Plecháče* původně *mělkou pánví*, kterou pozdější podélné dislokace porušily. Nastal tu přesun vrstevní na jižní straně *Hradiště* a došlo i k poklesům neb k protismyslným přesmykům v jižním křídle podle několika podélných puklin. Synklinální ohyb křemenců na *Seidlovce*, odpovídající nejhlubšímu původně místu



Obr. 4. *Profil západním okrajem horské skupiny Plecháče.*
(*b.* = Algonkium, π = porfyrity, *p* = porfyry a porfyrové tufy, *d* β = pásmo komárovské rudní, *d* β' = eulomové břidlice klabavské, *d* γ = břidlice osecko-kváňské, *d* δ = křemence drabovské, *s.* = ssuť a hlína.)

---

[19]) Jako další lokalitu zkamenělin pásma d δ, vyznačenou hojnými zbytky ostracodů a úlomky trilobitů, uvádím Kumberky a sev. svah Hradiště u Březiny směrem ke Dlouhé louce.

křemencové pánve, zaujímá dnes v křemencové skupině *Plecháče* polohu jednu z nejvyšších, i jde tu tedy o tektonický útvar, jejž možno označiti jakožto „*horst*".

Z popisů tektonických poměrů nejbližšího okolí *Březiny* u Rokycan tuto podaných dostatečně poznáváme tektonický ráz silurských území na záp. okraji středočeského staršího paleozoika. Týž stavební plán bude platný i pro sousední *skupinu Radečskou,* v níž křemence drabovské rovněž jsou nesmírně porušeny velmi nepravidelně probíhajícími dislokacemi. Analogické poměry tektonické zjistil též Cyr. Purkyně[20]) v blízkém kambrickém pohoří mezi *Rokycany* a *Strašicemi,* které též jest rozdrobeno v řadu nepravidelných malých ker.

Jaká byla hlavní příčina tohoto rozdrobení křemencových komplexů a od jakých jednoduchých původních útvarů tektonických jest dnešní, tektonicky velmi komplikovaný obraz křemencových skupin západních částí čes. siluru odvoditi, o tom zajisté nám více poví detailní geologická mapa širšího území, než až dosud jest provedena. Zdá se, že v základu převládá ve spodním siluru západního konce silurské pánve stavba *brachysynklinální* a *brachyantiklinální,* tedy mísovitá a klenbovitá, kterou mladší dislokace značně porušily.

Rukopis dokončen v březnu 1918.

Geologický ústav
čes. vys. učení technického v Praze.

---

[20]) l. c.[3]).

O důkazu obecné věty Riemann-Rochovy se stanoviska theorie funkční.

Napsal

Karel Dusl.

(Předloženo dne 6. května 1921.)

Počet libovolných konstant v obecném vyjádření racionálné funkce $R = \lambda_0 + \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \ldots + \lambda_q Z_q$ na ploše Riemannově určuje věta Riemann-Rochova¹). Pišme ji ve tvaru:

$$P - q = p - \delta. \qquad \text{(I)}$$

P znamená počet daných pólů $a_1, a_2, a_3 \ldots$ racionálné funkce, při čemž pól řádu r-tého čítáme za r jednoduchých pólů. Rod plochy Riemannovy jest p. Veličina δ jest t. zv. přebytek²) t. j. počet lineárně nezávislých differenciálů prvního druhu:

$$d\,v = A_1\,d\,v_1 + A_2\,d\,v_2 + \ldots + A_p\,d\,v_p,$$

které v místech $a_1, a_2 \ldots$ mají nullové body a to těchže řádů, jako póly racionálné funkce. Funkce racionálná má pak $q + 1$ nezávislých konstant.

Arithmetická theorie algebraických funkcí vyslovuje větu daleko obecnější³): Jestliže racionálná funkce jest násobkem *lomeného* divisoru D t. j. jestliže jest dáno N nullových bodů $b_1, b_2, b_3 \ldots$ a P pólů $a_1, a_2, a_3 \ldots$, při čemž opět nullový bod, nebo pól řádu r-tého počítáme za r jednoduchých bodů, jest:

$$P - N - q = p - \delta \qquad \text{(II)}$$

při tom δ jest počet lineárně nezávislých differenciálů, které jsou násobky *rovněž lomeného* divisoru $\frac{1}{D}$ t. j. v místech $a_1, a_2, a_3 \ldots$ mají body nullové, v místech $b_1, b_2, b_3 \ldots$ póly a to obé téhož řádu, jako racionálná funkce.

---

¹) Riemann Ges. Werke 1876. Roch Crelle 64.

²) Klein „„Riemannsche Flächen" I., 108 „Überschuß".

³) Hensel-Landsberg: „Theorie der algebraischen Funktionen" p. 301. H. Weyl: „Die Idee der Riemannschen Fläche" 122 a j.

Funkčně theoretický důkaz této věty nevyskytuje se v literatuře, ač jej lze snadno podati. Uvažujme za tím účelem tři případy:

1. Budiž dáno $a_1, a_2, a_3 \ldots . a_p$ jednoduchých pólů⁴) racionálné funkce a v bodě b_1 nechť má funkce racionálná nullový bod prvního řádu. Takovou funkci lze vyjádřiti tvarem:

$$R = \mu_0 + \mu_1 \Gamma_{a_1}^{x,\, c_1} + \mu_2 \Gamma_{a_2}^{x,\, c_2} + \ldots + \mu_p \Gamma_{a_p}^{x,\, c_p}, \tag{1}$$

při čemž $\mu_0, \mu_1 \ldots \mu_p$ jsou konstanty a $\Gamma_{a_1}^{x,\, c_1}$ a t. d. normální integrály druhého druhu s jednoduchými póly v bodech $a_1, a_2, \ldots a_p$. Horní meze jsou libovolné konstantní hodnoty. Aby funkce R byla racionálnou funkcí, musí být splněn systém p rovnic:

$$\mu_1 \left(\frac{\partial v_i^{x,\, c_1}}{\partial x}\right)_{a_1} + \mu_2 \left(\frac{\partial v_i^{x,\, c_2}}{\partial x}\right)_{a_2} + \ldots + \mu_p \left(\frac{\partial v_i^{x,\, c_p}}{\partial x}\right)_{a_p} = 0 \tag{2}$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots p.$$

Při tom znamená $\left(\frac{\partial v_i^{x,\, c_k}}{\partial x}\right)_{a_k}$ derivaci i-ho integrálu prvního druhu v místě a_k.⁵)

Na základě tohoto systému rovnic redukuje se pak počet nezávislých konstant ve smyslu věty Riemann-Rochovy. K těmto p rovnicím přistupuje *ale jedna další*, klademe-li podmínku, aby racionálná funkce měla v bodě b_1 jednoduchý nullový bod. Patrně nejprve:

$$R = \mu_0 + \mu_1 \Gamma_{a_1}^{b_1,\, c_1} + \mu_2 \Gamma_{a_2}^{b_1,\, c_2} + \ldots + \mu_p \Gamma_{a_p}^{b_1,\, c_p} = 0. \tag{3}$$

Racionálná funkce bude mít jistě ještě jiný bod nullový, dejme tomu v místě b_2. I bude podobná rovnice, jako (3) platiti také pro bod b_2. Odečtením těchto dvou rovnic získáme vztah:

$$\mu_1 \Gamma_{a_1}^{b_1,\, b_2} + \mu_2 \Gamma_{a_2}^{b_1,\, b_2} + \ldots + \mu_p \Gamma_{a_p}^{b_1,\, b_2} = 0. \tag{4}$$

Jelikož se ale integrály druhého druhu dají vyjádřiti jakožto derivace integrálů druhu třetího:

$$\Gamma_{a_k}^{b_1,\, b_2} = \frac{\partial \Pi_{a_k,\, \alpha}^{b_1,\, b_2}}{\partial c_k}, \tag{5}$$

$$k = 1, 2, 3 \ldots P$$

kde α znamená libovolné místo, můžeme, použivše věty o záměně parametru a proměnné konečně psáti:

$$\Gamma_{a_k}^{b_1,\, b_2} = \left(\frac{\partial \Pi_{b_1,\, b_2}^{x,\, \alpha}}{\partial x}\right)_{a_k} \tag{6}$$

$$k = 1, 2, 3 \ldots P$$

---

⁴) K vuli jednoduchosti v obyčejných bodech plochy.

⁵) Kdyby některý z pólů byl řádu vyššího, budou se v rovnicích (2) vyskytovati též vyšší derivace; na důkazu to ničeho nemění.

Vložíme-li tyto hodnoty do rovnice (4), obdržíme vztah:

$$\mu_1 \left(\frac{\partial \Pi^{x,\alpha}_{b_1,b_2}}{\partial x}\right)_{a_1} + \mu_2 \left(\frac{\partial \Pi^{x,\alpha}_{b_1,b_2}}{\partial x}\right)_{a_2} + \ldots + \mu_p \left(\frac{\partial \Pi^{x,\alpha}_{b_1,b_2}}{\partial x}\right)_{a_p} = 0. \tag{7}$$

A to je hledaná $p + 1$ rovnice tvaru (3). Můžeme tedy tuto rovnici ku rovnicím (3) připojiti a odvoditi větu Riemann-Rochovu obyčejným způsobem. Bude to tak, jako by *stoupl rod plochy Riemannovy o jednotku.* Věta Riemann-Rochova bude pak zníti:

$$P - q = p + 1 - \delta \tag{8}$$

Přebytek δ bude počet lineárně nezávislých differenciálů tvaru:

$$d\,\omega = A_1\,d\,v_1 + A_2\,d\,v_2 + \ldots + A_p\,d\,v_p + A_{p+1}\,d\,\Pi_{b_1,b_2}, \tag{9}$$

které v místech $a_1, a_2, a_3 \ldots a_p$ mají body nullové prvního řádu a v obou místech b_1, b_2 jednoduché póly.

2. Nechť bod b jest nullovým bodem druhého řádu racionálné funkce, jejíž jednoduché póly jsou opět v místech $a_1, a_2, a_3, \ldots a_p$. Tu pak vedle rovnice (2) a rovnice (7), která pro tento případ ($b_1 = b_2 = b$) nabývá tvaru:

$$\mu_1 \left(\frac{\partial \Pi^{x,\alpha}_{b,b}}{\partial x}\right)_{a_1} + \mu_2 \left(\frac{\partial \Pi^{x,\alpha}_{b,b}}{\partial x}\right)_{a_2} + \ldots + \mu_p \left(\frac{\partial \Pi^{x,\alpha}_{b,b}}{\partial x}\right)_{a_p} = 0 \tag{10}$$

(při tom $\Pi_{b,b}$ jest normální integrál třetího druhu, jehož oba logarithmické póly jsou v místech $x = b$, $y = y_1$; $x = b$, $y = y_2$ plochy Riemannovy) splněna jest ještě jedna podmínka, kterou nalezneme takto: Je-li bod b bodem nullovým druhého řádu, pak vedle rovnice (3) bude:

$$\frac{\partial R}{\partial b} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial b} \Gamma^{b,c_1}_{a_1} + \mu_2 \frac{\partial}{\partial b} \Gamma^{b,c_2}_{a_2} + \ldots + \mu_p \frac{\partial}{\partial b} \Gamma^{b,c_p}_{a_p} = 0. \tag{11}$$

Avšak na základě těchže vět, jako jsme odvodili rovnici (6), jest také zde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} \Gamma^{b,c_k}_{a_k} &= \frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial}{\partial a_k} \Pi^{b,c_k}_{a_k,\alpha} = \frac{\partial}{\partial c_k} \frac{\partial}{\partial b} \Pi^{a_k,\alpha}_{b,c_k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial a_k} \Gamma^{a_k,\alpha}_{b} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma^{x,\alpha}_{b}\right)_{a_k} \end{aligned} \tag{12}$$

$$k = 1, 2, 3 \ldots P$$

a tedy po dosazení do rovnice (11) zní hledaná $p + 2$há rovnice:

$$\mu_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma^{x,\alpha}_{b}\right)_{a_1} + \mu_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma^{x,\alpha}_{b}\right)_{a_2} + \ldots + \mu_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma^{x,\alpha}_{b}\right)_{a_p} = 0. \tag{13}$$

Máme tedy v rovnicích (2) + (10) + (13) systém $p + 2$ rovnic téhož tvaru. Transponováním obdržíme opět větu Riemann-Rochovu:

$$P - q = p + 2 - \delta \tag{14}$$

Přebytek δ vztahuje se v tomto případě k differenciálům:

$$d\,\omega = A_1\,d\,v_1 + A_2\,d\,v_2 + \ldots + A_p\,d\,v_p + A_{p+1}\,d\,\Pi_{b,b} + A_{p+2}\,d\,\Gamma_b, \tag{15}$$

které v místech $a_1, a_2, \ldots a_p$ mají nullové body a v bodě b pól druhého řádu.

3. Jestliže konečně jest bod b nullovým bodem řádu r-tého, bude vedle rovnic (3) a (11) splněno $r - 2$ podmínek:

$$\mu_1 \frac{\partial^i}{\partial b^i} \Gamma_{a_1}^{b,\, c_1} + \mu_2 \frac{\partial^i}{\partial b^i} \Gamma_{a_2}^{b,\, c_2} + \ldots + \mu_p \frac{\partial^i}{\partial b^i} \Gamma_{a_p}^{b,\, c_p} \doteq 0 \tag{16}$$

$$i = 2, 3, \ldots r - 1.$$

Vzhledem ku (12) lze pak tyto rovnice napsati ve tvaru:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_b'^{\,x,\, \alpha}\right)_{a_1} + \mu_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_b'^{\,x,\, \alpha}\right)_{a_2} + \ldots + \mu_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_b'^{\,x,\, \alpha}\right)_{a_p} = 0 \\ &\mu_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_b''^{\,x,\, \alpha}\right)_{a_1} + \mu_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_b''^{\,x,\, \alpha}\right)_{a_2} + \ldots + \mu_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_b''^{\,x,\, \alpha}\right)_{a_p} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\mu_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_b^{(r\text{-}2)\, x,\, \alpha}\right)_{a_1} + \mu_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_b^{(r\text{-}2)\, x,\, \alpha}\right)_{a_2} + \ldots + \mu_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_b^{(r\text{-}2)\, x,\, \alpha}\right)_{a_p} = 0,$$

při čemž znamená:

$$\Gamma_b^{(i)\, x,\, \alpha} = \frac{\partial^i}{\partial b^i} \Gamma_b^{x,\, \alpha}, \tag{18}$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots r - 2.$$

Ku původním p rovnicím (2) přistupují tedy vedle (10) a (13) ještě rovnice (17), jichž je $r - 2$, tedy máme celkem systém $p + r$ rovnic, které poskytují větu Riemann-Rochovu ve tvaru:

$$P - q = p + r - \delta, \tag{19}$$

při čemž přebytek δ udává počet lineárně nezávislých differenciálů tvaru:

$$\begin{aligned} d\,\omega = {} & A_1\, d\, v_1 + A_2\, d\, v_2 + \ldots + A_p\, d\, v_p + A_{p+1}\, d\, \Pi_{b,b} \\ & + A_{p+2}\, d\, \Gamma_b + A_{p+3}\, d\, \Gamma_b + \ldots + A_{p+r}\, d\, \Gamma_b^{(r-2)}, \end{aligned} \tag{20}$$

které v místech $a_1, a_2, \ldots a_p$ mají body nullové prvního řádu a v místě b ovšem pól řádu r-tého.

Takto je věta Riemann-Rochova dokázána ze stanoviska funkční theorie i pro obecný tvar (II), jak ji užívá arithmetická theorie funkcí algebraických.

Podíly dvou lineárně nezávislých differenciálů: $d\,\omega = A_1\, d\, v_1 + A_2\, d\, v_2 + \ldots + A_p\, d\, v_p$ jestliže přebytek systému jejich null. bodů $a_1, a_2, \ldots a_p$ δ jest > 0 nazýváme funkcemi speciálními (na rozdíl od funkcí volných pro $\delta = 0$).

Také podíly dvou lineárně nezávislých differenciálů tvarů (9), (15) a (20) jsou racionálné funkce s maximálným počtem arbitrárných konstant. Podobně utvořenými funkcemi zabývá se F. Klein, nazývaje je funkcemi vázanými.[6]

---

[6] F. Klein „Riemannsche Flächen" I. 111.

TISKEM ALOISA WIESNERA V PRAZE,
KNIHTISKAŘE ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ A ČESKÉHO VYSOKÉHO UČENÍ TECHNICKÉHO
V PRAZE

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.

TŘÍDA II.
(MATHEMATICKO-PŘÍRODNICKÁ.)

ROČNÍK XXXI.
(1922.)

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ
1922.

ROZPRAVY

ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.

TŘÍDA II.

(MATHEMATICKO-PŘÍRODNICKÁ.)

ROČNÍK XXXI.

(1922.)

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.
1922.

TISKEM ALOISA WIESNERA V PRAZE,
KNIHTISKAŘE ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ A ČESKÉHO VYSOKÉHO UČENÍ
TECHNICKÉHO V PRAZE.

OBSAH XXXI. ROČNÍKU.

Číslo

Dr. *Silvestr Prát,* Anatonosa Cyanophyceí. (S 2 obr. v tekstu) 1

J. Sobotka, K dvěma důkazům věty Feuerbachovy. (S 2 obr. v tekstu) 2

F. Slavík, O pisolithických rudách železných s příměsí bauxitovou v české křídě 3

Jar. Petrbok, Stratigrafický doklad místní oscilace vodní hladiny Jadranu za holocaenu 4

C. Klouček, Objev fauny Euloma-Niobe u Ouval 5

Alois Matějka, Příspěvek k poznání křídového útvaru na listu Praha 6

J. Sobotka, Souvislost věty Feuerbachovy s rovnoramennou hyperbolou 7

F. Ulrich, Brookit z Bobrůvky (Morava). (S 1 obr. v tekstu) 8

Dr. *Václav Veselý,* Chemické složení nerostů z Chvaletic a Litošic . . . 9

Fr. Ulrich, Příspěvek k poznání fosforečnanů železa a hliníku. (Se 4 obr. v tekstu) 10

Dr. *Vítězslav Veselý* a Ing. *Karel Dvořák,* O partielní redukci dinitronaftalinů 11

Dr. *Otakar Matoušek,* Předběžná zpráva o geologii lázní Bašky a okolí 12

P. N. Čirvinskij, O fulguritech. (S 3 obr. v tekstu) 13

P. N. Čirvinskij, O nálezu ryzího arsenu v Chodském dole (Vladikavkazský okruh) 14

Dr. *B. Ježek,* Morfologické a fysikální vlastnosti zeuneritu. (S 1 obr. v tekstu) 15

F. Slavík, Dvě anchimonominerální facie západočeského gabbra 16

Dr. *Jaroslav Šafránek,* Závislost refrakce kyslíku na tlaku menším jedné atmosfery. (S 1 obr. v tekstu) 17

J. Sobotka, Ke konstrukci kuželosečky oskulační křivky rovinné 18

M. Kössler, Potenční řady s přirozenou hranicí a jejich pokračování ve smyslu Borelově 19

K. Čupr, Příspěvek k Laguerrovým posloupnostem 20

Dr. *J. Žďárský,* Vektorový počet v prostoru o libovolném počtu rozměrů 21

Dr. *Vladimír Mašek,* Poznámka ku ploše naplněné ohnisky parabol na hyperbolickém paraboloidu 22

Dr. *Václav Hlavatý,* Sestrojení kvadratické variety ze 14 bodů ve čtyřrozměrném prostoru 23

Dr. *Václav Hlavatý,* O určité ploše třetího řádu ve čtyřrozměrném prostoru 24

Čís.

Dr. *Frant. Schustler,* Brakteolární úponky rodů Antigonum a Brunichia (Polygonaceae). (S obrázkem v tekstu) 25

Dr. *Ant. Pleskot,* Vztah křivky strikční hyperboloidu k jeho kruhovým řezům a konstrukce z toho plynoucí. (S obr. v tekstu) 26

J. Kratochvíl a *V. Veselý,* O kontaktně změněném gabbrodioritu od Klokočné 27

Frant. A. Novák, Vysoká v Malých Karpatech 28

V. Vojtěch, Vliv desensibilatoru na gradaci a hustotu fotografické desky (S obr. v tekstu) 29

Dr. *Fr. Rádl,* O rovnicích differenciálních lineárních obyčejných třetího řádu s řadou transformační oboustranně zakončenou 30

Aug. Ondřej, O čediči ze Slánské hory. (S 3 obr. v tekstu) 31

Dr. *Boh. Kladivo,* O výpočtu tížnicových odchylek se zřetelem k isostasii 32

Dr. *Otakar Matoušek,* Nález eocenního útvaru na ostrově Prviči v severním moři Adriatickém. (S 2 obr. v tekstu.) 33

Dr. *Vítězslav Veselý* a Ing. *Mil. Jakeš,* Nitrace β acetnaftalidu 34

Prof. *Emil Votoček* a Dr. *Ladislav Kašpárek,* Titrace iontu rtuťnatého chloridovým a její upotřebení k analyse rumělky i organických sloučenin rtuti 35

Prof. *E. Votoček* a Dr. *P. Jírů,* Studie o halogenisovaných hydrazinech aromatických (část I.). [O skutečném a domnělém 3·4-dibromfenylhydrazinu] 36

Dr. *Jur. Hronec,* K teorii differenciálných systémov 37

Vl. Čirvinskij, O zvláštních nákrojcích křišťálů z Kazbeka na Kavkaze (S 5 obr. v tekstu) 38

Dr. *Josef Klíma,* Příspěvek ke křivkám cissoidálním 39

Dr. *Jan Vilhelm,* O morfologickém významu kalicha, koruny a paracorolly v květech Mimulus. (S 4 obr. v tekstu) 40

F. Ulrich, O identitě agnolithu s inesitem 41

Mil. Hampl, Potierova relace o případě totální reflexe na krystalech dvojlomných 42

Dr. *Juraj Majcen,* Užití Boškovićovy transformace na rotační plochy 2. stupně. (S obrazcem v tekstu) 43

Anatonosa Cyanophyceí.

Dr. Silvestr Prát.

(Předloženo ve schůzi dne 13. ledna 1922.)

U mořských řas, u nichž Drevs stanovil velmi značnou permeabilitu pro soli, stačila diffuse k regulaci při porušené rovnováze koncentrace buněčné šťávy a media. U Cyanophyceí soli vnikají do buňky rovněž velmi rychle, mohly by tedy i zde býti podobné poměry při zvýšení osmotického tlaku živného roztoku. Bylo zajímavo zkusiti, jak se tato reakce bude u Cyanophyceí jeviti také proto, že nemají velké vakuoly, buněčné šťávy, že se u nich tedy musí anatonická reakce odehrávati v samé plasmě.

Mohlo by se sice zdáti, že Cyanophycey jsou pro tato pozorování materiálem velmi vhodným z toho důvodu, že snášejí nejširší meze v koncentraci roztoků; tak Microcoleus chthonoplastes Thuret vydrží i tlak prostředí o 200 atmosférách („im Zustand des latenten Lebens“ — Botazzi); ale právě řasy snášející silně koncentrované prostředí se vyznačují tak silnými pochvami, že se naprosto nehodí k pokusům plasmolytickým, ba i řasy normálně bez pochev je mohou po přenesení do koncentrovanějších roztoků vytvořiti (Lemmermann S. 31). Oscillatoriacey bez pochev, nejvhodnější k pokusům plasmolytickým, obyčejně nesnášívají příliš koncentrovaných roztoků (Stange, Richter).

Ke svým pokusům jsem použil několika druhů rodu Oscillatoria a Phormidium. Řasy přinesené z přírody byly ve větších nádobách nebo na plochých miskách ponechány v původní nebo v káranské vodě, až se pěkně rozlezly. Do roztoků různé koncentrace pak byly sítě nejvíce rozlezlých vláken přeneseny pincetou nebo platinovou jehlou pokud možno bez vody, aby se zamezilo zřeďování roztoků. Bylo použito řady různých koncentrací živného roztoku Knopova, pro něž udává L. Gurlitt osmotický tlak vypočtený ze snížení bodu mrznutí a přibližně isosmotických roztoků natriumchloridu. Řada roztoků (obyčejně po 50 *cm*^{3}) byla připravena zředěním roztoku výchozího. Při plasmolyse byla vlákna platinovým drátkem přenesena do plasmolytika na misce nebo na hodinovém sklíčku, při natriumchloridu přímo do kapky na podložním sklíčku. Při tom ovšem nutno dbáti toho, aby se plasmolytikum nezřeďovalo mezi vlákny přenesenou vodou a rychle pozorovati, poněvadž vzata za základ koncentrace, při níž se plasmolysa rychle (v době kratší nežli 1 minuta) vyrovnala. Plasmolysující roztoky byly stupňovány po 0·2% NaCl. Při magnesiumsulfátu a cukru byla plasmolysa pozorována po čtvrt a po půl hodině.

Saccharosa by se sice pro kultury s vyšším osmotickým tlakem hodila velmi dobře, ale nebylo jí možno použíti pro rychlý vývin bakterií a plísní. Rozkladné produkty jejich látkové výměny (kyseliny a pod.) by mohly permeabilitu velmi značně měniti. Také se nezdařilo hraničnou plasmolytickou koncentraci u vláken v cukerných roztocích pěstovaných stanoviti; deplasmolysa byla vždy velmi rychlá. U vláken z 1·4% saccharosy nastávala deplasmolysa v 5% NaCl velmi rychle, z 21·5% cukru se ve 20% KNO_3 i v 10% NaCl vyrovnávala v 1—5 minutách.

Poněvadž velmi dobrým indiciem, jak se Cyanophycey koncentrovanějším roztokům přizpůsobovaly, byl jejich pohyb, jsou zde nejprve reprodukovány výsledky některých pokusů v tomto směru.

10. I. 1919 bylo Phormidium sbírané 8. XII. v Šárce přeneseno do roztoků:

Knop ‰	11. I.	14. I.
0	vlákna více méně hustě, spojená ve svazečky a štětičky.	vlákna hustě
2		
5		vlákna jednotlivě
8		
10		
15	vlákna jednotlivě, řídce z chomáče vynikající.	

Totéž Phorm. bylo 11. II. přeneseno do roztoků: Rozlézání po stěnách:

Knop ‰	12. II.	21. II.	NaCl ‰	12. II.	21. II.
0	++	+++			
2	+	+++	1·3	+	+
5	+	+	2·4	+	+
8	+	+	3·4	+	++
10	+	+	4·7	+	++

Oscillatoria 24. I. 1919 do NaCl.

NaCl ‰	25. I.	27. I.	28. I.	8. II. rozlezlá
0	vlákna pohromadě, často v koulích, chomáčky a svazečky vláken	koule a svazečky vláken	podobně	+
1·3				++
2·4				+
3·4				+
4·7	na dně skupiny jednotlivých vláken	vlákna poněkud pohromadě		++
7·2		jednotlivá vlákna		++
9·6			velmi pěkný pohyb po skle	++
11·3			0	0

Oscillatoria 27. I. do saccharosy.

Saccharosy %	28. I.
1·4	svazečky vláken
2·7	
3·6	vylézá až nad hladinu
5·2	částečně svazečky, částečně jednotlivá vlákna
8·2	většinou jednotlivá vzhůru trčící vlákna
11·2	jednotlivá vlákna po stěnach
13·3	

Jak patrno, mohou se Oscillarie a Phormidium pohybovati dosti dobře i v poměrně značně koncentrovaných roztocích. V Knopově roztoku byl hlavně v nižších koncentracích pohyb velmi čilý, v roztocích natriumchloridu obyčejně nebýval tak pěkný, ale vždy byl také dosti živý; rozdíl byl pouze v tom, že ve zředěnějších Knopových roztocích se vlákna v několika dnech rozlézala po celé hladině i po stěnách, ve vyšších koncentracích skoro vždy zůstávala na dně, kdežto v roztocích natriumchloridu i ve vyšších koncentracích vylézala po stěnách, někdy i více nežli v roztocích zředěnějších. Jak v Knopově roztoku, tak v natriumchloridu i saccharose však v nižších koncentracích (asi do 1·8 až 2·5 atmosfér osmotického tlaku roztoku) zůstávala vlákna spojena ve štětičkách, svazečcích a chomáčcích, někdy docela sbalena v ježaté koule, kdežto v roztocích vyšší koncentrace se vlákna rozlézala zcela jednotlivě a na dně nevynikaly z chomáče nikdy svazečky, nýbrž trčela vzhůru jen jednotlivá vlákna, jakoby do dna zabodána; i při rozlézání po stěnách se netvořily chomáčky a sítě, ale vlákna se rozlézala jednotlivě.

V koncentracích ovšem, jichž řasy už dobře nesnášely, byl pohyb jen velmi špatný nebo žádný; nebylo-li však poškození příliš značné, jevilo se zotavení po přenesení do normálních podmínek již velmi záhy čilým pohybem.

Výsledky lze přehlédnouti nejlépe podle grafického znázornění. Na ose *X* je nanášena koncentrace kultivačního roztoku v ‰, na osy *Y* % plasmolysující koncentrace (NaCl) nebo atmosféry.

Trhanou čarou je naznačen přetlak buněk v atmosférách (osmotický tlak plasmolysující koncentrace minus osmotický tlak prostředí) a tečkovaně stoupání tlaku v atmosférách (plasmolysující koncentrace z určitého prostředí minus plasmolysující koncentrace normální). V pokusu č. 1. je znázorněn postup deplasmolysy v 5% NaCl.

Hodnoty u Knopova roztoku zůstávaly dlouho celkem stálé, hlavně ve vyšších koncentracích byly plasmolytické koncentrace stanovené po týdnu, 14 dnech i 25 dnech namnoze úplně stejné. Naproti tomu u roztoků natriumchloridu se osmotická hodnota buněk v různých roztocích po 11 dnech jen málo změnila. Zvláště nápadné to bylo v roztocích nižších koncentrací v prvním týdnu až 14 dnech; teprve po 25 dnech bylo patrné stoupnutí. Ale ještě i po době delší než měsíc se tlak neustále zvyšoval. Po delší době ovšem již nemohou býti hodnoty stejně přesné, poněvadž vlákna často již žloutnou a objevují se abnormní poměry permeability.

Regulace turgoru (anastonosy) může býti docíleno dvojí cestou; buď prostým vniknutím látek z prostředí do buněk (difusí) nebo aktivní produkcí osmoticky působivých látek v buňce samé. Vzpomeneme-li rychlého vnikání solí do buněk Cyanophyceí z hypertonických roztoků, zdálo by se, že stoupání osmotického tlaku v koncentrovanějších roztocích je možno úplně vyložiti jen endosmosou solí. Ale nutno uvážiti i jiné okolnosti. V natriumchloridu, jenž při plasmolyse právě pronikal velmi snadno, byla regulace osmotického tlaku pomalá. Je-li však anatonosa působena aktivní produkcí osmoticky působivých látek v buňce, je pochopitelno, že v koncentrovaných živných roztocích s nadbytkem živin je rychlejší nežli při velmi omezeném jich množství v roztocích natriumchloridu. Že je výměna látek v koncentrovaných živných roztocích (proti normálně koncentrovaným a proti natriumchloridu) značně pozměněna, dokazuje nadprodukce volutinu. Mimo to bylo stoupání plasmolytické koncentrace pozorováno pouze u kultur, jež se dovedly změněným podmínkám přizpůsobiti.

Oscillatoria limosa byla obyčejně zvýšením koncentrace media silně atakována, jak se jevilo nejnápadněji zastavením pohybu; pokusy byly několikráte opakovány, ale nejčastěji rychle odumírala. 8./V. byla Oscillatoria limosa přenesena do Knopových živných roztoků koncentrace 2—20‰. 9./V. se slabý pohyb jevil jen do 4‰, teprve 11./V. byla poněkud rozlezlá i v 6‰. Ve vyšších koncentracích pohyb nebyl vůbec pozorován, v koncentrovanějších roztocích než 10‰ odumřela. Při plasmolyse stanovena pro koncentrace 2—8‰ hraniční plasmolytická koncentrace 1% NaCl nebo 0·24 mol $MgSO_4$.

Tyto závěry platí ovšem jen v případě, že se permeabilita buněk nemění. To ovšem není pravděpodobné, naopak některá pozorování svědčí proti tomu. Jsou tedy poměry asi mnohem komplikovanější.

I.

Pokus č. 1.

10. I. 1919 Phormidium ze Šárky bylo přeneseno do řady Knopových roztoků:

Knop $^0/_{00}$	t. j. atmosfér při 20°	17. I. v 5%NaCl deplasmolysa za minut	19. I.				25. I.			
			hraniční plasmol. konc. NaCl %	t. j. atmosfér	přetlak atmosfér	stoupání tlaku	hraniční plasmol. konc. NaCl. %	t. j. atmosfér	přetlak atmosfér	stoupání tlaku
0	0	22	0·8	5·63	5·6	—	0·8	5·63	5·6	—
2	0·970	15	1	6·92	6	1·3	0·8	5.63	4·7	—
5	1·836	11	1	6·92	5·1	1·3	0·9	6·29	4·5	0·66
8	2·456	9	1·2	8·5	6	2·9	1·3	9·2	6·8	3·6
10	3·556	9	1·5	10·5	7	4·9	1·5	10·5	7·0	4·9
15	5·443	8	2	14	8·6	8·4	2	14·0	8·6	8·4
20	7·241						2·2	14·6	7·4	9·0
25	8·504						2·5	16·5	8·0	10·9
30	9·581						3·2	21·2	12·6	15·6
40	13·085						5·?	33	20	27·4

U téže řady bylo 1./II. stanoveno při plasmolyse cukrem (i NaCl) stoupání osmotické hodnoty, ale pro srážení blan a scvrkání celých vláken nebylo možno přesně stanoviti počátek plasmolysy a tím hraničnou plasmolytickou koncentraci.

Pokus č. 2.

Oscillatoria brevis z Davle byla 15. IV. přenesena do Knopova roztoku:

Knop $^0/_{00}$	17. V. hraniční plasmol. konc.		26. VI. hraniční plasmol. konc.	
	% NaCl	mol. $MgSO_4$	% NaCl	mol. $MgSO_4$
2	1	0·28	1	0·28
6	1·4	0·32	1·8	0·34
10	1·8	0·36	—	—

Pokus č. 3.

24. I. 1919 byla Oscillatoria přenesena do různých koncentrací NaCl.

NaCl ‰	t. j. atmosfér	31. I.				8. II.				3. III.			
		hraničná plasmol. konc. NaCl %	t. j. atmosfér	přetlak atmosfér	rozdíl tlaku	hraničná plasmol. konc. NaCl %	t. j. atmosfér	přetlak atmosfér	rozdíl tlaku	hraničná plasmol. konc. NaCl %	t. j. atmosfér	přetlak atmosfér	rozdíl tlaku
0		0·8	5·63	5·6	—	0·9	6·29	6·29	—	1	6·92	6·92	—
1·3	0·97	0·8	5·63	4·7	—	1·1	7·8	6·8	1·6	0·8	5·63	4·7	—
2·4	1·84	1	6·92	5·1	1·31	1·2	8·4	6·6	2·2	1·5	10·5	8	4·9
3·4	2·46	1	6·92	4·5	1·3	1·2	8·4	6	2·2	1·9	13·3	9·7	7·7
4·7	3·56	1	6·92	3·4	1·3	1·5	10·5	7	4·3	2·2	14·6	9·2	9·0
7·2	5·44	1·5	10·5	5·1	4·87	1·6	12·2	6·76	5·0				
9·6	7·24	2	13·9	6·7	8·27	2	13·9	6·7	7·7				
1·13	8·50	2·5	16·5	8·0	10·87								
1·28	9·58	3	20	10·4	14·37								
1·5	11·33	3·5	23	11·7	17·37								
1·74	13·1	—											

Pokus č. 4.

4. III. bylo Phormidium ze Šárky přeneseno do roztoků:

Knop ‰	15. III.				29. III.			
	hraničná plasmolys. koncentr. NaCl %	t. j. atmosfér	přetlak atmosfér	rozdíl tlaku	hraničná plasmolys. koncentr. NaCl %	t. j. atmosfér	přetlak atmosfér	rozdíl tlaku
2	1·2	8·4	7·4	—	1·2	8·4	7·4	—
5	1·4	9·8	7·9	1·4	1·4	9·8	7·9	1·4
8	1·8	12·5	10	4·1	1·8	12·5	10	4·1
10*)	1·8	12·5	9	4·1	2	13·9	10·3	5·5
NaCl ‰								
1·3	1·2	8·4	7·4	—	1·2	8·4	7·4	—
2·4	1·2	8·4	6·6	—	1·4	9·8	7·9	1·4
3·4**)	1·2	8·4	6	—	1·5	10·5	8	2·1
4·7**)	1·2	8·4	4·8	—	2	13·9	10·3	5·5
7·2**)	1·5	10·5	5	2·1	2	13·9	8·5	5·5

*) vlákna poškozená, některá zcela rozpadlá.
**) vlákna vytvořila pochvy.

(Ústav pro fysiologii rostlin Karlovy university.)

Literatura:

Bächer J.: Über die Abhängigkeit des osmotischen Wertes von einigen Aussenfaktoren. Diss. Freiburg. 1919. Zde je též uvedena starší literatura (neúplně).

Botazzi F.: Osmotischer Druck und elektrische Leitfähigkeit der Flüssigkeiten ..... Ergebn. d. Physiol. 7. 1908, 161.

Drevs Paul: Die Regulation des osmotischen Druckes in Meeresalgen bei Schwankungen des Salzgehaltes im Aussenmedium Arch. Mecklenb. 49. 1896. 91.

Gurlitt L.: Über den Einfluss der Konzentration der Nährlösung auf einige Pflanzen. Beih. z. Botan. Cbl. XXXV. I. 1918. 279.

Lemmermann E.: Kryptogamenflora der Mark Brandeburg III. Algen. 1. 1910.

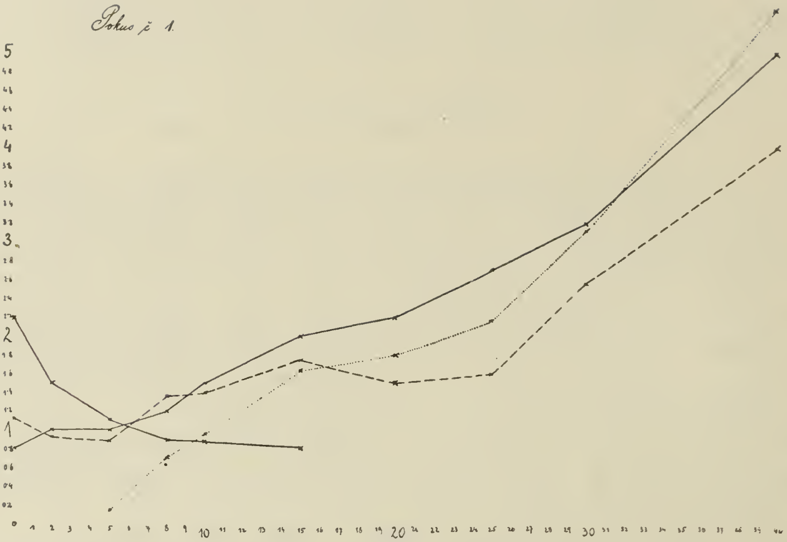
Lepeschkin W. W.: Zur Kenntnis des Mechanismus der aktiven Wasserauscheidung der Pflanzen. Beih. z. botan. Cbl. XIX. 1906. I. 408.

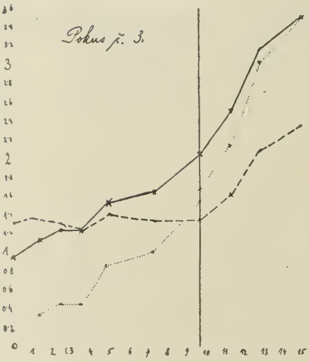
Prát S.: Plasmolysa Cyanophyceí. Rozpr. č. akad. XXX. 1922 č. 41.

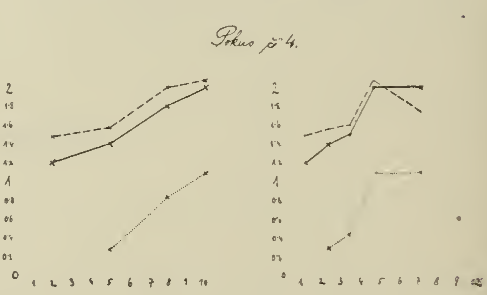
Richter A.: Über die Anpassung der Süsswasseralgen an Kochsalzlösungen. Flora. 75. 1892. 4.

Schwellengrebel N. H.: Über Plasmolyse und Turgorregulation der Presshefe Cbl. p Bakteriol. II. 14. 1905. 374.

Stange B.: Beziehungen zwischen Substratconcentration, Turgor und Wachsthum bei einigen Pfanerogamen Pflanzen. Botan. Ztg. 50. 1892. 253.







Vysvětlení v textu.

I.

K dvěma důkazům věty Feuerbachovy.

Napsal **J. Sobotka.**

(S 2 obrazci v textu.)

Předloženo 13. ledna 1922.

1. Tak zvaná kružnice devíti bodů daného trojúhelníka má tu vlastnost, že se dotýká kružnic jemu vnitř i vně vepsaných. Věta tato sluje Feuerbachovou. W. Fiedler ve svém známém spise „Cyklographie“ zabývá se dosti obšírně větou tou a jejím prostorovým odvozením, ale k důkazu jejímu nedospěl, jak se o tom blíže též zmiňuje E. Müller.¹) Chci zde ukázati, že cyklographie i tu podává snadný a jednoduchý důkaz.

Budiž (obr. 1.) $A\,B\,C$ daný trojúhelník; k_0 budiž kružnice jemu vnitř vepsána a k_1, k_2, k_3 buďtež kružnice jemu vně vepsané, které se příslušně dotýkají stran $B\,C$, $C\,A$, $A\,B$ a prodloužení stran ostatních.

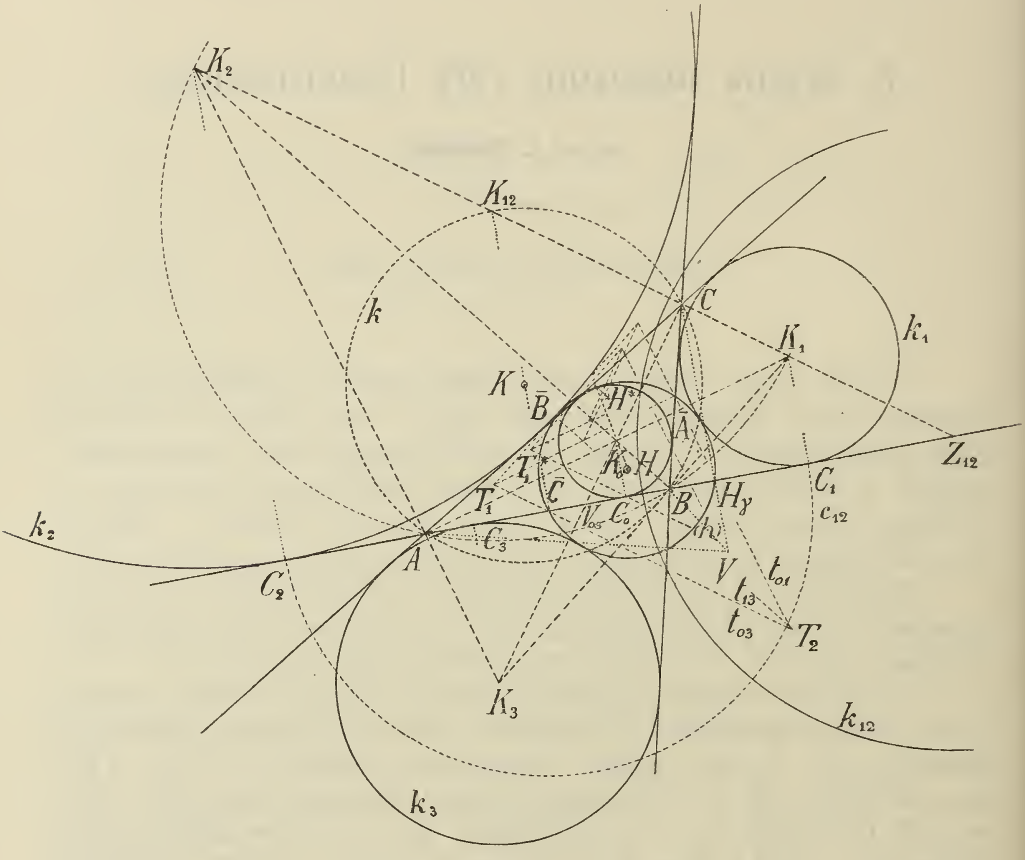
Orientujme kružnici k_0 kladně, ostatní kružnice uvedené záporně Takto orientované kružnice čili cykly jsou cyklickými průměty příslušných bodů K_0', K_1', K_2', K_3', jejichž orthogonalné průměty do roviny $A\,B\,C$ jsou středy K_0, K_1, K_2, K_3 řečených kružnic. Hledejme nyní cykly, které se vždy tří z cyklů k_0, k_1, k_2, k_3 dotýkají. K tomu cíli uvažujme rotační kužele $\mathrm{K}_0 = (K_0'\,k_0)$, $\mathrm{K}_1 = (K_1'\,k_1)$, $\mathrm{K}_2 = (K_2'\,k_2)$, $\mathrm{K}_3 = (K_3'\,k_3)$. Libovolné dva z kuželů těchto K_i, K_j se protínají v konečnu v kuželosečce k_{ij}', která do roviny $A\,B\,C$ se promítá orthogonálně do kuželosečky k_{ij}, jež jest místem středů cyklů, jež se dotýkají cyklů k_i, k_j. Všecky cykly této vlastnosti jsou vytvořeny cyklickým průmětem řady bodové na k_{ij}'. Budiž T_{ij} rovina křivky k_{ij}'. Kužele K_i vedou takto k šesti rovinám T_{ij}, které tvoří úplný čtyřhran, v jehož hranách se roviny T_{ij} protínají po třech. Mají totiž roviny T_{12}, T_{23}, T_{31} hranu h_0', roviny T_{02}, T_{03}, T_{23} hranu h_1', roviny T_{03}, T_{01}, T_{31} hranu h_2' a roviny T_{01}, T_{02}, T_{12} hranu h_3' společnou. Hrana h_0' spojuje ony dva body, jež jsou kuželům K_1, K_2, K_3 mimo kuželosečku v nekonečnu společny a cyklografické průměty těchto bodů jsou cykly,

---

¹) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. J. 1911 S. 188.

jež se současně dotýkají cyklů k_1, k_2, k_3. Obdobný význam mají ostatní hrany h_1', h_2', h_3'.

Že se hrany h_0', ... h_3' protínají v jediném bodě H', plyne z toho, že neleží v jediné rovině a že libovolné dvě z nich se protínají. Tak na př. se protínají hrany h_0', h_1', ježto leží obě v rovině T_{23}. Vztah tento platí pro libovolnou polohu čtyř cyklů. Vyjadřeme si dále bod H' pro náš



Obr. 1.

zvláštní případ, k čemuž použijeme průmětu centrálného do roviny $A\,B\,C$ z bodu K_0'.

Stopa roviny T_{12} jest přímka potenční t_{12} kružnice k_1, k_2. Jelikož body dotyku C_1, C_2 těchto kružnic s přímkou $A\,B$ jsou k sobě souměrně položeny vzhledem ke středu $\overline{C}$ strany $A\,B$, prochází přímka t_{12} bodem $\overline{C}$ jsouc kolmá k centrále $K_1\,K_2$. Rovina T_{12} prochází středem úsečky $K_1'\,K_2'$, jest tudíž rovnoběžná k přímkám $K_1'\,C_1$, $K_2'\,C_2$; následkem toho přímka úběžná t_{12}^* roviny této prochází bodem C_0^* kružnice k_0, který jest diametrálně protilehlý k bodu C_0, v němž se k_0 dotýká strany $A\,B$. Obdobně soudíme, ježto bod dotyku C_3 strany $A\,B$ s k_3 leží k C_0 souměrně vzhledem k $\overline{C}$, že kolmice t_{03} z $\overline{C}$ na $K_0\,K_3$ jest stopou roviny T_{03} a že rovnoběžka $t_{03}{}^*$ bodem C_0 k t_{03} jest přímkou úběžnou této roviny.

Z toho plyne, že stopníky přímek $h_0{}'$, $h_1{}'$, $h_2{}'$, $h_3{}'$ jsou středy T_0, T_1, T_2, T_3 kružnic vnitř a vně vepsaných trojúhelníku $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, jehož vrcholy půlí strany daného trojúhelníka $A\,B\,C$. Vrcholy trojúhelníka, jehož strany procházejí body A_0, B_0, C_0 a jsou rovnoběžny k přímkám t_{01}, t_{02}, t_{03}, jsou úběžníky $T_1{}^*$, $T_2{}^*$, $T_3{}^*$ přímek $h_1{}'$, $h_2{}'$, $h_3{}'$, kdežto bod výšek tohoto trojúhelníka jest úběžníkem $T_0{}^*$ přímky $h_0{}'$. Stanoví tu útvary stopní a útvary úběžné dvě soustavy podobně položené; středem podobnosti jest průmět H^* bodu H', v němž se tedy přímky $T_i\,T_i{}^*$ sbíhají. Kružnici (h) devíti bodů trojúhelníka daného $A\,B\,C$ v soustavě prvé přísluší v soustavě druhé kružnice k_0. Neboť (h) jest též kružnicí devíti bodů trojuhelníka $T_1\,T_2\,T_3$; jí přísluší v uvedené podobnosti kružnice devíti bodů trojuhelníka $T_1{}^*\,T_2{}^*\,T_3{}^*$, a tou jest k_0, jak patrno z toho že na př. přímky t^*_{03}, t^*_{12} procházejí body C_0, $C_0{}^*$ na k_0 diametrálně protilehlými a proto se protínají na k_0. Označíme-il H střed kružnice (h), příslušejí v uvedené podobnosti přímkám $H\,T_i$ přímky $K_0\,T_i{}^*$; tyto přímky jsou orthogonálné průměty přímek bodem $K_0{}'$ rovnoběžně k přímkám $h_i{}'$ vedených; proto jsou přímky $H\,T_i$ orthogonálné průměty přímek $h_i{}'$ samých a bod H jest tudíž orthogonálným průmětem bodu H', z čehož plyne, že skutečně bod H' se promítá cyklograficky do kružnice (h).

Trojúhelníky $A\,B\,C$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ stanoví rovněž podobnou polohu v rovině pro poměr podobnosti 2 a střed podobnosti ve společném těžišti jejich. Z toho plyne, když kružnici k opsanou trojúhelníku $A\,B\,C$ stejně orientujeme s k_1, k_2 a k_3 a značíce bod, jejímž jest cyklografickým průmětem K', že $K'\,K_0 \parallel h_0$, $K'\,K_1 \parallel h_1$, $K'\,K_2 \parallel h_3$ a $K'\,K_3 \parallel h_3$.

2. Kružnice k opsaná trojúhelníku $A\,B\,C$ prochází patami výšek v trojúhelníku $K_1\,K_2\,K_3$; ona půlí tedy jeho strany $K_i\,K_j$ v bodech K_{ij}. Kružnice nad průměrem $K_1\,K_2$ prochází body A, B; jest tedy přímka $A\,B$ její přímkou potenční s kružnicí k, pročež jest bod Z_{12}, v němž $K_1\,K_2$ přímku $A\,B$ protíná středem involuce bodové na $K_1\,K_2$, dané dvojicemi $K_1\,K_2$ a $C\,K_{12}$. Involuce ta se promítá na $A\,B$ v involuci $C_1\,C_2$. $C\,\overline{H}_\gamma$, kde značí H_γ patu výšky v trojúhelníku $A\,B\,C$ spuštěné z bodu C. Tato involuce má svůj střed rovněž v bodě Z_{12}.

Body $\overline{C}$, H_γ prochází kružnice (h) a body C_1, C_2 proložme kružnici $c_1{}'$, která má $\overline{C_1\,C_2}$ za průměr; pak kružnice k_{12}, která má střed v Z_{12} a protíná c_{12} orthogonálně, protíná též (h) orthogonálně a vytíná z $A\,B$ dvojné prvky posledně uvedené involuce. Kružnice k_{12} jest tudíž potenční kružnicí cyklů k_1, k_2. Tím poznáváme, že kružnice (h) seče k_{12} orthogonálně.

Stejným způsobem poznáváme, že involuce $C_0\,C_3\,.\,\overline{C}\,H_\gamma$ má za střed V_{03} střed podobnosti cyklů k_0, k_3. Jelikož tato involuce jest elliptická, jest kružnice k_{03} středu V_{03}, jež protíná c_{03} a (h) orthogonálně imaginárná a jest zastoupena kružnicí $k_{03}{}^*$ soustřednou, jíž protínají kružnice c_{03} a (h)

v bodech na ní diametrálně protilehlých. Jest patrno, že k_{03} jest též kružnicí potenční pro cykly k_0, k_3, takže (h) seče též orthogonálně kružnici k_{03}. Tím dospíváme k výsledku, že kružnice (h) seče orthogonálně všechny kružnice k_{ij}, kde $i, j = 0, 1, 2, 3$ a $i \neq j$.

Sestrojíme-li k dvojicím ze čtyř cyklů kružnice potenční, obdržíme šest takových kružnic náležejících síti kružnic, a společná jejich kružnice orthogonální protíná dané čtyři cykly v stejných úhlech, kteroužto vlastnost odvozuje Fiedler rovněž s použitím cyklografického promítání. Proto kružnice (h) protíná cykly k_0, k_1, k_2, k_3 v stejných úhlech.

Kružnice k_{12} jest stopou rotačního pravoúhlého hyperboloidu H_{12}, jehož body se cyklicky zobrazují v cykly, jež vesměs protínají k_1 a k_2 pod stejnými úhly a k_{12} orthogonálně. Cyklus (h) zobrazuje tedy bod H', který jest společný pravoúhlým hyperboloidům H_{12}, H_{23}, H_{31}, H_{01}, H_{02}, H_{03}, jejichž stopy jsou uvedené kružnice potenční, z nichž prvé tři jsou jednodílné, ostatní dvojdílné. Mimo bod H' a bod k němu vzhledem k průmětně souměrně položený nemají tyto hyperboloidy v konečnu jiných bodů společných. Kužele K_1, K_2 a hyperboloid H_{12} náleží témuž svazku; protínají se tedy v konečnu v kuželosečce k'_{12}; kužele K_2, K_3 a hyperboloid H_{23} mají rovněž tak společnou kuželosečku k'_{23}. Tyto kuželosečky musí procházeti bodem H', který je všem hyperboloidům H_{ij} společný. Následkem toho jest bod H' též společným bodem kuželů K_1, K_2, K_3. Obdobně soudíme, že bod H' náleží též kuželi K_0, pročež jeho průmět cyklografický (h) dotýká se všech čtyřech cyklů k_1, k_2, k_3, k_0.

K tomuto výsledku vede též následující úvaha.

Jsou-li K_i', K_j' dva body v prostoru, k_i, k_j jejich cyklografické průměty a T_{ij} rovina kuželosečky, v níž se kužele $(K_i' \, k_i)$, $(K_j' \, k_j)$ v konečnu protínají, pak libovolná rovina M^* rovnoběžná s průmětnou seče kužele ty v kružnicích m_i, m_j a rovinu T_{ij} v jejich přímce potenční m_{ij}.

Je-li K_n' libovolný další bod v prostoru a k_n jeho cyklografický průmět, vedou obdobně kužele $(K_i' \, k_i)$, $(K_n' \, k_n)$ k rovině T_{in}, dále kužele $(K_j' \, k_j)$, $(K_n' \, k_n)$ k rovině T_{jn}, a roviny ty protínají se v přímce p, která seče M^* v bodě P. Označíme-li m_n kružnici, v níž M^* protíná kužel $(K_n' \, k_n)$, jest P středem potenčním kružnic m_i, m_j, m_n.

Z toho soudíme, že rovina M_0 obsahující bod H' a rovnoběžná s průmětnou M protíná kužele $(K_i' \, k_i)$ v kružnicích n_i $(i = 0, \ldots, 3)$, vzhledem k nimž má bod H' stejnou potenci. Tedy cykly n_i mají společnou kružnici orthogonální $\overline{h}$, pročež pravoúhlý hyperboloid H mající svůj střed v bodě H' a obsahující kružnici $\overline{h}$ prochází body K'_i. Stopa jeho do libovolné roviny rovnoběžné s M, tedy i do roviny M samé seče, jak známo, cyklografické průměty do této roviny veškerých jeho bodů pod stejnými úhly. Poněvadž cykly k_i jsou tu cyklografickými průměty čtyř bodů na H, a poněvadž (h) jest jediný možný cyklus, který cykly k_i protíná pod stejnými úhly, proto jest cyklus ten stopou hyperboloidu H. Přechází tudíž H v kužel pravoúhlý o vrcholu H' opírající se o (h) a kružnice $\overline{h}$ se redukuje na bod H'.

Leží tedy body K_i' na pravoúhlém rotačním kuželi, jehož vrchol jest H' a jehož osa jest kolmá k M.

3. Že se kružnice (h) dotýká kružnic k_i $(i = 0, \dots 3)$ odvodil Feuerbach pomocí úvah trigonometrických. Ukažme, jak pomocí známých vzorců trigonometrických můžeme dospěti snadně k cíli.

Budiž V bod výšek v trojúhelníku $A B C$ a V_a bod půlící (obr. 2.) úsečku $\overline{A V}$. Vektory $K A$ a $V_a V$ se sobě rovnají, a jelikož

$$K \overline{A} = R \cos A, \tag{1}$$

když značí R poloměr kružnice k, proto

$$A V = 2 R \cos A,\ B V = 2 R \cos B,\ C V = 2 R \cos C. \tag{2}$$

Dále jest, značíme-li r_i poloměry kružnic k_i,

$$r_0 = \frac{\Delta}{s},\ r_1 = \frac{\Delta}{s - a},\ r_2 = \frac{\Delta}{s - b},\ r_3 = \frac{\Delta}{s - c}, \tag{3'}$$

když značí Δ obsah trojúhelníka $A B C$, a, b, c délky jeho stran a $2 s = a + b + c$. Obdržíme tu

$$r_2 + r_3 = \frac{a b c \sin A}{2 (s - b)(s - c)} = \frac{a \sin A}{2 \sin^2 \dfrac{A}{2}} = \frac{2 R \sin^2 A}{1 - \cos A} = 2 R (1 + \cos A),$$

takže

$$r_2 + r_3 = 2 R (1 + \cos A),\ r_1 - r_0 = 2 R (1 - \cos A); \tag{3}$$

obdobné výrazy obdržíme pro $r_3 + r_1$, $r_1 + r_2$, $r_2 - r_0$ a $r_3 - r_0$.

Je-li A'' bod na k diametrálně protilehlý k bodu A a A' druhý průsečík přímky $A V$ s k, jest $A'' A' \parallel B C$ a proto $\sphericalangle V A B = \sphericalangle C A A''$. Následkem toho jest $\sphericalangle V A K = A + 2 B - \pi$, ať již jest B úhel ostrý nebo tupý anebo pravý; plyne tudíž z trojúhelníka $K V A$, klademe-li $V K = 2 e$ se zřetelem na (1)

$$\begin{aligned} 4 e^2 &= R^2 + 4 R^2 \cos^2 A + 4 R^2 \cos A \cos (A + 2 B) \\ &= R^2 + 4 R^2 \cos^2 A + 2 R^2 [\cos 2 (A + B) + \cos 2 B], \end{aligned}$$

takže

$$4 e^2 = 3 R^2 + 2 R^2 (\cos 2 A + \cos 2 B + \cos 2 C).$$

Ze známé relace

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 (1 + \cos A \cos B \cos C) \tag{4}$$

pro úhly v trojúhelníku plyne

$$1 + \cos 2 A + \cos 2 B + \cos 2 C = - 4 \cos A \cos B \cos C.$$

Jest tudíž

$$4 e^2 = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C),$$

čili

$$e^2 = r^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C), \tag{5}$$

kde r jest poloměrem kružnice devíti bodů (h), aneb vzhledem k (4)

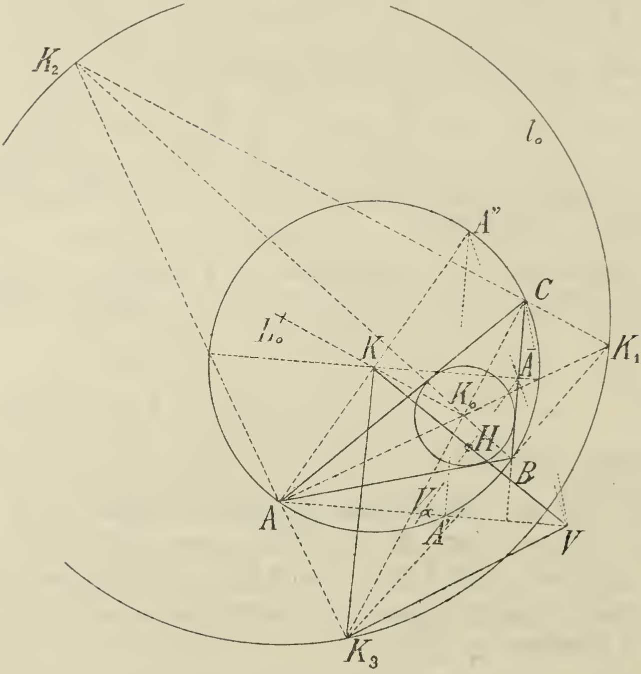
$$e^2 = 9\,r^2 - \tfrac{1}{4}\,(a^2 + b^2 + c^2),$$

čili

$$4\,e^2 = 9\,R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \tag{5'}$$

4. Z trojúhelníka $K_3\,K\,A$ můžeme vypočítati $K_3\,K$; jest tu

$$\overline{K_3\,K}^2 = R^2 + \frac{r_3^2}{\cos^2 \frac{A}{2}} - 2\,R\,\frac{r_3}{\cos \frac{A}{2}} \cos\left(\frac{A}{2} + B\right);$$



Obr. 2.

z (3) plyne

$$\frac{r_3}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{2\,r_3}{1 + \cos A} = \frac{4\,R\,r_3}{r_2 + r_3} = \frac{4\,R\,(a - b + c)}{2\,a} = 2\,R\,\frac{\sin A - \sin B + \sin C}{\sin A}; \tag{6}$$

dále jest

$$-\frac{R\cos\left(\frac{A}{2} + B\right)}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{2\,R}{\sin A}\,\sin \frac{A}{2}\,\sin \frac{B - C}{2} = \frac{R}{\sin A}\,(\sin B - \sin C)$$

a tedy

$$\frac{r_3}{cos^2 \frac{A}{2}} - \frac{2\,R\,cos\left(\frac{A}{2} + B\right)}{cos\,\frac{A}{2}} = 2\,R.$$

Následkem toho jest

$$\begin{aligned} \overline{K_i\,K}^2 &= R^2 + 2\,R\,r_i = 4\,r\,(r + r_i), \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \\ \overline{K_0\,K}^2 &= R^2 - 2\,R\,r_0 = 4\,r\,(r - r_0). \end{aligned} \tag{7}$$

Jelikož

$$sin\,A - sin\,B + sin\,C = 4\,sin\,\frac{A}{2}\,cos\,\frac{B}{2}\,sin\,\frac{C}{2}\,,$$

proto obdržíme z (6)

$$r_3 = 4\,R\,cos\,\frac{A}{2}\,cos\,\frac{B}{2}\,sin\,\frac{C}{2}\,,$$

aneb vzhledem k známé identitě

$$cos\,A + cos\,B - cos\,C = 4\,cos\,\frac{A}{2}\,cos\,\frac{A}{2}\,sin\,\frac{C}{2} - 1,$$

též

$$r_3 = R\,(1 + cos\,A + cos\,B - cos\,C),$$

čímž docházíme k rovnicím

$$\begin{aligned} r_0 &= 4\,R\,sin\,\frac{A}{2}\,sin\,\frac{B}{2}\,sin\,\frac{C}{2} = R\,(1 + cos\,A + cos\,B + cos\,C) \\ r_1 &= 4\,R\,sin\,\frac{A}{2}\,cos\,\frac{B}{2}\,cos\,\frac{C}{2} = R\,(1 - cos\,A + cos\,B\,cos + C) \\ r_2 &= 4\,R\,cos\,\frac{A}{2}\,sin\,\frac{B}{2}\,cos\,\frac{C}{2} = R\,(1 + cos\,A - cos\,B + cos\,C) \\ r_3 &= 4\,R\,cos\,\frac{A}{2}\,cos\,\frac{B}{2}\,sin\,\frac{C}{2} = R\,(1 + cos\,A + cos\,B - cos\,C), \end{aligned} \tag{8}$$

takže platí identita

$$- sin\,\frac{A}{2}\,sin\,\frac{B}{2}\,sin\,\frac{C}{2} + sin\,\frac{A}{2}\,cos\,\frac{B}{2}\,cos\,\frac{C}{2} + cos\,\frac{A}{2}\,sin\,\frac{B}{2}\,cos\,\frac{C}{2} + \\ + cos\,\frac{A}{2}\,cos\,\frac{B}{2}\,sin\,\frac{C}{2} = 1.$$

Z trojúhelníka $K_3\,A\,V$ plyne

$$\overline{K_3\,V}^2 = \frac{r_3^{\,2}}{cos^2\,\frac{A}{2}} + 4\,R^2\,cos^2\,A + \frac{4\,R\,r_3}{cos\,\frac{A}{2}}\,cos\,A\,cos\left(\frac{A}{2} + B\right);$$

a dosadíme-li tu příslušné výrazy právě odvozené, obdržíme

$$\overline{K_3 V}^2 = 16\, R^2 \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} + 4\, R^2 \cos^2 A + 16\, R \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos A\,.$$
$$.\, - R \sin \frac{B-C}{2}$$
$$= 16\, R^2 \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} + 4\, R^2 \cos^2 A -$$
$$- 16\, R^2 \cos A \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} +$$
$$+ 16\, R^2 \cos A \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}$$
$$= 32\, R^2 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} + 4\, R^2 \cos^2 A - 4\, R^2 \cos A \sin B \sin C.$$

Poněvadž platí známá identita

$$- \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \cos A \sin B \sin C,$$

můžeme dále psáti

$$\overline{K_3 V}^2 = 2\, r_3^2 + 4\, R^2 \cos^2 A - 2\, R^2 (- \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C),$$

a konečně

$$\overline{K_3 V}^2 = 2\, r_3^2 + 4\, R^2 - 2\, R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$$

Přihlížíme-li pak k relaci (4), obdržíme

$$\overline{K_3 V}^2 = 2\, r_3^2 - 4\, R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Se zřetelem na (5) dojdeme k obecnému vzorci

$$\overline{K_i V}^2 = 2\, (r_i^2 + e^2 - r^2), \quad \text{kde } i = 0, \ldots, 3. \tag{9}$$

Poněvadž bod H půlí úsečku $V K$, proto jest

$$2\, \overline{K_3 H}^2 = \overline{K_3 V}^2 + \overline{K_3 K}^2 - 2\, \overline{H K}^2 = 2\, r^2 + 4\, r\, r_3 + 2\, r_3^2.$$

Tím obdržíme

$$K_i H = r_i + r, \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \quad K_0 H = r_0 - r, \tag{10}$$

kteréžto relace potvrzují větu Feuerbachovu.

5. Z rovnic (3) aneb (8) obdržíme sečtením

$$r_1 + r_2 + r_3 - r_0 = 4\, R$$

a dále

$$(r_2 + r_3)(r_1 - r_0) + (r_3 + r_1)(r_2 - r_0) + (r_1 + r_2)(r_3 - r_0) =$$
$$= 4\, R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C),$$

takže

$$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 - r_0 r_1 - r_0 r_2 - r_0 r_3 = 2\, R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) =$$
$$= \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Z (8) plyne dále

$$r_1 r_2 r_3 - r_0 r_1 r_2 - r_0 r_2 r_3 - r_0 r_3 r_1 =$$

$$= 8 R^3 \sin A \sin B \sin C \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \right.$$

$$\left. - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) =$$

$$= 8 R^3 \sin A \sin B \sin C \left(\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B+C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2}\right) = 0.$$

Poněvadž dosazením z rovnic (3′) plyne bezprostředně, že

$$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = s^2,$$

proto obdržíme z rovnice $r_1 r_2 r_3 - r_0 (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) = 0$, že

$$\frac{r_1 r_2 r_3}{r_0} = s^2$$

a násobením rovnic (8) obdržíme

$$r_0 r_1 r_2 r_3 = \varDelta^2.$$

Jsou tudíž poloměry r_1, r_2, r_3, $-r_0$ kořeny rovnice

$$x^4 - 4 R x^3 + 2 R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) x^2 - \varDelta^2 = 0,$$

kdežto $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$, $\frac{1}{r_3}$, $-\frac{1}{r_0}$ jsou kořeny rovnice

$$\varDelta^2 x^4 - 2 R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) x^2 + 4 R x - 1 = 0.$$

Snadno odvodíme, že platí rovnice

$$r_1 r_2 - r_1 r_0 - r_2 r_0 = (s-c)^2, \quad r_2 r_3 - r_2 r_0 - r_3 r_0 = (s-a)^2,$$
$$r_3 r_1 - r_3 r_0 - r_1 r_0 = (s-b)^2$$

a že poloměry všech kružnic vně vepsaných trojúhelníkům, majících danou kružnici k_0 jakožto společnou kružnici vnitř vepsanou, jsou kořeny rovnice

$$x^3 - (4 R + r_0) x^2 + s^2 x - s^2 r_0 = 0$$

a poloměry všech kružnic vepsaných trojúhelníkům, pro něž daná kružnice k_i jest společnou kružnicí vně vepsanou, jsou kořeny rovnice

$$x^3 - (4 R - r_i) x^2 + (s - a_i)^2 x - (s - a_i)^2 r_i = 0,$$

kde a_i značí stranu trojúhelníka, jíž se k_i dotýká.

6. Zvolme pravoúhlou soustavu souřadnou, pro niž rovinu, v níž se uvažované útvary nacházejí, zvolíme za rovinu $(x\,y)$, bod K za počátek a $K\,V$ za kladnou část osy x, při čemž předpokládáme, že body K_1', K_2', K_3' mají kladné souřadnice z. Pak budou cykly k_i $(i = 0, \ldots 3)$ cyklografickými

průměty bodů, jež následkem rovnic (7) budou ležeti na rotačním paraboloidu

$$x^2 + y^2 = 4\,r\,(z + r) \tag{11}$$

a následkem rovnice (9) na ploše

$$(x - 2\,e)^2 + y^2 - 2\,z^2 = 2\,(e^2 - r^2). \tag{12}$$

Sečtením obou rovnic obdržíme kužel

$$(x - e)^2 + y^2 - (z + r)^2 = 0. \tag{13}$$

Když rovnici (11) násobíme 2 a pak od ní odečteme rovnici (13), obdržíme rovnici

$$(x + e)^2 + y^2 + (z - 3\,r)^2 - 2\,(e^2 + 8\,r^2) = 0, \tag{14}$$

která vyjadřuje plochu kulovou. Odečtením rovnic (11) a (13) dospějeme k válci

$$(z - r)^2 = -\,2\,e\left(x - \frac{e}{2} - \frac{2\,r^2}{e}\right). \tag{15}$$

Všecky tyto plochy tvoří svazek o základní křivce sférické (s) čtvrtého řádu. Rovnice jejího průmětu orthogonálného s do $(x\,y)$ plyne z (11) a (13) vyloučením $(z + r)$ ve tvaru

$$(x^2 + y^2)^2 - 16\,r^2\,[(x - e)^2 + y^2] = 0. \tag{16}$$

Křivka ta má tedy body kruhové v nekonečnu za body vratu a bod H za ohnisko.

Kružnici h lze považovati za kružnici vrcholovou kuželosečky v, která má K a V za ohniska. Pak jest trojúhelník $A\,B\,C$ kuželosečce v opsán a kružnici k vepsán. Proto lze sestrojiti nekonečné množství trojúhelníků, které jsou v opsány a k vepsány. Poněvadž pro všecky tyto trojúhelníky $A_\lambda\,B_\lambda\,C_\lambda$ jest (h) kružnicí devíti bodu, plyne, že pro ně plochy (11), ... (15) se též nemění; pročež středy kružnic všem trojúhelníkům $A_\lambda\,B_\lambda\,C_1$ vnitř i vně vepsaných popisují cyklickou křivku (16). Vzhledem na (4) a (5′) mají všecky tyto trojúhelníky tu vlastnost, že pro ně má součin $\cos A_\lambda \cos B_\lambda \cos C_\lambda$ a součet $a_\lambda{}^2 + b_\lambda{}^2 + c_\lambda{}^2$ stálou hodnotu; všecky trojúhelníky tyto mají bod V za bod výšek.

7. Přihlížejme ještě k trojicím bodů utvořeným ze středu K_0, K_1, K_2, K_3. Každá z nich tvoří trojúhelník, pro nějž zbývající bod jest jeho bodem výšek. Kružnice l_0, l_1, l_2, l_3 opsané trojúhelníkům $K_1\,K_2\,K_3$, $K_2\,K_3\,K_0$, $K_3\,K_0\,K_1$, $K_0\,K_1\,K_2$ mají vesměs poloměry rovné $4\,r$; neboť kružnice k jest jejich společnou kružnicí devíti bodů. Vytkněme si jednu z nich, na př. l_0 Kružnice ta jest průmětem orthogonálným do uvažované roviny M křivky (l_0), v níž rovina $K_1'\,K_2'\,K_3'$ protíná paraboloid rotační (11), který má kružnici k za stopu do roviny M. Jest tedy stopa s_0 této roviny přímkou potenční kružnic k a l_0. Jelikož rovina $K_1'\,K_2'\,K_3'$ spojuje vrcholy kuželů $(K_1'\,k_1)$, $(K_2'\,k_2)$, $(K_3'\,k_3)$, proto jest s_0 osou podobnosti cyklů k_1, k_2, k_3.

Poněvadž K_0 jest bodem výšek, l_0 kružnice opsaná a k kružnice devíti bodů pro trojúhelník $K_1 K_2 K_3$, proto, značíme-li L_0 střed kružnice l_0, jest $K_0 K = K L_0$.

Leží tedy středy L_0, L_1, L_2, L_3 kružnic l_0, l_1, l_2, l_3 na křivce s^* centricky souměrné k s vzhledem k bodu K. To platí vzhledem ke každému z trojúhelníků $A_\lambda B_\lambda C_\lambda$.

Máme-li v rovině paraboly (p) na přímce q, která není s její osou o rovnoběžná, dvě direktně shodné řady bodové, a promítneme-li tyto ve směru o na parabolu (p), obdržíme na této dvě promětné řady bodové, jejichž dvojné elementy splývají s nekonečně vzdáleným bodem na (p). Z toho plyne, že přímky, které spojují příslušné sobě body těchto řad na (p), budou obalovati parabolu p^* s (p) souosou a shodnou. Budiž nyní přímka q kolmá k ose o a vzdálenost příslušných sobě bodů na ní budiž $4\,p$, znamená-li p parametr paraboly dané (p), pak vzniká p^* translací paraboly (p) ve směru osy o o délku $2\,p$.

Z toho usuzujeme, že roviny $(K_1' K_2' K_3')$, $(K_2' K_3' K_0')$, $(K_3' K_0' K_1')$, $(K_0' K_1' K_2')$ a obdobné čtyři roviny odvozené pomocí kteréhokoliv z trojúhelníků $A_\lambda B_\lambda C_\lambda$ dotýkají se paraboloidu P shodného s paraboloidem (11), jenž z něho vzniká posunutím v kladném směru osy z o délku $2\,r$. Bod dotyku (L_0) roviny $(K_1' K_2' K_3')$ s P promítá se orthogonálně na rovinu **M** do středu L_0 kružnice l_0. Budiž nyní (s^*) křivka na ploše (11) orthogonálně symetrická k (s) vzhledem k ose z a (u) budiž křivka průniku paraboloidu P s válcem rovnoběžným k z procházejícím křivkou (s^*), takže vzniká (u) z křivky (s^*) posunutím v kladném směru osy z o délku $2\,r$. Tím poznáváme, že čtveřiny uvedených rovin odpovídající všem trojúhelníkům $A_\lambda B_\lambda C_\lambda$ tvoří čtyřstěny vepsané ploše (11) a opsané ploše P; vrcholy jejich popisují křivku (s) a stěny jeho dotýkají se plochy P na křivce (u). Stěny tyto obalují tudíž rozvinutelnou plochu 4. třídy, pročež osy podobnosti s_0, s_1, s_2, s_3 trojic $k_1 k_2 k_3$, $k_2 k_3 k_0$, $k_3 k_0 k_1$, $k_0 k_1 k_2$, vzniklé ze všech trojúhelníků $A_\lambda B_\lambda C_\lambda$ obalují křivku 4. třídy.

Můžeme vysloviti větu:

„Je-li a délka hlavní poloosy libovolné kuželosečky středové v a k kružnice poloměru $2\,a$ mající střed v jednom jejím ohnisku K, lze kuželosečce v opsati nekonečné množství trojúhelníků $A\,B\,C$ do kružnice k vepsaných; trojúhelníky ty mají druhé ohnisko V kuželosečky v za společný bod výšek a všecky kružnice trojúhelníkům těm vnitř i vně vepsané dotýkají se kružnice vrcholové (h) kuželosečky v; osa podobnosti libovolných tří orientovaných kružnic takovému trojúhelníku $A\,B\,C$ vepsaných jest přímkou potenční kružnice procházející středy jejich a kružnice k; tyto osy podobnosti přináležející takto všem trojúhelníkům $A\,B\,C$ obalují křivku 4. třídy.“

Křivky v a k jsou homologické pro K jakožto střed homologie; je-li $K\,M'$ poloměr v k kolmý k ose $K\,V$ a protíná-li v v bodě M, pak tečna m v bodě M k v protíná tečnu m' kružnice k v M' v bodě R náležejícím ose homologie. Průsečík S přímky m s KV leží na přímce řídící kuželosečky v pro ohnisko K; platí tedy úměra $\overline{MK} : \overline{KS} = e : a$, v níž e značí výstřednost kuželosečky k. Je-li T pata kolmice s R na KV, pak následkem této úměry obdržíme, že $ST = 2\frac{a^2}{e}$. Jest proto přímka řídící kuželosečky vzhledem k ohnisku V jednou osou homologie mezi k a v. Je-li tudíž J jeden ze společných bodů křivek k a v na této ose, jest VJ tečna k v v bodě tom. Protínají tudíž tečny z J k v kružnici k v bodě J_1 v nekonečnu a v bodě k němu soumezném J_1'; jest tedy přímka $J_1 J_1'$ tečnou kružnice k a prochází tudíž středem jejím K, ohniskem to křivky v; jest proto $J_1 J_1'$ též tečnou k v. Tím jsme dospěli k trojúhelníku $J J_1 J_1'$, který jest v opsán a k vepsán; jest tudíž takových trojúhelníků nekonečné množství. Můžeme ale též uvažovati následovně.

Kružnice k seče KV ve dvou bodech, z nichž alespoň jeden G leží vně kuželosečky v. Kružnice nad průměrem GK seče kružnici vrcholovou ve dvou bodech G_1, G_2 a přímky GG_1, GG_2 jsou tečnami k v; ony protínají k ještě v bodech G_1', G_2', jejichž spojnice jest tečnou vrcholovou křivky v. Tak jsme obdrželi realný trojúhelník, jenž jest k vepsán a v opsán. Tím jest uvedená věta dokázána.

Snadno obdržíme též větu:

„Body výšek v trojúhelnících, jež jsou jedné kružnici k vepsány a druhé kružnici k_i opsány, popisují kružnici h; středy všech dalších kružnic trojúhelníkům těm vepsaných leží na další kružnici l, a kružnice uvedené protínají přímku potenční kružnic k, l v stejných úhlech.“

Jsou-li R a r_i poloměry kružnic k, k_i, jest $2R$ poloměr kružnice l a $\frac{R}{2} + r_i$, resp. $\frac{R}{2} - r_i$ poloměr kružnice h.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 3.

O pisolithických rudách železných s příměsí bauxitovou v české křídě.

Napsal

F. SLAVÍK.

(Předloženo dne 13. ledna 1922.)

Na dvou nalezištích české křídy, a to v jejím nejspodnějším souvrství, Zabálkově pásmu I. = vrstvách peruckých Krejčího a Friče, vyskytují se sporadicky rudy železné, které již svým vzhledem připomenou železité bauxity nalezišť jihoevropských a vzbudí otázku po genetických analogiích s velkými recentními i fossilními výskyty koloidálního kysličníku resp. hydroxydu hlinitého a železitého, tak často diskutovanými v literatuře posledních 2—3 desítiletí.

I. Mezi Ranskem a Borovou.

Mezi Ranskem a Borovou u Přibyslavě byly v minulých letech v činnosti doly na železnou rudu, hlavně limonit, jež daly základ železárnám, již v polovině 18. století dosti velikým a pak zvláště od druhého desítiletí stol. 19. rozšířeným. Dolování již v sedmdesátých letech minulého století bylo blízko zániku, konečně zastaveno docela a od té doby staly se jen nepatrné pokusy kutací; dnes jen rozlehlé obvaly a zarostlé haldy a rybníčky v lesnatém, z části slatinném terénu, vzniklé na místech někdejšího povrchového dolování, naznačují dřívější rozsah prací hornických.

Po několika stručných zmínkách ve starší literatuře¹) podali J.

---

¹) U Kašpara hr. Sternberga v jeho „Umriss einer Geschichte der böhmischen Bergwerke" z r. 1836 a 1838, jakož u F. X. M. Zippe v „Die Mineralien Böhmens" odd. 4 (Verhandl. d. Gesellsch. d. vaterl. Museums 1838) nenacházíme ještě vůbec zmínky o železných rudách u Ranska a Borové, teprve u J. G. Sommera v XI. díle jeho topografického díla „Königreich Böhmen" (Časlauer Kreis) z r. 1843. V. v. Zepharovich v Mineralogisches Lexikon des Kaiserthums Oesterreich

Krejčí a R. Helmhacker[2]) zevrubnější popis ložisk rudních, jež zastihli ještě odkryta krátce před zánikem těžních prací.

Pro posouzení ložisk rudních a jejich vzniku mají podstatný význam pozorování Krejčího a Helmhackera, že rudní ložiska mají povahu ložní, omezují se na massiv extremně basických vyvřelin hlubinných, mezi nimiž autoři rozeznávají serpentin, troktolith a diorit, v podloží přecházejí ponenáhlu do nerozložené horniny a v nadloží, kde toto jest zachováno, jsou pokryty písčitolupkovými rozpadlými sedimenty nejspodnějších vrstev křídových (peruckých), které samy namnoze jsou hnědelem proniknuty a zbarveny.

K. Hinterlechner mapoval v prvém desítiletí tohoto století německobrodský list mapy speciální pro vídeňský říšský geologický ústav a v publikacích tohoto uveřejnil dvě práce, v nichž mluví též o našich rudách: jednak celkový geologický popis listu německobrodského[3]), jednak spolu s C. v. Johnem[4]) petrografický a chemický výzkum vyvřelin, hlavně basických. Za jeho pobytu v krajině borovské byly doly již úplně zašlé a nemohl již nalézti ani zbytků vrstev peruckých a hnědelových příkrovů odkrytých v profilech, za to bylo možno nasbírati úplnou řadu přechodů od prvních stop zbarvení pevné horniny do hněda až k sypkému okrovitému hnědeli, a na místě, jež přesně vyznačuje i na mapě a jež odpovídá i mnou nalezeným rudám pisolithickým, našel vzorky těchto, které zkoumal i mikroskopicky. Mimo převládající hnědel konstatoval v nich i úlomky klastického křemene a nerost chloritický.

Postupný rozklad olivinovců až do hnědele s příměsí chloritickou sledoval Hinterlechner též mikroskopicky a vytýká nedostatek křemene klastického na rozdíl od rudy oolithické. Podrobným mapováním ranského massivu basických vyvřelin konstatoval Hinterlechner, že produkty differenciace jsou horniny gabbrové, noritové, troktolithové, pyroxenitové i peridotitové, z nichž poslední, omezené na východní polovinu massivu, namnoze podlehly serpentinisaci. Výskyty pak rudní, až na je-

---

ve svazku I. (1859) str. 243 reprodukuje nepřesnou zprávu z knihy F. v. Hauera a F. Foetterle: Geologische Übersicht der Bergbaue der oesterreichischen Monarchie, Víd. 1855, kdež se obě místa kladou k Polné, k jejímuž panství tehdy náležela, a výskyt se charakterisuje jako „Limonit in Geoden auf einem etwa 4 Klafter mächtigen Lager im Gneis, in Tagbauen abgebaut“ a udává obsah železa v něm na 22% ; v díle II. str. 181—2 opravuje tato nesprávná udání na základě mapovací zprávy F. v. Andriana, Geologische Studien aus dem Chrudimer und Časlauer Kreise, Jahrb. Geol. Reichsanst. 1863 (XIII) 183—209 a tamtéž, Verhandl. str. 26—28, dodávaje, že r. 1863 těžba byla již zastavena.

[2]) Krejčí a Helmhacker, Vysvětlivky ku geologické mapě Hor Železných a okolních okrsků ve východních Čechách, Archiv přír. výzk. Čech V. 1, 1891, str. 118—120; obšírnější německé vydání tamt. 1881, str. 194—196.

[3]) K. Hinterlechner, Geologische Verhältnisse im Gebiete des Kartenblattes Deutschbrod, Jahrb. geol. Reichsanst. Wien 1907 (57), 115—388.

[4]) Hinterlechner und v. John, Über Eruptivgesteine aus dem Eisengebirge in Böhmen, tamt. 1909 (59), 127—244.

diný položený nejdále k SV (důl Ranský, snad též Gabrielin a Polničský), jsou vázány na tyto olivinovce a hadce.

V archivu panství přibyslavského, k němuž náleží lesy ransko-borovské, vypátral Hinterlechner záznamy o 6 analysách ranských rud, provedených r. 1843 ve vídeňském „Probieramtu,“ a otiskuje je v prvé práci na str. 180, ve druhé na str. 211. Výsledky jsou nevalné, železa kovového 26·76 — 31·44%, SiO_2 23·86 — 34·37; ruda ze starého dolu Borovského měla Al_2O_3 13·81%, z Ranského 12·03, z Mikulášského 15·40. V manuskriptní zprávě o ranských dolech od F. Schallera, citované u Hinterlechnera (prvá práce str. 179), prohlašují se ovšem tyto výsledky za neshodné s celkovou povahou rudních ložisk; skutečný průměr rud byl jenom sotva 19—26% Fe; byly tedy analysovány v „Probieramtu“ zajisté jen vybrané pěkné vzorky rudní, ne průby hornicky brané.

Dnešní stav rudních nalezišť mezi Ranskem a Borovou se neliší od toho, jejž zastal před 15 lety Hinterlechner. Většinou již ani hnědelových rud nelze nalézti, ani přechodů z hadců a jiných zvětralých silikátových hornin ve hnědel. Jediné místo, kde poněkud jest možno činiti pozorování o výskytu rud, jsou jihovýchodní a východní břehy většího, západnějšího ze dvou rybníčků, jež vyplňují hlavní část bývalých povrchových dolů Borovských. Zde možno sbírati rudy, jež Krejčí a Helmhacker i Hinterlechner označují jakožto rudy oolithické č. zkrátka oolith.

V lesíku blízko jihovýchodního koutu západnějšího, většího rybníčku, kde jižní břeh počíná vbíhati dovnitř rybníčku, byla na podzim r. 1917 na zkoušku vykopána a opět zasypána jáma o průměru asi $3^1/_2$ *m* a při ní hromada „oolithické rudy“ navršena. Na východním břehu většího rybníčku vystupuje dole u vody hadec, svrchu zvětralý ve hnědel, ale nahoře, asi v horní třetině břehu, se vyskytují kusy „oolithické rudy“; při velmi špatném odkryvu v zalesněném terénu možno tu jen s reservou odhadnout délku východu rudního na 10 — 12 *m* a mocnost asi na 2 *m*; dále od břehu zakrývá všechno les. Vprostřed výšky břehu se „oolithická ruda“ a hadec míchají, rudy se zdá k severu poněkud přibývati. Dále k V v lese, na sever od východnějšího menšího rybníčka, jsou kusy „oolithické rudy“ roztroušeny po lese na rozloze asi 60 × 50 *m*. Příkop, spojující oba rybníčky a místy asi 1 *m* hluboký, odkrývá jen vrstvy hlinité s několika málo zaoblenými kusy rudy.

Na severní straně většího rybníčku se zaoblené kusy rudy najdou jen velmi pořídku, jinak jen zvětralý hadec a jeho ssuť.

V ostatních obvalech (Josef, Gabriela) jsem nespatřil ani stopy po „rudách oolithických“.

Pisolithická ruda, jak ji zde raději budeme nazývati — pro oolithy rud železných je charakteristický spíše tvar zploštělý — skládá se za čerstva z celistvé základní hmoty a z pisolithů, jež v ní jsou roztroušeny dosti řídce, tak že se nikde navzájem nedotýkají. Základní hmota má barvu

tmavě šedohnědou, bez lesku, vryp světlejší, nažloutle hnědý; tvrdost její jest v různých partiích $3^1/_2$—4, tedy v mezích hnědele a vyšší než obyčejně u bauxitu; u tohoto, pokud se udává, bývá vyjadřována čísly velmi nízkými, na př. v nejnovější určovací knížce A. Lehnerově $^1/_2$—1, v knize J. Volney Lewise v širších mezích pro kompaktnější odrůdy 1—3, pro zemité až 0[5]).
Na četných ukázkách bauxitů francouzských, italských i jugoslavských zjištěno též, že kolísá v širokých mezích, jsouc nejčastěji v kompaktních partiích $2^1/_2$—3.

Pisolithy mají tvar kulovitý, nezploštělý, průměr $^1/_2$—2 *mm*, velkou většinou okolo 1 *mm*. Jsou černé se silným leskem kovovým, vryp jest hnědorudý, tvrdost 6—$6^1/_2$. Podle těchto znaků mohou náležeti jak k bezvodému haematitu, tak k nejnižšímu hydrátu 2 $Fe_2O_3 . H_2O$, turjitu, jejž nedávno po stránce mineralogické charakterisoval L. J. Spencer[6]) na základě materiálu z Nového Skotska.

Rozhodnouti o příslušnosti pisolithů k haematitu nebo turjitu by bylo možno bezpečně jen na materiálu isolovaném, ale toho z našich rud nelze obdržeti, ježto za čerstva jsou pisolithy pevně srostlé se základní hmotou a nevylupují se z ní při roztloukání. Jediný kvalitativní rozdíl jest dekrepitace turjitu zahřívaného v baničce; zkusiv v tom směru dosti velké množství pisolithů přesvědčil jsem se, že dekrepitují z nich jen některé, asi čtvrtina; snad tedy jsou v nich zastoupeny oba nerosty.[7])

Makroskopicky jsou pisolithy úplně celistvé, beze znatelné struktury nebo mají jen na periferii tenounké koncentrické vrstvičky méně kompaktní, barvy hnědorudé.

Větráním i základní hmota i pisolithy pozbývají své kompaktnosti, stávají se zemitými a nabývají barvy rudé; navětralé pisolithy se obyčejně snáze mechanicky oddělují od základní hmoty.

Hustota celé horniny byla stanovena hydrostaticky ve dvou průbách na 3·27 a 3·33, průměrem tedy 3·3.

V mikroskopu jest největší část základní hmoty velice kalná, jen slabounce prosvítajíc barvou rezavě hnědou; jeví se pak mezi zkříženými nikoly úplně isotropní. V ní jsou uzavřeny oblé i hranaté útržky kalně šedé, jen na nejčistších místech bezbarvě průhledné; tyto se mezi zkříženými nikoly ukazují býti složeny z velmi jemných dvojlomných šupinek a zdá se, že náležejí sedimentární hornině slídnato- neb kaolinicko-jílovité.

---

[5]) A. Lehner, Tafeln zum Bestimmen der Mineralien mittelst äusserer Kennzeichen, Berlin-Leipzig 1921 (str. 42). — J. Volney Lewis, A manual of determinative mineralogy, New York 1921, str. 47, 92, 256—7.

[6]) L. J. Spencer, Mineralogical characters of turite (= turgite) and some other iron ores from Nova Scotia, Miner. Magaz. XVIII. 339—348, 1919.

[7]) V bauxitu z Mazinu, ve Velebitu, dokázal Tućan bezvodou povahu černých oolithů (srovn. M. Kišpatić, Bauxite des kroatischen Karstes und ihre Entstehung, N. Jahrb. für Min. etc. Beilageband XXXIV. 512—3, 1912).

Příměs klastického křemene, kterou zjistil ve svém materiálu Hinterlechner, ve výbrusech z mých vzorků nebyla nalezena.

Jen pořídku vyskytují se v základní hmotě drobné pisolithy složené z téže kalné rezavě hnědé hmoty, nebo, zvláště na krajích, jen o málo bledší; jejich průměr kolísá okolo 0·3 *mm*.

Mimo tuto převládající základní hmotu neprůhlednou však zastihneme ve výbruse i partie *bauxitové*, průhledné neb silně průsvitné barvou *nazelenale* žlutou, jež prozrazují reliefem velmi zřetelným svou vysokou lámavost světelnou a jsou naprosto *isotropní*. Zelenavý odstín, jímž se liší tento bauxit ode všech jiných, které jsem dosud mohl mikroskopicky pozorovati, je snad podmíněn příměsí chromu analyticky dokázanou, v jiných výskytech neobvyklou. V tomto průhledném bauxitu jsou dosti hustě roztroušeny skvrny rudohnědé základní hmoty, průřezů obyčejně zaoblených a dosti isometrických; hranice obojí základní hmoty bývají většinou dost ostré a jen někdy jsou rudohnědé uzavřeniny obklopeny jakýmsi obláčkem; jinde prostupují průhledným bauxitem rezavé pruhy s méně zřetelnými hranicemi.

Rozpukání v základní hmotě jest zcela nepravidelné, síťovitě rozvětvené.

Velmi vzácná jest ve výbrusech příměs *hydrargillitu*. Na jediném místě výbrusu mohl byti bezpečně určen; tvoří tu malý, klubíčkovitý shluk v základní hmotě, jehož struktura jest změteně lupenitá; lupínky jeví zdvojčatění, při němž individua se plochami spodovými kladou na sebe a v příčných průřezech zhášejí pak srostlice ob jednoho jedince, s hranicemi dvojčatnými rovnoběžnými ke štěpnosti. Šikmost zhášení v jednom řezu stanovena asi na 23° (kompensací v agregátu se ovšem určení stává nedosti přesným), optický ráz směru rovnoběžného ke štěpným trhlinám jest negativní. To souhlasí s optickým schematem hydrargillitu, jak je stanovil W. C. Brøgger (šikmost zhášení na (010) $\alpha : a = 25^0\,26'$, dvojlom positivní). Celý ten shluk hydrargillitový úplně se podobá onomu z obr. 6 na tab. XVI. Lacroixova díla o lateritech guinejských (pancíř pisolithického lateritu z vrcholu hory Urussy.)

Mimo tento shluk snad náleží k hydrargillitu i jednotlivé šupinky, velmi pořídku roztroušené jak ve hmotě základní tak i v pisolithech. Celkový jeho podíl na složení rudy je však jen minimální.

Kulovité pisolithy leží v základní hmotě dosti hustě, ale ne tak, aby se dotýkaly. Typického oolithového zploštění nepozorujeme, rovněž zvrstvení koncentrické je zřetelné jen pořídku, a to v počátečních stadiích přeměny a jen na periferii, kdežto jádro pisolithu zůstává kompaktní; pak se na periferii střídá černá hmota vlastní pisolithům s rudohnědou, nelišící se vzhledem a barvou od základní hmoty; v této pak bývá kolem pisolithů silnější rudohnědé zbarvení a tmavé skvrny, po krajích rozplývavé.

Místy proces ten pokročil dále do vnitra, až vznikly — možno říci — pseudomorfosy základní hmoty po pisolithech, z jichž původní hmoty zbývá jen úzký proužek periferický a neurčitě omezená, rozplývavá partie v centru.

Tenké septariové praskliny koncetrické i radiální jsou v pisolithech dosti časté a vyplněny hmotou základní.

Chemická analysa pisolithické rudy z Borovského dolu, vykonaná laskavě panem Dr. V. Veselým, dala tento výsledek:

Nerozpustno v *HCl*	18·56 %	SiO_2	7·38 %
		Al_2O_3	9·98
		Fe_2O_3	1·20
Fe_2O_3	56·03		
Al_2O_3	9·65		
Cr_2O_3	3·50		
SO_3	0·93		
H_2O nad 110°	8·92		
H_2O hygrosk.	2·37		
	99·96 %		

Ve stopách zjištěny dále: Mn, Cu, Ti O_2, P_2 O_5.

Nerozpustný zbytek měl, na 100 % přepočten, složení

SiO_2	39·76 %
Al_2O_3	53·77
Fe_2O_3	6·47
	100·00

Obsah kovového železa v rudě analysované jest 39·22 %.

II. Mezouň u Tachlovic.

J. Vála a R. Helmhacker popisují v dodatku ke svému spisu o železných rudách mezi Prahou a Berounem[8]) výskyt hnědelových rud v peruckých vrstvách krajiny zbuzanské, mezi nimiž se vyskytly odrůdy oolithické od Zbuzan na západ k Dobříči i na východ až skoro k Butovicům. Pan kol. Dr. Břet. Zahálka potvrdil mi nálezy ty z míst pod vrcholem cô. 337 mezi Ohradou a Novou Vsí, kde se rudy takové vyskytly spolu s železitými pískovci a slepenci. Podobné rudy roztroušené mezi jiným kamením v cestách a na polích ovšem nedávají jistoty o geologickém niveau, z něhož pocházejí, stejně jako zde popsané rudy z Mezouně; Vála a Helmhacker však z jednoho místa, „na průhoně" mezi Zbuzany a Dobříčí při cestě ode dvora Mirešic, uvádějí odkryv s oolithickými rudami zřetelně tvořícími vložku ve vrstvách peruckých. Podle toho tyto rudy, složením nerostným a strukturou totožné s ransko-borovskými, vystupují i zde v témže geologickém niveau jako tam a možno snad se nadíti i dalších nálezů jejich v tak rozšířeném nejspodnějším souvrství naší křídy.

---

[8]) Vála a Helmhacker, Ložiště železných rud u Prahy a Berouna, Arch. přír. výzk. Čech II. 1 c), něm. 1874, česky 1877.

Materiál, o jehož výzkumu zde podávám zprávu, vyskytuje se roztroušen v polích i cestách mezi Nučicemi a Mezouní západně ode dvora Letník, severně pod jámami na ohnivzdorne jíly, o nichž nejnověji Břet. Zahálka[9]) má za nerozhodnuto, náleží-li také křídě či třetihorám. Na výskyt ten mne laskavě upozornil před několika lety pan báňský inženýr V. Šusta, tehdy v Nučicích.

Makroskopicky se shoduje mezouňská ruda s předešlou úplně až na to, že její základní hmota jest světle šedorudá, místy až bělavá, kdežto pisolithy i zde jsou za čerstva černé, kovově lesklé a rozkladem mění barvu v rudou; jsou poněkud řidčeji roztroušeny. I zde mají pisolithy tvrdost 6 neb i něco málo nad to, vryp tmavě hnědorudý, základní hmota okolo $3^1/_2$ a vryp světle šedohnědý neb narudlý.

V mikroskopu základní hmota jest dosti kalná, prosvítajíc jednak hnědě, jednak narudle a na rozdíl od ranské je plná drobných pisolithů skoro stejně zbarvených, jen o málo tmavších. Hmota bauxitická je zde světle hnědá se šedým zákalem, bez odstínu do zelenava (ruda obsahuje chrómu jen malé stopy). V čistších partiích, kterých je poskrovnu a které mají ráz výplní krátkých žilek, je hnědé zbarvení v různé intensitě obláčkovitě rozplývavé, místy jsou takové partie až čiré. Jak tyto čistší tak kalné partie bauxitové jsou absolutně isotropní. V metachloranilinu o lámavosti světelné = 1·59 v prášku bauxitovém nalezneme úlomky s vyšším i nižším lomem světelným než 1·59. To je ve shodě s kolísáním této hodnoty u bauxitu, u něhož zjistil J. L. C. Schroeder van der Kolk n_{Na} okolo 1·57, autor až 1·60—1·61. [10])

Pisolithy i zde jsou jen málo koncentricky vrstevnaté; často mají uzoučkou obrubu světle šedou, úplně kalnou. Vedle celých kuliček nacházíme roztroušeny též jejich hranaté úlomky. Pseudomorfosy hmoty základní po pisolithech jsou časté, septariové rozpraskání někdy velmi pěkně vyvinuto.

---

[9]) B. Zahálka, O užitkových hmotách nerostných v české křídě, Věda přírodní II. str. 46, 1921.

[10]) Schroeder van der Kolk, Tabellen zur mikroskopischen Bestimmung der Mineralien nach ihrem Brechungsindex. II. vyd. 35—6, Wiesbaden 1906.

Slavík, Optická data o některých nerostech. R. Č. Ak. 1917 (XXVI) č. 60, str. 2.

Analysu mezouňské rudy vykonal rovněž kol. Veselý a obdržel

Nerozp. zbytku	27·58 %	5·23 % SiO_2 17·97 Al_2O_3 4·38 Fe_2O_3
Fe_2O_3	41·43	
Al_2O_3	14·63	
CaO	0·83	
SO_3	0·11	
H_2O nad 110°	14·52	
H_2O hygrosk.	1·37	
	100·47 %.	

Ve stopách konstatováno TiO_2, V_2O_5 a P_2O_5.
Kovového železa obsahuje ruda 28·99 %.
Nerozpustný zbytek přepočten na 100 % dává:

SiO_2	18·96 %
Al_2O_3	65·15
Fe_2O_3	15·89
	100·00 %

III.

Celkové chemické složení obou rud i jejich kvalitativní určení mineralogické vykazuje jim místo mezi *hlinitými rudami železnými*, k nimž chemicky náleží i četné laterity. To vysvítá ze srovnání:

	Ransko	Mezouň	I.	II.	III.
Al_2O_3	19·63	32·60	18·—	17·97	32·65
Fe_2O_3	57·23	45·81	60·—	55·94	47·27
SiO_2	7·38	5·23	4·—	14·89	3·56
H_2O	8·92	14·52	18·—	11·03	15·87

I. Pisolithický limonit z Paradou v Provenci, Al. Lacroix, Minéralogie de la France et ses colonies III. 343 (analytik neuveden).
II. Diabasový laterit surinamský, anal. Kupffer, v. G. C. Du Bois, Beitrag zur Kenntniss der surinamischen Laterit-und Schutzrindenbildungen, Tscherm. Min. petr. Mitt. XXII (1903), 19.
III. Čedičový laterit (z původní lokality), z „trappu“ dekkanského, v. Hintze, Mineralogie I. 1959 a 1964 č. LVIII.

Rozpočítáváme-li obsah našich rud za předpokladu, že všecko Al_2O_3 je v nich přítomno jako sporogelit Kišpatićův a Tućanův = kljakit α Cornuův = koloidální $Al_2O_3 . H_2O$, pak z poměru molekulárních koeficientů pro rudu ranskou *a* a pro mezouňskou *b*

$$Al_2O_3 : (FeCr)_2O_3 : SiO_2 : H_2O = \begin{cases} 193 : 381 : 123 : 496\ a \\ 319 : 286 : 87 \ \ : 807\ b \end{cases}$$

plyne, že po odečtení $Al_2O_3 . H_2O$ zbývá v prvém případě 303 H_2O na 381 $(Fe\,Cr)_2O_3 + 123\,SiO_2$, ve druhém 488 H_2O na 286 $Fe_2O_3 + 78\,SiO_2$; jest tedy jasno, že v rudě ranské zbývá mnohem větší podíl na bezvodý kysličník železitý (nebo na poloviční hydrát turjit) než v mezouňské, anebo, že v této jsou přítomny i vyšší hydráty; neodporují však přec obě analysy důsledkům, k nimž došli hlavně Lacroix a Arsandaux pro bauxity francouzké, Kišpatić a Tućan pro charvatské, že koloidní hydrát $Al_2O_3 . H_2O$ a bezvodý kysličník železitý Fe_2O_3 jsou hlavními podstatnými součástkami těchto hornin.

V jaké formě jest přítomen kysličník křemičitý, nelze určitě říci; část ho připadá na zmíněné uzavřeniny sedimentární horniny, ale není pochyby o tom, že může býti koloidálně adsorbován v převládajících gelech sesquioxydů. Že nerozpustný zbytek přepočtený na 100 % dává výsledky zcela různé, a neztotožnitelné se žádným nerostem, jest přirozeno, zvláště uvážíme-li výsledky pokusů Arsandauxových a Blotových,[11]) podle nichž horká kyselina solná extrahuje z bauxitů často podstatné podíly kysličníku hlinitého, kdežto větší část zůstává ve zbytku nerozpustném.

Arsandaux a Blot konali pokusy s bauxity pokud možno čistými, stanovíce složení nerozpustného zbytku i rozpustné části; výsledky vedly k závěru, že vedle převládajícího $Al_2O_3 . H_2O$ se vyskytují vyšší hydráty hlinité jen v bauxitech bohatších kyselinou křemičitou a že v nerozpustném zbytku jsou obsaženy sloučeniny $Al_2O_3 . H_2O$, $H_4Al_2Si_2O_9$ (kaolinitový silikát) a H_2TiO_3, mající 15, 18·4 a 13·9 H_2O, tak že podíl vody v nerozpustném zbytku je zhruba konstantní okolo 15 %. Naše rudy mají vody vyšší procento v mezouňské se značně menším množstvím SiO_2, tak že jejich složení jest na každý způsob komplikovanější a nelze na ně zplna aplikovati výsledky Arsandauxovy; jisto jest, že obsahují i hydrát železitý a snad i silikát hlinitý koloidální, nerozložitelný v HCl a bohatší vodou.

Prvky ve stopách nalezené: titan, vanad, fosfor jsou charakteristické chemické součástky bauxitů i lateritů a dosahují v některých výskytech (srovn. data sestavená v encyklopedických dílech Hintze a Lacroixe) až podílů několikaprocentních. Nápadně vysoké procento chrómu v rudě ranské jest, pokud jsem mohl zjistit v literatuře, unikem v podobných horninách, vykládá se však přirozeně polohou této rudy nad vyvřelinami peridotitovými, a v menších podílech odpovídají tomu nálezy uveřejněné Lacroixem o železitém příkrovu madagaskarských peridotitů.

---

[11]) Arsandaux. Sur la composition de la bauxite, Comptes rendus de l'Acad. *148*, 936—8 a 1115—1118, 1909.

IV.

Pro posouzení *vzniku* železných rud právě popsaných nejvýznamnějším momentem je podstatný podíl *koloidálního hydroxydu hlinitého*, hmoty *bauxitové*, v nich obsažený.

Hydroxydy hlinité krystalované: diaspor $AlO[OH] = Al_2O_3 . H_2O$ a hydrargillit $Al[OH]_3 = Al_2O_3 . 3 H_2O$ i koloidální hydroxyd, jejž můžeme shrnouti názvem bauxit analogickým názvu hnědel pro koloidální hydroxydy železité, nepřisuzujíce mu určité formule, a nejrozšířenější případ poměru $Al_2O_3 : H_2O = 1 : 1$ označiti názvem sporogelit neb kljakit — mají v přírodě charakteristický výskyt několikerý, a pokud hledíme jen ke hromadnému výskytu v celých ložiskách nerostných, hlavně:

1. *Laterit,* jehož vznik jest podmíněn větráním intensivnějším obyčejného za klimatických poměrů panujících hlavně v tropech, daleko menším rozsahem i v krajích subtropických. Že podstatou lateritového větrání jest rozklad silikátů až na volný hydroxyd hlinitý, dokázal již před více než sto lety Berthier[12]) a ke konci minulého století přesně doložil mikroskopickým i chemickým výzkumem Max Bauer[1]). Laterity prozkoumané Bauerem obsahují jako hlavní součást *krystalický hydrargillit* a jim se podobá i fossilní (třetihorní) laterit, jako bauxit označovaný, z Vogelsbergu v Hesensku. Vedle toho však dokázal Bauer i příměs isotropních hmot a v souhlase s analysami poukazuje na pravděpodobnou přítomnost diasporového hydrátu $Al_2O_3 . H_2O$ v produktech zvětrání obsahujících méně vody a více kysličníku hlinitého než odpovídá hydrargillitu. Ve větším rozsahu zjistili amorfní součást v bauxitech, hlinitých rudách železných a lateritech Al. Lacroix a G. C. Du Bois.[1])

2. *Terra rossa* jest denudační relikt vápenců v krasových územích, jedna z charakteristických jejich známek po celé zeměkouli; místy se hromadí ve větší ložiska na nalezištích primárních i sekundárních. Fr. Tućan [5]) prozkoumal tyto „rudé hlíny" z četných míst charvatského Krasu a zjistil v nich jako hlavní součástku sporogelit, t. j. koloidální $Al_2O_3 . H_2O$ a kysličník železitý, většinou bezvodý, jejž rovněž prohlašuje za koloidální a nazývá haematogelitem, dále řadu akcessorických křemičitanů i jiných nerostů v témže typickém vývinu, v jakém tvoří příměs krasových vápenců a dolomitů. Sporogelit i jeho průvodci jsou authigenní a syngenetickou součástkou uhličitanových hornin a vznikly jako tyto chemickými pochody — povahy dosud ovšem hodně hypothetické — v mořské vodě.

---

[12]) cit. u Lacroix, Minéralogie de la France et ses colonies, t. III, p. 370.

[13]) Bauer, Beiträge zur Geologie der Seyschellen, insbesondere zur Kenntnis des Laterits, Neues Jahrb. f. Min. etc. 1898, II. 165—219.

[14]) G. C. Du Bois, Beitrag zur Kenntnis der surinamischen Laterit- und Schutzrindenbildungen, Tscherm. Min. petr. Mitt. 1903 (XXII.), 1—61.

[15]) Tućan, Terra rossa, deren Natur und Entstehung. Neues Jahrb. f. Min. etc. Beil. B. XXXIV. 401—430, 1912. — Sull'origine della Terra rossa, Giornale di Geologia pratica XII. (1914).

3. *Bauxity* jihoevropské: v Krasu jihoslovanském od Bohinje v Kraňsku až do Dalmacie, v Abruzzách a hlavně v jižní Francii, odkud poprvé byly popsány a kde dosud jsou nejvydatnějším zdrojem pro výrobu aluminia, jsou sedimentární horniny, často charakterisované slohem pisolithickým, jejichž hlavní součástkou jest opět sporogelit, a železo největším množstvím přítomno je v podobě kysličníku bezvodého. Bauxity jihoslovanské jsou petrograficky i chemicky totožné s terrou rossou a M. Kišpatić[16]) na základě tom prohlašuje bauxity vůbec za fossilní terru rossu. Pro ložiska bauxitová v Jugoslavii jsou Kišpatićovy a Tućanovy důvody tak přesvědčivé a pochybnosti pronesené o nich F. Kernerem von Marilaun[17]) tak slabě podepřené, že nutno výklad Kišpatićův a Tućanův uznati za jedině možný a připustiti jeho pravděpodobnost i pro jiná ložiska bauxitová v terénech krasových, t. j. pro valnou většinu jich.

Naproti tomu však musíme přece i nadále býti pamětlivi fakta, že pravé *bauxitické* t. j. sporogelitické horniny zůstávají dokázány, zvláště výzkumy Du Boisovými a Lacroixovými, také z ložisk lateritových.

[4. Jenom per parenthesin, pro úplnost uvádím vznik hydrátů hlinitých při žilných pochodech rázu pneumatolytického, kontaktního a thermálního; jsou to namnoze výskyty malého rozsahu, jako známý diaspor a nedosti prozkoumaní jeho průvodci („dillnit", „agalmatolith"), z Belé u Štiavnice. Rovněž nedotýkám se zde otázky rozšíření volných koloidů hlinitých v ornicích a pod.]

Pro genetický výklad hlinitoželezitých hornin sedimentárních zde popsaných je důležito především, že ve všech třech případech horniny s převládajícím hydroxydem hlinitým souvisívají a bývají zcela ponenáhlými přechody spojeny se železnými rudami stejného vzniku a i stejného vzhledu a struktury, jak ukazují též analysy uvedené na str. 8, a jak uvádějí z různých míst tropů, z krasových území i z nalezišť bauxitů ve starších útvarech geologických badatelé citovaní v této kapitole[18]).

---

[16]) M. Kišpatić, Bauxite des kroatischen Karstes und ihre Entstehung, Neues Jahrb. f. Min. etc. Beilage-B. XXXIV. (1912), 513—552.

[17]) F. Kerner von Marilaun, Geologie der Bauxitlagerstätten des südlichen Teiles der österreichisch-ungarischen Monarchie, Berg- u. Hüttenm. Jahrb. 1916, 145—176, spec. str. 160—164. — Hlavní námitky — že v Krasu jsou přítomny nepochybné slíny, t. j. vápence s příměsí křemičitanů jílovitých, a že železo v části vápenců je primárně přítomno jako uhličitan — nestarají se vůbec o otázku, zda terra rossa a bauxity pocházejí právě z těchto sedimentů a o to, že sekundární vznik sporogelitu a haematogelitu při rozpouštění těchto hornin je zcela dobře myslitelný a na celkovém obrazu podaném vysvětlením Kišpatićovým a Tućanovým by jen velmi málo měnil.

[18]) V. zvláště u Lacroixe, l. c. III. 370 a 390, kde se uvádějí lateritické rudy železné s pisolithy turjitovými ze mnoha krajin tropické Afriky a přechody jihofrancouzských bauxitů ve hnědele, a u Du Boise l. c. str. 31—38 a obr. na tab. I.,

Naše pisolithické rudy jsou vázány na souvrství perucké, vytvořené v periodě emerse, kdy nebyla místa jejich vzniku pokryta mořem, a kdy též byla vyloučena součinnost faktorů hlubinných a sopečných, zcela jak to vytýká Lacroix pro dobu, rovněž spodně-křídovou, kdy tvořily se bauxity jihofrancouzské; ale na rozdíl od těchto i od italských a jugoslavských *nejsou pisolithické rudy vázány na vápence* a jedna z nich, *ranská, podává zřejmý důkaz své obsahové závislosti na bezprostředním geologickém podkladu svým obsahem chrómu, jenž může pocházeti jenom z podložních hornin olivinových.* U pisolithu mezouňského není závislost tak zřejmá a jsou na blízku svrchnosilurské vápence, ale údaje Válovy a Helmhackerovy o ostatních nalezištích v sousedství odkazují nás přece jen do podkladu břidličného, do spodnosilurských pásem d_ε a d_ζ.

Novější pozorování Lacroixova[19]) ve francouzské Guinei a na Madagaskaru přispěla podstatně ku genetickému výkladu lateritů. Podstatou lateritového větrání jest rozklad křemičitanů až do hydroxydů hlinitých a železitých, podmínkou tropické podnebí se střídáním období velmi deštivých a velmi suchých — jinak setkáváme se i v tropech s větráním shodným jako v pásech mírných. Profily v lateritech jeví dvojí pásmo: spodní, jež Lacroix nazývá „zone de départ", leží přímo na horninách, z nichž vzniklo, a závisí na nich svou povahou mineralogickou i strukturní (z hornin olivinových vznikají již ve spodním pásmu koloidní hydroxydy železité a železitohlinité). Ve svrchním pásmu konkrečním (zone de concrétion) mizejí strukturní relikty původních hornin a oba hydroxydy opětovaným rozpouštěním a srážením hromadí se v konkrecionárních massách velkých i malých, stěhujíce se nahoru, kde tvoří kůry na horninách a souvislý „železitý pancíř" na povrchu zemském. V těchto konkrecionárních massách často hydrargillit ustupuje bauxitu a vzniká sloh pisolithický.

Začátkem periody křídové byly u nás dány klimatické podmínky pro vznik lateritů a není pochyby, že rudy zde popsané geneticky úplně odpovídají *produktům konkrečního pásma v tropických lateritech.* Bylo by zajímavo pátrati po dalších dokladech lateritového větrání i jinde v pásmu peruckém, u nás tak rozšířeném a pro technickou upotřebitelnost velké části jeho sedimentů tak často chemicky zkoumaném; snad tato zpráva upozorní na výskyty podobné, dosud nepovšimnuté.

Vyložený zde původ železných rud jako produktů větrání a koncentrace zvětralin ovšem vylučuje pro naleziště ransko-borovské jakoukoliv naději na úspěch kutacích prací, jež by chtěly pod vyčerpanými rudami hledati ložiska dosud netknutá.

---

kde jsou popsány a vyobrazeny pisolithy bauxitové i železorudné ze svrchních partií lateritů surinamských.

[19]) Lacroix, *a*) Les latérites de la Guinée. Compt. rend. *158* (1914), 835—8. — *b*) Les produits d'altération des roches silicatées alumineuses, et en particulier les latérites de Madagascar, tamt. 618. — *c*) Les latérites de la Guinée et les produits d'altération qui leur sont associés, Nouv. archives du Muséum V. 5, 255—356, 1914.

Na otázku, zdali popsané zde rudní sedimenty by nemohly v případě dalších nálezů vyznačiti v souvrství peruckém (pásmu I.) určitý stratigrafický horizont, možno asi předem odpověděti záporně, uvážíme-li, že v tropech pochody lateritového větrání jsou za daných klimatických podmínek universální a že pravděpodobně sahají ode dneška zpět do praerecentních období geologických.

DODATEK.

Teprve po předložení této práce v Akademii jsem obdržel laskavostí prof. A. Lacroixe v Paříži jeho dílo o lateritech guinejských (cit. 19c na str. 12), dotud v Praze nepřístupné a jen z obšírnějších referátů mně známé. Podrobnější srovnání našeho materiálu s daty Lacroixovými ukázalo další shody s lateritickými rudami: tak přítomnost titanu a chrómu v *rozpustném* podílu (str. 296, 334—5), pravděpodobně ve stavu koloidálním a hydratisovaném, při čemž chróm se omezuje na uloženiny spočívající na horninách olivinových; výskyt železných rud lateritických ve svrchních částech „zone de concrétion“ a přechody do lateritu (str. 339 a 340 a j.); charakteristicky hojnější pisolithy ve svrchních částech, kde též ubývá hydrargillitu a přibývá amorfního hydroxydu hlinitého (str. 341) atd.

V otázce *terminologie hydroxydů hlinitých* hájí Lacroix (str. 328) stanovisko, jež zaujal již před více než dvaceti lety ve své „Minéralogie de la France et ses colonies“ (III. 342): že jménem *bauxit* jest označovati *horninu* obsahující koloidální hydroxyd hlinitý, ne tento sám jako minerál, pro nějž dává přednost Paulsovu názvu *alumogel* před Kišpatićovým sporogelitem, poukazuje (str. 329 a 344) na vyšší hydrataci některých výskytů koloidálního hydroxydu hlinitého než $Al_2O_3 . H_2O$ (Arkansas, z části Guinea).

* * *

Dodatečný výzkum *nerozpustného podílu* rudy ranské potvrdil koloidální povahu těch partií, které ve výbrusech jsou neprůhledné pro nahromaděný kysličník a hydrát železitý. Po úplném odstranění tohoto a skoro úplném onoho koncentrovanou kyselinou solnou za horka i ve výbruse i v prášku opět jako podstatná část nerozpustného zbytku zustává isotropní hmota slabě nahnědlá až čirá, z části ještě šedě zakalená, s nepatrnou příměsí drobounkých šupinek krystalových, jednotlivých i seskupených ve změtené agregáty, asi kaolinitu i hydrargillitu; křemen chybí téměř úplně. Isotropní hmota převládající má z části lom světelný málo vyšší než kanadský balsám, asi 1·545, z části, a to v kalných kouscích, lom světelný je nižší než v balsámu. Hodnota 1·545 leží v mezích, ve kterých byl stanoven lom světelný u koloidních a metakoloidních vodnatých křemičitanů hlinitých (alumokřemičitých kyselin V. I. Vernadského), nerozložitelných v kyselině solné a již tím odlišných od allofanu: pro *halloysit*, jenž se pokládá za vyšší hydrát kaolinitu, našel J. Šplíchal ve svém důležitém příspěvku k poznání těchto hmot[20]) exponenty lomu 1·54 při obsahu vody 23·08% (Angleur u Liège) a 1·57 při 17·77% (Radzionkow v Horním Slezsku); pro montmorillonit (hydrát pyrofyllitu) jen 1·50; E. S. Larsen ve svém souborném díle o optickém určování nerostů[21]) udává jen 1·47 pro halloysit o 25% H_2O, 1·52 pro jiný vzorek bez určení vody, 1·555 pro halloysit vysušený zahřátím na 60° nebo dlouhým ležením na vzduchu, pro montmorillonit 1·548 (isotropní) a 1·56 (krystalický) rovněž bez chemických dat.

Po zahřátí v koncentrované kyselině sírové zbývá jen bílá, v mikroskopu čirá amorfní kyselina křemičitá o exponentu lomu = 1·46, jež se beze zbytku rozpouští v horkém roztoku KOH a zůstavuje jen několik zrníček přimíšeného křemene.

Mineralogický ústav Karlovy university.

---

[20]) J. Šplíchal, Příspěvek k poznání koloidních jílů, Zemědělský Archiv 1919, 413—431.

[21]) E. S. Larsen, The microscopic determination of the nonopaque minerals, Bulletin of the U. S. Geological Survey No. 679, Washington 1921.

Stratigrafický doklad místní oscilace vodní hladiny Jadranu za holocaenu.

Napsal

Jar. Petrbok.

(Předloženo dne 13. ledna 1922.)

V literatuře je dostatek dokladů o celkovém i místním kolísání výšky vodní hladiny oceánů a tím i jejich zálivů — moří vnitrozemských. Tak zjištěno, že *Atlantic* a *moře Středozemní* stouplo za poslední 2 tisíciletí asi o 2 *m*, že *Jadran* zalévá se na severozápadě do nížiny pádské, ač naproti tomu delta *Pádu* vzrostlo od r. 1892—1904 o 70—80 *m*, při rameni *Pocca della Pilla* o 136 *m*.

Poněvadž byl však až dosud všeobecně — s čestnou výjimkou hlavně Menzela v *Německu* úplně a úmyslně přehlížen a podceňován faunistický, klimatologický i stratigrafický význam mollusků holocaenních vůbec, čímž se stalo, že po nich pátráno nebylo, ano, že nedoceněn i význam sprašových ulit: *Xerophila striata Müll., Pupa muscorum Müll a Succinea oblonga Drap.* pro členění pevniny *Dalmacie*, ano, že nebyl vykonán soustavný výzkum jejich nejen tohoto,*) ale i okolního terénu (*Istrie, Chorvatska, Slavonie,* ostrovů, nemluvě ani o *Bosně* a *Hercegovině*) nemáme odtud až dosud dokladů pro zmíněná zjištění stratigraficko-konchyliologistických.

Sem mohly by přijíti v úvahu — po náležitém místním ohledání — vrstvy a fauny u *Opuzenu* v *Dalmacii*, prosbírané Danešem a Řehákem a za plistocaenní popsané Baborem. Stratigraficky však ani toto naleziště profilováno nebylo a není tudíž vyloučeno ani odtud překvapení nějaké.

Dále při celkovém pojednání bylo by nutno zmíniti se o mořském plistocaenu na *Pelagose*, broucích a měkkýších na *Monte Gargano*.

Tím méně ovšem možno pak mluviti o stratigrafických faunách holocaenních na tomto území, ač tyto (jak uvedu jinde) dle mých nálezů z r. 1921 na ostrově *Krku* zde existují.

A právě na faunách holocaenních možno sledovati jedině, zda zeměpisné rozšíření jednotlivých druhů je stabilní, anebo zda z fauny jedné lokality některé druhy přibývají anebo jich ubývá.

---

*) Z museí nemá *Záhřeb* a *Lublaň* (r. 1921) vůbec ničeho, bývalý Geol. R. A. ve *Vídni* pouze několik sprašových ulitek z ostrova *Brače*.

Že se zachovalo tak málo stop po oscilaci dna *Jadranu* (od plistocaenu počínaje) má hlavně svou příčinu v tom, že břehy jeho jsou příliš srázné a příhodného vrstvení vodním nánosem je pro nedostatek tekoucích vod velice málo, kdežto hlíny vrstvené ssutím jsou příliš suché, drobivé, nekompaktní a podléhají tudíž snadno jednak rozmočení mořem, jednak rozdrcení příbojem. Kde se zachovaly, stalo se tak jedině shodou příznivých okolností, k čemuž nutno přičísti i muj nález z r. 1921 u lázní *Baška* na ostrově *Krku*.

Vrstvy tohoto profilu, který měl v celku přes 3 metry výšky a prokopatelné hloubky $1\frac{1}{2}$ *m*, byly na prvý pohled s výminkou krycí hlíny (terra rossa) od sebe nerozeznatelny a zdánlivě podobny tisícům jiných, rovněž holocaenních profilů teprve při podrobnějším ohledání byly patrny jednotlivé naprosto samostatné fauny měkkýšů.

Krycí vrstvu tvoří *rudá hlína* (holocaenní) zvaná *terra rossa* s faunou absolutně recentní (a subrecentní), neboť — jak jsem zjistil v četných jiných profilech na velmi vzdálených místech, obsahuje druhy recentní fauně výlučně *zde* (nikoli n. př. o *Francii* dle plistocaenního materialu Germainova) náležející jako: *Iberus vermiculatus Müll. Rumina decollata L*, ač neznám zde ještě stratigrafického poměru mezi touto vrstvou a velkými *Helixy* (n. př.: *Helicogena secernenda* Rossm, *Dinarica Pouzolzii* Desh a p.) Tato vrstva je dnes nejzachovalejší vrstvou holocaenní hlíny a místy bývá přesycena konchyliemi výlučně suchozemskými a zpravidla—pokud je uloženinou svahovou i prosycena ssutými štěrky a konchyliemi.

Z profilu zde patrno, že obsahovala z ostatních vrstev nejvíce druhů.

Pod ní byla *žlutavá hlína* ve svrchních vrstvách s chudičkou *faunou* suchozemskou, avšak *hygrofilní (Succinea* sp.*)*, ve spodních vrstvách s faunou výlučně *sladkovodní* a to s drobnými druhy rodů: *Limnaeus, Planorbis* a *Ancylus*. Hlína tato byla písčitá a byl v ní připlavený štěrk (oblázkový).

Poněvadž v nejbližším okolí nálezu jsou pouze dnes drobné skalní prameny, jež namnoze sotva svlažují stěny částečně i sinterické, na nichž udržuje se v posledních exemplářích *Limnaeus pereger Müll* (a nikoli *Limnaeus truncatulus Müll* jak dalo by se spíše očekávati), dá se předpokládati, že byly zde prameny kdysi mocnější (což u sinterických vod není ničím překvapujícím) a případný basen mnohem prostornější.

Pak následovala vrstva *mořského štěrku* (oblázkového) promíšená pískem a šedožlutou hlínou. Na oblázcích byly i *Serpulity* a některé ze štěrků byly provrtány i *Acephaly*.

Vrstva tato — až 4 *dm* silná — neobsahovala vůbec žádných měkkýšů suchozemských (ač přítomnost jejich dala se čekati) ani sladkovodních a měla *faunu výlučně mořskou* (většinou příbojem poškozenou).

Pod ní byla poslední vrstva holocaenní a to žlutavá hlína s pískem a oblázky a četnými sladkovodními *Hydrobiemi* bez kterýchkoli druhů jiných ať již sladkovodních nebo suchozemských. Příbojem za usazování vrstvy nadcházející byla tato vrstva zajisté částečně denudována.

Poněvadž tedy *mezi dvěma sladkovodními vrstvami holocaenními,* z nichž svrchní byla kryta mohutnou vrstvou hlinité a štěrkové ssuti s faunou výlučně suchozemských měkkýšů, *je vložena vrstva štěrku a fauny mořské,* vidíme, že nejedná se tu o nános příbojem ojedinělé mocné bouře (pak byla by fauna mořská a sladkovodní nejvýš promíšena) — čemuž ostatně odporuje i výška těchto vrstev nad hladinou, ale že se *jedná o časové a trvalé zavodnění mořem.* Opětným poklesnutím hladiny mořské umožnilo se usazení svrchní vrstvy sladkovodní.

Poněvadž zjištěn je zde — stratigraficky po rozboru faun — tedy zdvih a pokles hladiny moře mezi dvěma vrstvami holocaenními, máme tu doklad o místní oscilaci vodní hladiny *Jadranu* za holocaenu, jejíž dynamickou příčinu budeme hledati po náležitém studiu ostatního pobřeží.

Dokladový profil naleziště na Bašce.

Fauna	Vrstva (v každé konchylie)	Výška	Druhy
výlučně *suchozemská* (subrecentní)	*rudá hlína* (terra rossa) a ssuť štěrku	— - *m*	1. *Helix* (Iberus) *vermiculatus Müll.* 2. *Helix* (Hygromia) *carthusiana Müll.* 3. *Helix conica* Drap. (=*trochoides* Poir.) 4. *Buliminus detritus Müll.* (velmi drobná). 5. *Buliminus tridens Müll.* 6. *Buliminus sp.* 7. *Pupa frumentum Drap.* 8. *Glandina Poiretti* L 9. *Stenogyra*(Rumina) *decollata L.* 10. *Cyclostoma elegans Müll.*
smíšená: *vlhkomilná* a ***sladkovodni*** (holocaen)	*žlutavá hlína,* písek a oblázkový ***štěrk připlavený.***	— 3 *dm*	1. *Caecianella acicula Müll.* 2. *Succinea* sp. 3. *Limnaeus* (Gulnaria) *peregex* Müll. 4. *Planorbis* sp. 5. *Ancylus* sp.
výlučně ***mořská*** (holocaen)	***štěrky*** (oblázky) ***mořské*** se *Serpulity,* neb *Acephaly* navrtané; *písek,* *šedožlutá hlína.*	— 4 *dm*	1. *Cerithium vulgatum Brug* 2. *Trochus turbinatus Born.* 3. *Pecten* sp. (frgm.) 4. sp.
výlučně ***sladkovodni*** (holocaen)	*žlutavá hlína;* *písek,* oblázkový ***štěrk připlavený.***	— 3 *dm*	1. *Hydrobia* (Pseudoamnicola) conovula Frfd.
Skála.			

1*

Použitá literatura.

Babor J.: Marines Plistocaen von Opuzen (Sitzb. d. kgl. böhm. Gesel. d. Wissensch., Praha 1908).

Brauns D.: Das Problem des Serapeums von Pozzuoli (Leopoldina, seš. XXIV., Halle 1888).

Grund: Die Entstehung u. Geschichte des adriat. Meeres (Geogr. Jhrber. aus Österreich. Wien, Bd VI.).

Boguslawski G. v.: Handbuch der Ozeanographie. (Stuttgart 1884.)

Kerner: Der geol. Bau des mittleren u. unteren Kerkagebietes. (Verh. k. k. geol. R. A., Wien 1894.)

Kerner: Reisebericht aus dem oberen Cetinatale (ib. 1912).

Kerner: Pflanzenreste aus dem älteren Quatär von Süd- u. Norddalmatien (ibid. 1907).

Kispatič: Der Sand von der Insel Sansego (Sušak) bei Lussin u. deren Herkunft (ibid. 1910).

Neumayer: Beitr. zur Kenntniss foss. Binnenfaunen. 1. Die dalm. Süsswassermergel (Jahrb. k. k. g. R. A., Wien 1869).

Neumayer: Die diluv. Säugetiere der Insel Lesina. (Verh. k. k. g. R. A. 1882.)

Schubert: Der geol. Bau der Insel Puntadura (ibid. 1907).

Schubert: Die Entstehungsgeschichte der vier dalm. Flusstäler (Kerka, Zermanja, Cetina, Narenta). (Peterm. geogr. Mitth. 1910.)

Schubert: Balkanhalbinsel. A. Die Küstenländer der Ö.-U. M. (Handb. d. reg. Geol. Weidelberg 1914.)

Schubert: Handbuch der Regionalen Geologie (1914).

Schubert: Führer durch Dalmatien.

Menzel: Klimaänderungen u. Binnenmollusken im nördl. Deutschland seit der letzten Eiszeit (Ztschr. d. deutsch. geol. Ges. Berlin 1910).

Erläuterungen zur Geologischen Karte etc. Öster.-Ung. Monarchie (K. K. geol. Reichsanstalt) SW Gruppe Nr. 110, 112, 113, 113a, 115, 115a, 116, 118, 120, 121, 123, 124, 126a; Col. XX. Zone 36, 37.

Objev fauny Euloma-Niobe u Ouval.

Podává

C. Klouček.

(Předloženo dne 13. ledna 1922.)

V časopise musea Král. Českého (1920 roč. XCIV. sv. 4.) podal jsem stručnou zprávu o 2 nových faunistických nálezech u Ouval, z nichž první, zajímavý hlavně několika novými druhy velkých billingsell (orthis) i dosti odlišnou horninou, patří určitě do nejspodnější zony našeho siluru do $d\,\alpha^1$, neb chová i četné variety druhů *Obolus Feistmanteli* Barr. i druh *Billingsella incola* mut. praec. Klou.

Většina otisků z této nové lokality jest různými tlaky do nezvyklých délek nebo šířek protažena, tedy deformována.

Stratigrafické zařadění druhého, zřejmě důležitějšího nálezu přenecháno v uvedené zprávě, pro některé nejasnosti a hlavně pro zatimně nepatrný počet otisků, dalšímu výzkumu v r. 1921.

Výzkum ten, od počátku jara 1921 společně s p. adj. J. Kolihou úsilovně prováděný, měl úspěch znamenitý, neboť zjistil u Ouval, po mém známém objevu r. 1914 u Olešné, po druhé v Čechách, pravou trilobitovou faunu *Euloma Niobe,* tedy faunu středního $d_1\,\alpha$ čili $d\,\alpha^2$.

Trilobiti dosud zde nalezení jsou:

Euloma	*Cheirurus*
Harpides cf. rugosus?	*Amphion*
Apatocephalus	*Symphysurus*
Olenid n. sp. totožný s olešským.	*Nileus*
Parabolinella?	*Niobe?*
Ceratopyge	*Asaphellus?*

a 3 druhy agnostů, z nichž jeden blízký hofskému druhu *Agnostus bavaricus* Barr.

Fauna ta čítá tedy dosud 15 druhů trilobitů, z nichž prvních 6 je rázu kambrického, druhých 6 rázu silurského nehledě k agnostům a překvapuje svojí značnou samostatností čili odlišností vůči analogické fauně z Olešné (viz moje „Novinky z vrstev Krušnohorských $d_1\alpha$). Odlišnost ta je silně severského rázu, vždyť na př. *Ceratopyge* byla skoro jen skandinavskou zvláštností.

Tím ale podán důkaz o spojení českého moře, aspoň severní jeho části — s mořem skandinavským v době $d\alpha^2$ nebo v $d\alpha$ vůbec a zároveň naznačena možnost, nerci-li nutnost, jakési občas neúplné přehrady mezi tehdejším českým mořem severním a jižním. Tato přehrada by vysvětlila nejen velkou odlišnost ouvalské fauny *Euloma-Niobe* od příslušné olešské, ale i odchylnost hornin libečovského a ouvalského $d\alpha^1$ od fauny a hornin typického $d\alpha^1$.

* * *

Naleziště ouvalské fauny *Euloma-Niobe* leží asi 1 *km* z. od Ouval při pražské silnici v malé jámě vzniklé kdysi dolováním na železnou rudu. Otisky trilobitů možno tu najít ve 2 nepatrných vrstvách žlutavě bílého až nahnědlého, jemného a málo pevného tufitu. Spodní vrstva tufitu toho leží asi 1 *m.* nad rudou, od ní pak asi 35 *cmt* výše probíhá druhá pranepatrná 1—2*cm.* mocná vrstvička. Ostatní vrstvená hornina v blízkém nadloží i podloží vrstev tufitových, až k rudě samé, je většinou rohovcovitá a nehledě ku velmi vzácným nálezům malých lingulidů, bez otisků.

Dosud nalezené otisky trilobitů jsou vesměs fragmentární, jako u Olešné, a tedy rovněž původu pobřežního. Jsou místy hojnější než u Olešné a bývají často i v podrobnostech pěkně zřetelné. Různými tlaky, patrně v době vrásnění vrstev, byly otisky většinou znetvořeny, protaženy nebo roztlačeny, jako dříve uvedené otisky prvního nálezu ouvalského z $d\alpha'$.

Přední zkamenělinou ouvalské fauny *Euloma-Niobe* je *Euloma*, k níž se druží *Harpides* af. *rugosus* a *Agnostus* af. *bavaricus* Barr. Brachiopodi, jichž se dosud zde našlo asi 8 druhů z části shodných s olešskými, nejsou zde hojní. Jen *Billingsella incola* Barr. se ještě nejspíše najde, ač ani z daleka ne tak často jako u Olešné, na Milině nebo u Sv. Dobrotivé.[1])

Mateční tufitická hornina této fauny nebyla z $d\alpha$ vůbec dříve známa, což platí i o žel. rudě asi 1 *m* pod naším tufitem konkordantně uložené a dříve do zony $d\beta$ kladené. Rudné konkrece (s hnědelovým obalem až 4 *cm* mocným a s vnitrem tufitovým) objevují se sem a tam ve spodní vrstvě tufitu a dokazují přímé vyznění rudy do nadloží.

Pod rudou pak, jak na okraji sousední obory pokusným dolováním r. 1919 zjištěno, jsou uloženy rovněž světlé tufity a pod nimi vrstvy pravého $d\alpha^1$ (s faunou) — je tedy zřejmo a nesporno, že i ložisko rudy samé leží v $d\alpha^2$.2)

---

[1]) V loňské zprávě uvedená Dictyonema sp. vzala dalším výzkumem za své, neb dotyčný otisk je úlomkem líce harpida, jejíž povrch se vyznačuje hustě žilkovitou skulpturou silně dictyonemu připomínající.

Tento zvláštní, dosud ojedinělý výskyt rudy v $d\alpha^2$ připomíná ostatně výskyt silně krevelovité horniny na úpatí lesnatého kopce Bukova u Zbirohu (viz moje „Novinky") dále v Ouhorově z. u Libečova a v Chrbině nad Kačákem (Vála a Helmhacker), vesměs v $d\alpha^1$. Že se poslední hornina makroskopicky dost i podobá rudě z bývalého dolu Ouzký u Holoubkova, podotkl jsem už jinde a že fauna rudy z Ouzkého se dosud jinde v $d\beta$ nenašla, dodávám na uváženou ještě k tomu.

* * *

Zpracování nového trilobitového materialu z Ouval a z Olešné hodlám konat společně s J. Kolihou, dosavadním horlivým spolupracovníkem, v ouvalském nálezišti.3)

V Praze v lednu 1922.

---

2) Viz L. a F. Slavíkovi: „Studie o žel. rudách českého spod. siluru", Rozpravy Č. A. 1917—18. Rovněž A. E. Reuss: Über sil. Schalsteine u. d. Eisenerzlager von Auval bei Prag". Sitz. bez. k. k. Akad. Vídeň, 1857.

Od. Kodym klade ve stati „O ložisku žel. rudy u Ouval v. od Prahy" (Hornický věstník 1921) toto ložisko do horního kambria a to na základě porfyritických a porfyrových tufitů, v nichž je ouvalská ruda uložena a které (dle Kodyma) jsou hornokambrické a uloženy v podloží vrstev Krušnohorských mezi nimi a algonkiem. Tyto tufity daly Od. Kodymovi podnět sice svůdný, ale v našem případě klamný, neb dokázaly záhy nesporně, jak svrchu doloženo, že patří i s ložiskem rudy v nich uloženým do spodnosilurského $d\alpha^2$ a ne do horního kambria. Možná ostatně, že i tyto tufity jsou *původu* hornokambrického, ale pak byly v době $d\alpha^1$ z prvotních svých poloh sem splaveny.

3) Bohužel stihl mne při posledním návratu z Ouval těžký úraz, jehož následky další moji činnost v nalezištích jistě znesnadní, ne-li skoro znemožní.

Příspěvek k poznání křídového útvaru na listu Praha.

Napsal

Alois Matějka v Praze.

(Předloženo dne 4. ledna 1922.)

Při geologickém mapování listu Praha studoval jsem podrobně složení křídových vrstev zde se vyskytujících. O křídovém útvaru v nejbližším okolí vltavského údolí na pravém břehu Vltavy mezi Podbabou a Kralupy podávám zprávu jinde[1]), v této práci hodlám se stručně zmíniti o vývoji křídových souvrství v krajině mezi Kobylisy, Ďáblicemi, Čakovicemi, Myškovicemi, Brázdimí, Brandýsem n. L., Radonicemi, Satalicemi a Hloubětínem.

Oblast zde vytčená je zajímavá potud, že podobně, jako v širším okolí vltavského toku mezi Roztoky a Kralupy, setkáváme se tu s nepravidelnostmi ve vývoji nejstarších pásem křídových. Odchylky od normálního vývoje zaviněny byly nerovnostmi předkřídového terénu v době jejich sedimentace.

Nerovnosti ty mají za následek, že mocnost *I. pásma* značně kolísá, ba místy I. pásmo vůbec není vyvinuto. Že pak i petrografické složení jeho vrstev je místy odchylné od obvyklého vývoje, je přirozeno. Nedošlo-li k sedimentaci I. pásma, transgreduje obyčejně *pásmo II.* přes algonkium nebo spodní silur.

V tomto případě jest petrografický vývoj jeho velmi zajímavý. V oblasti vltavské, na okrajích křídového „Turského ostrova“ a jeho výběžků, setkáváme se za těchže okolností s útesovým jeho rázem, charakterisovaným vápenitými horninami (vápenci, vápnitými pískovci, a vápnitými slepenci), s bohatou faunou. Naproti tomu v krajině, o níž jedná tato práce, ač poměry mořského dna byly podobné, vápnité sedimenty, až na nepatrné dvě výjimky scházejí. Také nelze tu stanoviti rozdílů v petrografickém rázu II. pásma, transgreduje-li přes pásmo I., nebo přímo přes útvary starší. Místně najdeme sice v druhém případě odchylný vývoj petrografický, ale není tu pravidlem, takže složení II. pásma může být v obou případech úplně shodné.

---

[1]) Al. Matějka: O geologických poměrech sev. Povltaví. Sborník Stát. geol. ústavu RČS. 1919/20. Část II. v rukopise.

Nad vrstvami pásma II. vyvinuto je *pásmo III.*, které místy úplně bylo zdenudováno. Z jeho vývoje a rozšíření je zřejmo, že nerovný povrch předkřídový místně ještě nebyl vyrovnán uloženinami nejstarších dvou pásem. V těch případech transgreduje pásmo III. přímo přes algonkium. Při tom však petrografická povaha jeho nejspodnějších vrstev nedoznává podstatnějších změn. Jsou to opět jíly a slíny, jako když jest uloženo na pásmu II., ovšem- že jistý vliv podkladu je vždy zřejmý.

* * *

Starší literatura, pokud zmiňuje se o krajině, o níž jedná tato práce, obsahuje většinou údaje pouze povšechné. Je to hlavně:

Frič: Perucké a korycanské vrstvy. Archiv pro přír. výzkum Čech. Díl prvý.

Frič: Bělohorské a malnické vrstvy. Tamtéž, díl čtvrtý.

Frič a Bayer: Perucké vrstvy. Archiv XI. 2.

Katzer: Geologie von Böhmen.

Krejčí: Studie v oboru křídového útvaru v Čechách. Všeobecné a horopisné poměry. Archiv 1880.

Krejčí-Helmhacker: Vysvětlivky ku geologické mapě okolí pražského. Archiv 1893.

Počta: Geologická mapa širšího okolí pražského. Archiv 1903.

Velenovského práce o cenomanské floře v Čechách.

Daneš: Morfologický vývoj středních Čech. Sbor. č. společ. zem. 1913.

* * *

Pásmo I. je nejlépe přístupno na erosivním stupni začínajícím u Proseka a táhnoucím se směrem východním až nad Hloubětín. Jsou tu přístupna (kromě pásma II. a III.) všechna jeho souvrství v normálním vývoji. Profil křídových vrstev sestavený z více pozorování v nejbližším okolí Proseka je tento:

	Ornice a diluviální lés	6 *m*
IIIb	1. Písčité slíny s jehlicemi hub a hlízami křemitých vápenců spongiových	8-9 *m*
IIIa.	2. Nažloutlé slíny	2·5 *m*
	1. Bílé vrstevnaté jíly střídající se s písčito-jílovitými vrstvičkami limonitem zbarvenými	0·4-0·5 *m*
II.	2. Tmavozelený glaukonitický písek neb pískovec ve svrchních polohách jílovitý	0·5-0·7 *m*
	1. Železitý pískovec místy jílovitý s křemennými valounky, nebo železitý snadno rozpadavý slepenec	0·10-0·15 *m*

I.	6. Kvádrový kaolinický pískovec jemno- neb hrubozrnný, místy se slabými vložkami bílých lupků ve svrchních polohách asi	7 *m*
	5. Šedavé, deskovité pískovce s vložkami kaolinických pískovců	3 *m*
	4. Jemnozrnný kvádrový pískovec kaolinický	4 *m*
	3. Kaolinický pískovec s vložkami písčitých slídnatých jílů .	2 *m*
	2. Lupky a jíly	6-7 *m*
	1. Limonitická vrstvička	0·05 *m*

Transgrese přes Zahořanské vrstvy d_ε ve výši asi 245 *m* n. m.

Směrem k Hloubětínu nastávají ve složení I. pásma některé změny. V nejbližším okolí Proseka až k Vysočanům začíná křídová transgrese přímo *souvrstvím lupků a jílů.* Mocnost jejich směrem k východu se zvětšuje. Lupky jsou proslulé bohatstvím rostlinných otisků. Vých. od Vysočan uhelná vrstvička v nich uložená byla podnětem k marnému pátrání po uhlí. Velenovský uvádí z tohoto místa následující profil:

1. Ornice.
2. Diluviální hlína.
3. Písek s úlomky pískovcovými.
4. Drobivé lupky hlinité bez rostlinných zbytků.
5. Drobivé lupky hlinité s četnými zuhelnatělými zbytky rostlinnými.
6. Pevné břidličnaté lupky hlinité s Cunnuighamia elegans, Laccopteris, Eucalyptus a Grevillea constans.
7. Hlinité lupky bez rostlinných zbytků.
8. Mourovité vrstvy s uhelnou vložkou.
9. Kvádrový pískovec.

Zahořanské břidlice d_ε.

U starého kutiště nad Hloubětínem, kde lupky byly kdysi dobývány pro kyzový svůj obsah na výrobu kamence, obnáší jejich mocnost asi 9 *m.* Křídová transgrese začíná pak polohou *železitých pískovců,* hrubozrnných neb jemnozrnných, místy *železitých slepenců.* Mocnost jejich je velmi nestálá. Na cestě přes trať čes. sev. dráhy, u *km* 9 jsou mocné necelý metr, směrem k vých. však vzrůstá, takže u strážního domku č. 7 možno ji odhadnouti na 4 *m.* Na cestě do Satalic, u str. domku č. 18 obnáší zase již necelý metr. Nad d_ε spočívá tu jílovitý slepenec s křemennými valouny, (místy pískovec), nad ním slepence a pískovce železité. Dále na východ v zářezu železničním jižně od Satalic, jsou přístupny již jen *kvádrové, kaolinické pískovce* nejsvrchnějších poloh I. pásma. Tyto v celém svahu mezi Prosekem a Hloubětínem zachovávají celkem týž ráz petrografický.

Severně od tohoto svahu tvoří krajina mírně zvlněnou planinu pokrytou z největší části spraší nebo hlínou, pod níž ukryta jsou nejstarší tři pásma křídová. Složení vrstev I. pásma poznáváme z vrtů, jež podniknuty byly na letišti u Kbel.[2])

Vrt č. 1.

Ornice	65 *cm*
Žlutá diluviální hlína (lés)	235 *cm*

---

[2]) Vzorky dodány byly Stát. geol. ústavu RČS. Vrt č. 2. je neúplný.

IIIb.	Písčité slíny nažloutlé	450 *cm*
IIIa.	Žlutavý jemný jíl	370 *cm*
II.	Tmavozelený glaukonitický pískovec jemnozrnný poněkud jílovitý	50 *cm*
I. pásmo	Jemný žlutavý pískovec	95 *cm*
	Jemnozrnný kaolinický pískovec	1005 *cm*
	Jemnozrný rozpadavý pískovec	60 *cm*
	Kaolinický pískovec	360 *cm*
	Rozpadavý pískovec jemnozrnný se slabou vložkou šedého lupku a stopami mourovitého uhlí	180 *cm*
	Jemný kvádrový pískovec	830 *cm*
	Tmavošedý jíl	160 *cm*
	Bílý hrubozrnný pískovec (křemenná zrna i větší úlomky jsou nedokonale zakulacené	150 *cm*
Silur.	Zahořanské vrstvy d_ε.	

Vrt č. 2.

	Ornice.	
	Žlutá diluviální hlína (lés).	
IIIb.	Písčité slíny nažloutlé	760 *cm*
IIIa.	Žlutavý jíl	150 *cm*
	Slinitý šedý jíl	120 *cm*
II. pásmo	Tmavozelený jemný pískovec glaukonitický	130 *cm*
I. pásmo	Kaolinické jemnozrnné pískovce	1540 *cm*
	Tmavý jíl	10 *cm*
		1270 *cm*
	Zahořanské vrstvy d_ε.	

Z uvedených zde profilů je zřejmo, že směrem k severu od Proseka mocnost lupků a jílů značně se zmenšila; klesla na 160 *cm*. Celková mocnost I. pásma zůstává však téměř nezměněna.

Další výchozy I. pásma nacházíme sev. od Kbelské pláně, a pak v krajině mezi Vinoří a Brandýsem n. L. Přicházíme tu již do oblasti, kde jeví se vliv nerovného terénu předkřídového na sedimentaci nejstarších pásem křídových. Mocnost I. pásma je tu značně menší než u Proseka, a vrstvy jeho vytrácejí se na linii probíhající mezi Velení, Myškovicemi, sev. od Přezletic a Dřevčic ku Brandýsu n. L. Nejsvrchnější polohy I. pásma jsou přístupny na několika místech poblíže železniční trati čes. sev. dráhy. Jsou to kaolinické jemnozrnné pískovce odkryté v pískovně již. od Čakovic u koty 258, na křižovatce trati a cesty vedoucí od téže pískovny k ssz. do Čakovic, a poblíže silnice z Kbel do Myškovic, záp. od místa kde táž přechází dráhu. Nepatrný výskyt těchže vrstev nalezneme i v Myškovicích. Jinak jsou vrstvy I. pásma nepřístupné.

Ve větší souvislosti objevují se mezi Vinoří a Brandýsem, v údolí potoka Valchy a jeho pramenů potoka Vinořského a Ctěnického. Mocnost I. pásma je již malá, největší asi 10 *m*, místy pak vůbec se nevyvinulo. Spodní dvě význačná souvrství, basální slepence nebo pískovce a poloha lupků a jílů scházejí vůbec. Vých. od Ctěnic, pak v okolí Vinoře, Jenštejna, a u Přezletic odkryty jsou kaolinické pískovce nejsvrchnějších poloh I. pásma. Nemají tu však většinou kvádrového rázu, jsouce tvořeny diagonálně zvrstvenými polohami pískovcovými, zbarvenými hnědě hydroxydem železitým. Jednotlivé vrstvy liší se jemností zrna, místy vyskytují se v nich polohy až slepencovité, i vzdorností proti větrání. Jen tam, kde jsou hlouběji odkryty lomem, na př. u koty 246 u Ctěnic nebo na „Skále" již. od Brandýsa, upomínají na kaolinické pískovce od Proseka. Severových. od Vinoře až k Brandýsu n. L. přístupny jsou místy vrstvy I. pásma až na silurský podklad.

Sev. od vinořského cukrovaru transgredují přes drabovské křemence nebo d_δ aniž by nastaly nějaké změny v petrografickém složení kaolinických pískovců nad transgresní plochou. Místně obsahují jen ostrohranné úlomky d_δ nebo d_γ. Podobně je tomu u Podolánky při transgresi přes zahořanské břidlice. Vyšší souvrství jeví však složení dosti rozmanité, jež vysvitne nejlépe z profilů od Podolánky a ze starého lomu naproti Cvrčovicům.

Profil u mlýna v Podolánce.

Hlína diluviální.	
1. Kaolinické pískovce. Jsou limonitem hnědě zbarveny, skládají se z nestejně pevných poloh diagonálně zvrstvených. Mocnost různá dle denudace	2-3 *m*
2. Kaolinický hrubozrnný pískovec, na spodu s hojnými valouny křemennými, výše kromě nich ještě s valouny buližníkovými a nedokonale zakulacenými úlomky drabovských křemenců	50 *cm*
3. Jemnozrnný pevný pískovec	50 *cm*
4. Slepenec s valouny křemene a buližníku	5 *cm*
5. Jemnozrnný kvádrový pískovec	asi 4 *m*
Nepřístupné vrstvy asi 2 *m*	
6. Jemný pískovec neb písek, na spodu místy s úlomky zahořanských břidlic	3 *m*
Zahořanské vrstvy d_ε.	

Profil na pravém břehu Valchy jižně od Cvrčovic.

Diluviální hlína.	
1. Kaolinický pískovec	asi 6 *m*
2. Slepenec s valounky bílého křemene a buližníku	20 *cm*
3. Hrubozrnný pískovec s řídkými valouny křemennými	1 *m*
4. Jemnozrnný kvádrový pískovec	130 *cm*
5. Rozpadavý slepenec s valouny křemennými, buližníkovými a drabovskými křemenci	10 *cm*
6. Kvádrový pískovec	2 *m*
Zahořanské břidlice d_ε.	

O slepencové vložce z této krajiny zmiňuje se již Krejčí. Daneš správně rozpoznal, že slepencové vložky jsou dvě, a poukázal na to, že význam jejich je pouze lokální. Vložky tyto kromě na popsaných lokalitách a u Jenštejna dají se zjistiti i na jiných místech v oblasti směrem k Brandýsu.

Tak zejména v rokli vedoucí od silnice mezi Dřevčicemi a Vrábím k Hrušovu, kde asi 2 *m* nad svrchní slepencovou vrstvičkou vyvinuto je souvrství světlešedých *písčitých lupků a jílů.* Jíly jsou kromě toho ještě přístupny sz od Hrušova, na cestě z Popovic do Brandýsa, asi 1—1½ *m* pod transgresí II. pásma. Jinak až k Brandýsu nejeví vrstvy I. pásma jiných zvláštností.

Drabovské křemence jižně od Popovic tvořily v době I. pásma vyvýšeninu, přes níž transgredovalo teprve pásmo II., až na nepatrnou část, která ani jeho vrstvami nebyla pokryta. Pásmo I. objevuje se teprve na již. svahu této předkřídové vyvýšeniny, sev. od Dřevčic v zajímavém vývoji. Vrstvy jeho vykazují tu následující složení:

II. pásmo	2. Jemnozrnný glaukonitický pískovec deskovitý	1-1½ *m*
	1. Jemnozrnný rozpadavý pískovec poněkud glaukonitický	10 *cm*
I. pásmo	4. Limonitem rezavě zbarvený pískovec	15-20 *cm*
	3. Slídnatý jemně písčitý jíl	30 *cm*
	2. Jemnozrnný bílý rozpadavý pískovec	1-1½ *m*
	1. Železitý pískovec, místně na basi s 25 *cm* mocnou vrstvou hrubého železitého slepence s valouny křemene a buližníku	$^3/_4$ *m*

Zahořanské břidlice d_ε.

Jižně od potoka Valchy mezi Cvrčovicemi a Vrábím není odkryvů, v nichž by bylo I. pásmo přístupno. Je tu zakryto diluviálními hlinami, stejně jako obě pásma vyšší. Teprve jižně od Brandýsa nad L. vystupuje na povrch. Vrstvy jeho jsou pěkně přístupny na „Skále" již. od Brandýsa. Složení jejich je toto:

Ornice.

IIIa.	1. Šedý jíl s proužky limonitem hnědě zbarvenými	1½ *m*
II.	1. Glaukonitický pískovec deskovitý	210 *cm*
I.	7. Kaolinický pískovec, uprostřed místy s dvěma vložkami limonitického pískovce oddělenými jílovitou vložkou	60 *cm*
	6. Železitý slepenec nebo kaolinický pískovec s drobnými valounky křemennými	15 *cm*
	5. Bílý jemnozrnný kvádrový pískovec	250 *cm*
	4. Hrubozrnný pískovec	20 *cm*
	3. Slepenec s valounky křemene a buližníku	5 *cm*
	2. Bílý jemnozrnný kaolinický pískovec kvádrový	220 *cm*
	Nepřístupno.	
	1. Železitý pískovec	1-1½ *m*

Transgrese I. pásma přes d_ε asi ve výši 210 *m*.

Transgrese přes spodní silur přímo na „Skále" přístupna není, ale basální poloha železitých pískovců vystupuje na silnici z Brandýsa k Zapům asi u vrstevnice 210.

Rozšíření I. pásma na Krejčí-Helmhackerově geol. mapě okolí pražského není správně zaneseno. Na levém břehu Labe mezi Zapy a Brandýsem je rozšířeno pásmo II. v daleko menším rozsahu než jak udává mapa. Omyl ten způsoben byl tím, že pískovce I. pásma jsou na povrchu rezavě zbarveny hydroxydem železitým a podobají se pak značně podobným horninám II. pásma z lokalit sz. od Brandýsa.

* * *

Rozšíření **pásma II.** je menší než předcházejícího. Místy kde by mělo vystupovati v nadloží I. pásma je úplně zdenudováno, jindy pak zakryto hlinami, takže není přístupno. Naproti tomu setkáváme se s ním opět v místech, kde I. pásmo vyvinuto není, a tu transgreduje přímo přes algonkium nebo spodní silur.

V okolí Proseka a odtud na východ pokud spadá do rozsahu této práce, zachovávají vrstvy jeho celkem týž ráz petrografický. Jsou to *tmavozelené* silně glaukonitické *pískovce, jílovité* zvláště ve svrchnějších polohách. Na basi jejich vyskýtá se obyčejně vrstvička *železitého pískovce* často jílovitého, s křemennými valounky, jež mění se místy v rozpadavý *slepenec.* Mocnost této basální vrstvy obnáší 10—20 *cm.* Mocnost glaukonitických pískovců, jež mívají někdy roztroušené valounky křemenné a buližníkové, je u Proseka průměrně 50—70 *cm,* na silniční serpentině sv. od Vysočan asi 90 *cm,* v železničním zářezu jižně od Satalic 1.2 *m.*

Ve Střížkově sz. od Proseka jsou pískovce II. pásma méně glaukonitické, a jsou přeplněny drobnými ostrohrannými úlomky buližníkovými. Tyto se vyskytují i v nejvyšších polohách pásma I., takže obě souvrství rozeznáme jen podle přítomnosti glaukonitu. Jílovitý glaukonitický pískovec II. pásma byl přístupen na jaře r. 1920 nadloží kaolinických pískovců I. pásma u koty 258 jjv od Čakovic. Stejné vrstvy objevují se dále v Myškovicích a v polích mezi Kbely a Vinoří. Na cestě z Vinoře do Radonic je odkryto II. pásmo v neúplné mocnosti asi 50 *cm.* Jsou to nazelenalé písčité jíly nebo jílovité pískovce na spodu deskovité. Spodní vrstvy obsahují sporadické valounky křemenné. Východněji směrem k Brandýsu, pokud je II. pásmo zachováno anebo přístupno v nadloží pásma I., jeví vesměs podobné složení a i mocnost jeho je dosti stálá; nepřesahuje obyčejně 1 *m.* Teprve vrstvy odkryté na Skále u Brandýsa jeví složení odchylné. Pásmo II. je tu tvořeno nazelenalými, deskovitými, jemnozrnnými, glaukonitickými pískovci v mocnosti přes 2 *m.*

Jak výše již bylo zmíněno, vytrácí se I. pásmo na čáře vedoucí od Veleně k Myškovicům a odtud obloukem sev. od Přezletic a Dřevčic ku Brandýsu. Severně po případě sv od této linie transgreduje pásmo II. přímo přes starší útvary. V jv části této oblasti, u Myškovic a Veleně zachovává při tom *stejný ráz petrografický,* jako tehdy, jsou-li v podloží jeho vyvinuty vrstvy pásma I. Je tu přístupno jen na dvou místech. Jv od Veleně po levé straně cesty vedoucí k jv do Přezletic silně jílovitý glaukonitický pískovec II. pásma transgreduje asi ve výši 225 *m* přes algonkické břidlice. Druhý výskyt je na cestě z Myškovic k sv ku kotě 259, kde poměry jsou úplně shodné. Jinak je II. pásmo v této krajině buď zdenudováno nebo zakryto hlinami, nebo konečně vůbec nedošlo k jeho sedimentaci.

V oblasti severovýchodní, mezi Brázdimí, Dřevčicemi a Brandýsem, je vývoj II. pásma poněkud odchylný. Je tu tvořeno buď nazelenalými *glaukonitickými, deskovitými pískovci,* nebo *rezavými pískovci* s tmelem částečně železitým. Mocnost kolísá mezi 1½—3 *m*. Glaukonitické deskovité pískovce jsou vyvinuty po levém břehu Labe nad Brandýsem, kde jsou na povrchu z největší části přikryty diluviálními labskými štěrky, takže vycházejí jen v hlubších zářezech a pak na labském břehu. Transgresse jejich přes algonkium je pěkně odkryta v rokli vedoucí k Labi u koty 182 na silnici z Brandýsa do Labského Kostelce. Profil tu odkrytý je tento:

Diluviální štěrk a písek.	
3. Glaukonitické pískovce šedozelené deskovité, s muskovitem, s Exogyra columba	2-2½ *m*
2. Pevný, jemnozrnný železitý pískovec	5 *cm*
1. Železitý slepenec s drobnými valouny bílého křemene, buližníku a ostrohrannými úlomky algonkických břidlic	5 *cm*
Algonkické břidlice.	

Od této lokality směrem k Brázdimi a pak severně a sz od Popovic převládají naproti tomu v II. pásmu rezavé, muskovitické, jemnozrnné pískovce daleko méně glaukonitu obsahující. Časté jsou v nich: Exogyra columba, Ostrea sp., Pecten sp. Železitý slepenec nebo pískovec na basi II. pásma je vyvinut jen lokálně. Na některých odkryvech severně a sv od Popovic schází, je však přítomen sv od Brázdimi, kde místy nalezneme jeho úlomky v polích. Jižně od Popovic, na výše již zmíněné vyvýšenině tvořené v době sedimentace II. pásma drabovskými křemenci, setkáváme se s vývojem vrstev poněkud odchylným. Na jižní straně této vyvýšeniny pokud je vyvinuto v podloží II. pásma pásmo I., skládá se z jemnozrnného glaukonitického pískovce v mocnosti asi 160 *cm*. Při transgresi přes drabovské křemence jeví jeho vrstvy následující složení:

Ornice.	
3. Snadno rozpadavý glaukonitický pískovec nebo písek s četnými valounky křemennými	75 *cm*
2. Pevný nazelenalý glaukonitický pískovec	asi 20-30 *cm*
1. Basální slepenec. Zakulacené a ohlazené valouny drabovských křemenců (největší 50 *cm* v průměru), s nedokonale oválenými menšími úlomky křemencovými setmeleny jsou glaukonitickým snadno rozpadavým pískovcem. Vyplňuje nerovnosti v d_δ.	
Drabovské křemence.	

Na severním svahu této vyvýšeniny, v Popovicích a na silnici z Popovic do Dřevčic vykazují vrstvy II. pásma složení odchylné.

Profil na pravém břehu Valchy v Popovicích.

Hlína.

5. Jemnozrnný nazelenalý glaukonitický pískovec	130 *cm*
4. Jílovitý pískovec poněkud glaukonitický	10 *cm*
3. Vápenitý pískovec-slepenec s valounky křemene a buližníku	3-5 *cm*
2. Jemný železitý pískovec přeplněný většinou nezřetelnými otisky zkamenělin	30 *cm*
1. Jemnozrnný glaukonitický pískovec s valounky křemene a místy s limonitickými vrstvičkami	50-70*cm*

Drabovské křemence nebo zahořanské břidlice.

V zářezu silnice z Popovic do Dřevčic vystupuje nad drabovskými křemenci *železitý deskovitý slepenec* mocný 30—75 *cm*. Nad ním uloženy jsou *rezavé pískovce* na spodu s řidkými valounky křemennými v mocnosti 25 *cm* — 1½ *m*.

V rázu od dosud popsaných lokalit naprosto odchylném, vyvinuty jsou vrstvy II. pásma na jz úpatí buližníkového vrchu Kuchynky u Brázdimi. Je to typický *pobřežní slepenec* odkrytý tu v mocnosti až 2 *m*. Sestává z oválených a ohlazených valounů buližníkových, z nichž největší mají až ½ *m* v průměru, roztříštěných ostrohranných úlomků buližníkových a valounků bílého křemene. Tmel tvoří jílovitý nebo železitý písek poněkud slinitý. Vyskytují se v něm úlomky rozdrcených skořápek ústřicových a rudistových. Buližníkové valouny jsou povlečeny vápenitou korou, která se tvoří z úlomků vápnitých skořápek v slepenci přítomných. Nejbližší okolí této lokality pokrývá hlína, takže souvislost její s normálními pískovci II. pásma není přístupná. O příčinách různého vývoje II. pásma křídového v oblasti této práce nemíním se prozatím zmiňovati. Učiním tak až později, v práci zabývající se křídovou transgresí v širším pražském okolí.

* * *

Pásmo III. je ze všech křídových souvrství nejméně přístupno. Severně od čáry, probíhající mezi vých. koncem Ládví k Vinoři, Jenštejnu a Dřevčicům je téměř úplně zdenudováno. Setkáváme se tu s ním v nepatrných útržcích na nejvyšších místech předkřídových vyvýšenin sv od Myškovic a pak na Kuchyňce u Brázdimi. Jižně od zmíněné linie je sice zachováno, ale je přístupno jen na několika místech, jsouc jinak přikryto mocnou pokrývkou spraše, svahových hlin nebo eluvia.

U Proseka tvořeno je na basi asi 3 *m* mocnou vrstvou *jílů a slínů*, (souvrství III.*a*), nad nimi leží pak *písčité slíny* s blízami *křemitých vápenců*, (souvrství III. *b*). Od Proseka na východ je přístupnost III. pásma daleko menší, jen místy vystupují v polích písčité slíny III. *b*. V železničním zářezu jižně od Satalic odkryto je souvrství III. *a* v neúplné mocnosti asi 1 *m*. Nad pásmem II. leží asi 30 *cm* mocná vrstva po-

poněkud *písčitých glaukonitických slínů,* nad nimi *nažloutlé slíny* přístupné v mocnosti asi 60 *cm.*[3])

Na kbelské pláni a severním jejím svahu odkryty jsou písčité slíny III. *b* v několika cihelnách. Jižně od Ďáblic roztroušeny jsou úlomky písčitých slínů a křemitých vápenců v polích, v okolí dnes opuštěných jam, kde byly kdysi dobývány. Na povrch vycházejí sv od Kbel, a pak v okolí Satalic, kde občas otevírají se v nich lomy na stavební kámen. Vrstvy zastižené ve vrtech na kbelském letišti vykazují ráz podobný, a i tu vystupují na basi písčitých slínů III. *b žlutavé jíly* a *slinité jíly* v mocnosti až 3·70 *m* (III. *a*).

Vrstvy III. pásma v okolí Radonic jsou většinou špatně přístupné. Na povrchu povalují se v polích úlomky písčitých slínů a zvětralých křemitých vápenců III. *b*. Směrem k Brandýsu jsou špatně přístupny vrstvy III. pásma jv od Dřevčic, a to žlutavé slinité jíly III.*a* i úlomky písčitých slínů III. *b*, u koty 229 jižně od Vrábí písčité slíny III. *b*, a na „Skále" u Brandýsa spodní část souvrství III. *a* v podobě šedých jílů.

S trangresí III. pásma přes algonkium setkáváme se jednak na Ládví u Ďáblic, jednak na některých buližníkových kamýcích sv od Myškovic, a konečně na Kuchynce u Brázdimi.

Nejzajímavější je vývoj III. pásma na Ládví. V poslední době shodují se vesměs autoři o lokalitě této se zmiňující v tom, že jedná se tu o křídový útes z doby III. pásma (Dědina, Kodym, Matějka, Novák). Do nedávna byly odtud uváděny pouze ohlazené valouny buližníkové, někdy ještě uložené v železitém písku. V. J. Novák v poslední své práci[4]) popisuje z jz svahu Ládví „bělošedou" hlínu, jež vyplňuje dutiny v buližníku. Letos na jaře, kdy měl jsem příležitost opětovně shlédnouti útes na Ládví, byl otevřen menší lom v těchto místech. Při tom odkryty byly šedobílé slíny a jíly (místy písčité), vyplňující kapsovité prohlubeniny a nerovnosti v buližníku. V nich uloženy jsou rovněž ohlazené valouny buližníkové spolu s menšími hranatými úlomky. Náležejí tedy tyto horniny rovněž ke křídovému útesu. Novákův výklad, že jedná se tu o produkt zvětrání snad vyšších pásem křídových, je naprosto nesprávný a nemožný. Je opravdu záhadou jak mohl autor, jenž při studiu křídového podkladu pražského okolí jistě dosti podrobně prošel oblast, o níž mluví ve své práci, si nevšimnouti, jak zvětrávají horniny III. a IV. pásma křídového a, že produktem jejich zvětrání nemůže být nikdy slinito-jílovitá hmota na Ládví a jinde na buližníkových kamýcích se vyskytující.

---

[3]) Na jaře 1922 při opravě trati odkryto bylo souvrství III. *a* v mocnosti asi 170 *cm.*

[4]) V. J. Novák: O tvarech podlohy křídového útvaru v okolí Pražském. Čas. Musea kr. Čes. 1921. Práce dosud není ukončena a proto jinde v textu se jí nedovolávám. Ostatně o některých jejích vývodech, s nimiž nelze souhlasiti, pojednám jinde.

Na Kuchynce u Brázdimi a na některých buližníkových kamýcích jv od Veleně setkáváme se rovněž se linitými a jílovitými horninami III. pásma transgredujícími přes algonkium. Valouny jako na Ládví se v nich však nevyskytují. Nacházíme v nich, a to hlavně na basi ostrohranné úlomky buližníkové, ve vyšších polohách již jen ojediněle. Na Kuchynce jsou v nich i úlomky skořápek Ostrea sp. Výskyty právě zmíněné představují nepatrné zbytky slinito-jílovitých vrstev pásma III. *a*, jež původně souvisle tu byly rozšířeny, a zachovaly se jen tam, kde byly chráněny před denudací.

* * *

Pokud se týče *tektoniky* křídových vrstev, je tato velmi jednoduchá. Celkový *sklon křídové tabule,* pokud možno o ní mluviti v této oblasti, kde souvislé uložení vrstev je přerušováno předkřídovými vyvýšeninami, je severovýchodní. Úhel sklonu je tak malý, že přímo jej klinometrem měřiti nelze.

Zlomy křídové vrstvy porušující jsou *nepatrné poklesy* směru *sz-jv*; skok obnáší zřídka kdy více než 2 *m*. Jsou odkryty v lomech u Proseka, v lomu u Podolánky. Mezi Kobylisy a Prosekem měla by vycházeti porucha způsobující svah mezi vých. koncem Ládví, Sedlcem a Panenskými Břežany; pro hlínu nepodařilo se mi však zjistiti její výchoz.[5]

* * *

Závěr.

Údaje obsažené v této práci možno shrnouti asi takto:

Pásmo I. uloženo je v depresi předkřídového terénu a *vytrácí se* na linii probíhající mezi Velení, Myškovicemi, sev. od Přezletic a Dřevčic k Brandýsu. U Proseka tvořeno je na spodu *železitými pískovci* nebo *slepenci* měnlivé mocnosti 0-4 *m*. Nad nimi následují *lupky a jíly* s bohatou florou, jichž mocnost je největší sev. od Hloubětína, kde obnáší 9 *m*. Místy transgreduje toto souvrství přímo přes spodní silur. Směrem k severu klesá jeho mocnost, na letišti u Kbel je 160 *cm*, a posléze se vytrácí, takže poblíže výše zmíněné linie jsou vyvinuta jen souvrství odpovídající svrchním polohám kaolinických pískovců I. pásma u Proseka. Jsou to opět *kaolinické pískovce,* jenže celkové složení jejich je tu poněkud odchylné od normálního vývoje, následkem sousedství předkřídových vyvýšenin. U Dřevčic vystupuje v nich na basi *železitý slepenec* a *pískovec,* ač jindy při transgresi přes starší útvary se obyčejně *složení jich nemění,* a kaolinické pískovce obsahují pouze *ostro-*

---

[5] Pozn. během tisku. Větší zlomy zjištěny byly při dalším geol. mapování křídového území na listu Praha v letních měsících 1922.

hranné úlomky hornin svého podloží. Mezi Jenštejnem a Cvrčovicemi a odtud směrem k Brandýsu jsou v nich přítomny dvě polohy *slepencové,* místně *s valouny drabovských křemenců,* pocházejícími z křemencových hřbetů, jež v době jejich sedimentace čněly na povrch. Sv od Popovic a u Hrušova vyskytuje se v nich kromě toho 1½ až 2 *m* pod transgresní plochou pásma II. poloha *písčitých lupků a jílů,* mocná asi 1 *m.*

Pásmo II. tam, kde transgreduje přes pásmo I., skládá se z *jílovitých tmavozelených glaukonitických pískovců,* jichž mocnost kolísá mezi 60—130 *cm. Na basi* bývá někdy vyvinuta 10—20 *cm* mocná vrstva rezavého *rozpadavého pískovce* nebo *slepence.* V blízkosti oblasti, kde vytrácejí se vrstvy I. pásma, *mocnost* pásma II. se *zvětšuje* a vrstvy *nejsou jílovité.* (Dřevčice, „Skála" u Brandýsa.) Jindy, na př. u Myškovic a Veleně, *nemění se* petrografické jeho *složení* ani *při trassgresi přes algonkium.* Mezi Brázdimí, Popovicemi a Brandýsem, kde transgreduje rovněž přes algonkium, je tvořeno jednak *šedozelenými deskovitými glaukonitickými pískovci,* jednak *rezavými pískovci slídnatými,* místně s *železitou, písčitou* neb *slepencovou* vrstvou na basi. Na jz konci Kuchynky u Brázdimi vyvinuto je v podobě *útesového slepence.*

Pásmo III. tvořeno je *na basi* vrstvou *jílů, slínů nebo slinitých jílů, souvrství III. a,* které místy *transgredují přímo přes algonkium* (sv od Myškovic a pod vrcholem Kuchynky). Při tom ztrácejí horniny ty obvyklou vrstevnatost, a *obsahují* ostrohranné *úlomky buližníkové,* po případě místně i valounky křemenné, a jsou poněkud *písčité.* Stejné horniny byly zjištěny i na útesu III. pásma na Ládví. Nad souvrstvím III. *a,* tam kde nebyly zdenudovány, uloženy jsou *písčité slíny s jehlicemi spongií* a vložkami nebo konkrecemi *křemitých vápenců, souvrství III. b.*

V prosinci 1921.

Státní geologický ústav
Československé republiky

Souvislost věty Feuerbachovy s rovnoramennou hyperbolou.

Napsal **J. SOBOTKA.**

Předloženo dne 27. ledna 1922.

1. Věta Feuerbachova souvisí úzce s některými vlastnostmi rovnoramenné hyperboly. V následujícím budiž tato souvislost v jistém směru stopována.

Především vytkněme si větu:[1]

„Rovnoramenná hyperbola h danému trojúhelníku $A B C$ opsaná a procházející středem K_i kterékoliv kružnice trojúhelníku tomu vepsané má tu vlastnost, že tečna její v bodě K_i prochází středem K kružnice trojúhelníku $A B C$ opsané."

Abychom větu tu dokázali, promítněme vrcholy A, B, C z bodu K_i na kružnici k opsanou trojúhelníku $A B C$ do bodů A', B', C'. Obdržíme trojúhelník $A' B' C'$, jehož strany $A' B'$, $B' C'$, $C' A'$ jsou příslušně kolmy k $C K_i$, $A K_i$, $B K_i$. Hyperbola h' opsaná trojúhelníku $A' B' C'$, procházející bodem K_i a mající v K_i tečnu $K_i K$, jest rovnoramenná, poněvadž bod K jest bodem výšek v trojúhelníku $A' B' C'$. Centrická involuce mající K_i za střed a poláru o bodu K_i vzhledem ke kružnici k za osu, převádí tuto samu v sebe a hyperbolu h' tudíž v hyperbolu h, která jest trojúhelníku $A B C$ opsána a dotýká se přímky $K K_i$ v bodě K_i.

Mysleme si involuci pravých úhlů, jejichž vrchol V leží na rovnoramenné hyperbole h; involuce ta seče h v involuci, která má nekonečně vzdálené body za jeden pár elementů, bod V a průsečík N normály k h v bodě V ztýčené za další pár. Z toho plyne, že spojnice libovolného páru elementů v této involuci jest rovnoběžná k normále $V N$.

Osa centrálná involuce $(K_i o)$, rovnoběžná k o a půlící vzdálenost bodu K_i od přímky o, protíná h' ve dvou bodech G_1, G_2 a dle právě uvedeného vztahu jest přímka $G_1 K_i$ kolmá k přímce $G_2 K_i$. Tyto přímky směrují zároveň k bodům v nekonečnu křivky h, takže tato jest rovnoramennou hyperbolou, čímž uvedená věta jest dokázána.

---

[1] Řada obrazců tvoří podstatnou část tohoto pojednání; obrazce ty lze ale z uvedeného popisu snadno sestrojiti.

2. Uvažujme rovinu trojúhelníka $A\,B\,C$ jakožto průmětnu, středy K_1, K_2, K_3, K_o kružnic k_1, k_2, k_3, k_0 jemu vepsaných za orthogonalné průměty čtyř bodů (K_1), (K_2), (K_3), (K_o), jejichž vzdálenost od průmětny rovná se příslušným poloměrům r_1, r_2, r_3, r_0 těchto kružnic, při čemž body (K_1), (K_2), (K_3) odpovídající středům kružnic vně vepsaných nechť leží na jedné straně průmětny, kdežto bod (K_0) odpovídající středu K_o kružnice vnitř vepsané nechť leží na její straně druhé. Kružnice ty orientujme tak, aby byly cyklografickými obrazy bodů (K_i), $(i = 1, 2, 3, 0)$. Hledejme nyní cykly, které se takto stanovených cyklů k_i dotýkají.

Rotační kužele opírající se na př. o k_2 a k_3, mající vrcholy v bodech (K_2) a (K_3) protínají se v konečnu v kuželosečce, jejíž rovina P_{23} má za stopu do průmětny přímku potenční p_{23} kružnic k_2, k_3 a prochází bodem (K_{23}), který půlí úsečku $(K_2)\,(K_3)$. Obdobně rotační kužele opírající se o k_3, k_1 a mající vrcholy v bodech (K_3), (K_1) protínají se v kuželosečce, jejíž rovina P_{31} má za stopu do průmětny přímku potenční p_{31} kružnic k_3, k_1 a prochází bodem (K_{31}), který půlí úsečku $(K_3)\,(K_1)$. Roviny P_{23}, P_{31} protínají se v přímce (p_0), obsahující společné body obou kuželoseček, kteréžto body mají za orthogonálný průmět středy cyklů, jež se prve na k_1, k_2, k_3 vytčených cyklů dotýkají.

Buďtež A_0, B_0, C_0 body půlící strany $B\,C$, $C\,A$, $A\,B$ trojúhelníka $A\,B\,C$; body ty půlí též vzdálenost bodů dotyku párů kružnic k_2, k_3, pokud se týče k_3, k_1 a k_1, k_2 s přímkami $B\,C$, $C\,A$, $A\,B$. Procházejí tudíž přímky potenční p_{23}, p_{31}, p_{12} těchto párů rovněž body A_0, B_0, C_0 a půlí úhly v trojúhelníku $A_0\,B_0\,C_0$. Jest tudíž střed potenční P_0 kružnic k_1, k_2, k_3 středem kružnice vnitř vepsané trojúhelníku $A_0\,B_0\,C_0$. Přímka (p_0) prochází bodem P_0. Ona protíná přímku $A_0\,(K_{23})$ obsaženou v rovině P_{23}, přímku $B_0\,(K_{31})$ obsaženou v rovině P_{31} a rovněž i přímku $C_0\,(K_{12})$, na níž leží bod K_{12} půlící úsečku $(K_1)\,(K_2)$, a která jest obsažena v rovině P_{12} kuželosečky společné kuželům $(K_1)\,k_1$, $(K_2)\,k_2$.

Proto přímky $A_0\,(K_{23})$, $B_0\,(K_{31})$, $C_0\,(K_{12})$ stanoví hyperboloid H_0, na němž leží přímka (p_0) a přímka kolmá k průmětně, procházející středem K kružnice k opsané trojúhelníku $A\,B\,C$. Stopa s plochy H_0 jest opsaná trojúhelníku $A_0\,B_0\,C_0$, prochází jeho bodem výšek K, jest tedy rovnoramenou hyperbolou, a jelikož prochází též středem P_0 kružnice trojúhelníku $A_0\,B_0\,C_0$ vepsané, má v bodě tom za tečnu přímku $P_0\,Q$ směřující k středu Q kružnice q trojúhelníku $A_0\,B_0\,C_0$ opsané, t. j. kružnice devíti bodů pro trojúhelník $A\,B\,C$.

Budiž dále (K) bod, jenž se promítá orthogonálně do bodu K, cyklograficky do kružnice k a leží vzhledem ke (K_0) na opačné straně průmětny. Rovina P_{23} spojuje p_{23} s přímkou $A_0\,(K_{23})$. Jelikož tato má k průmětně sklon $\frac{\pi}{4}$, jest rovina $A\,K_0\,(K)$ rovnoběžná s P_{23}; proto jest přímka (p_0) rovnoběžná s rovinou $A\,K_0\,(K)$; obdobné soudíme, že přímka (p_0) jest rovnoběžná s rovinami $B\,K_0\,(K)$. $C\,K_0\,(K)$, z čehož plyne, že přímka (p_0) jest rovnoběžná k přímce $(K)\,K_0$.

Uvažujme nyní polohu podobnou pro těžiště trojúhelníků $A\,B\,C$ a $A_0\,B_0\,C_0$ jako střed podobnosti a pro poměr podobnosti rovný $-\frac{1}{2}$. V podobnosti této odpovídá bodu (K) bod (Q) na opačné straně průmětný, jehož obraz cyklografický leží na kružnici q. Přímce $(K)\,K_0$ odpovída přímka (p_0), a poněvadž hyperbole rovnoramenné opsané trojúhelníku $A\,B\,C$, procházející bodem K_0 a dle předcházejícího článku dotýkající se v K_0 přímky $K\,K_0$ přísluší hyperbola s, jest patrno, že průmět orthogonálný p_0 přímky (p_0) se dotýká stopy s v bodě P_0, takže kolmice v P_0 k průmětně vztýčená leží na H_0.

Zcela obdobně seznáváme, že i přímka spojující společné dva body v konečnu kterékoliv jiné trojice kuželů $(K_i)\,k_i$ prochází bodem (Q). Tím dospěli jsme k souvislosti, již jsme dříve¹) jinou cestou odvodili.

Bod K_{23} má od průmětny vzdálenost $\frac{r_2 + r_3}{2}$ rovnající se délce $R\,(1 + \cos A)$ průmětu úsečky $A_0\,(K_{23})$, značíme-li R poloměr kružnice k; tím dostáváme přímo relace

$$r_2 + r_3 = 2\,R\,(1 + \cos A),\quad r_3 + r_1 = 2\,R\,(1 + \cos B),\quad r_1 + r_2 = 2\,R\,(1 + \cos C)$$

$$r_1 - r_0 = 2\,R\,(1 - \cos A),\quad r_2 - r_0 = 2\,R\,(1 - \cos B),\quad r_3 - r_0 = 2\,R\,(1 - \cos C).$$

3. Dále si odvoďme větu:

„Rovnoramenná hyperbola h a kružnice k, která má svůj střed K v libovolném bodě na ní a prochází jejím středem O, mají tu vlastnost, že lze prvé z nich nekonečné množství trojúhelníků vepsati, jež jsou druhé opsány.“

Buďtež a_1, a_2 asymptoty hyperboly h a t její tečna v bodě K protínající asymptoty příslušné v bodech A_1, A_2. Tečna v A_1 ke k protíná h vždy v bodech realných A_0, B_0. Poněvadž přímka $A_0\,B_0$ jest rovnoběžná k normále hyperboly v bodě K, proto, jak jsme v čl. 1. seznali, jest $K\,A_0 \perp K\,B_0$. Jsou-li A^0, B^0 body souměrně položeny k A_0 a B_0 vzhledem k bodu K, jest tudíž $A_0\,B_0\,A^0\,B^0$ kosočtverec kružnici k opsaný. Označíme-li A^* průsečík přímky $A_0\,B_0$ s asymptotou a_2, jest proto $A_2\,B^0 = B_0\,A_1 = A^*\,A_0$, takže $A_0\,B^0 \parallel B_0\,A^0 \parallel a_2$.

Protínají následkem toho tečny kružnice k rovnoběžné k asymptotě a_2 hyperbolu v bodech A_0, B_0 ležících na tečně v A_1 kružnice k. Značíme-li C_0 bod v nekonečnu na a_2, dospíváme takto k trojúhelníku $A_0\,B_0\,C_0$ kružnici k opsaném a hyperbole h vepsaném. Lze proto nekonečné množství trojúhelníků $A\,B\,C$ hyperbole h vepsati, jež jsou kružnici k opsány. Druhý

---

¹) Cf. Čís. 2. těchto Rozprav, čl. 1.

takový trojúhelník $A_0' B_0' C_0'$ má vrchol C_0' v nekonečnu na a_1, ostatní dva vrcholy na tečně kružnice k v bodě A_2.

O kuželosečce k_2, jíž lze opsati trojúhelníky, které jsou jiné kuželosečce k_1 vepsány, pravíme, že jest s touto v poloze Ponceletově.

4. Uvažujme dvě kružnice k_1, k_2 takové, že k_2 jest v poloze Ponceletově vzhledem ke k_1. Spojnice středů nechť seče k_1 v bodech M_1, N_1. Uvažujme onen z trojúhelníků $A\,B\,C$ uvedených, který jest souměrný k centrále kružnic k_1, k_2, takže jeden vrchol jeho splývá s jedním z bodů M_1, N_1; označme bod ten M_1 a příslušný trojúhelník $A\,B\,C$ pak $M_1 P_1 Q_1$; středy kružnic k_1, k_2 buďtež K_1, K_2 a poloměry r_1, r_2. Tu dlužno rozeznávati dva případy. Buďto jest kružnice k_2 trojúhelníku $M_1 P_1 Q_1$ a tudíž všem realným trojúhelníkům $A\,B\,C$ vnitř anebo všem vně vepsána. Klaďme ještě $\overline{M_1 K_2} = m$. Uvažujme nejprv případ prvý. Z podobných trojúhelníkůplyne tu

$$\overline{M_1 P_1}^2 : 4\, r_1^2 = (m^2 - r_2^2) : m^2 \qquad (1)$$

a jelikož $\overline{M_1 P_1}^2 = 2\, r_1\, (m + r_2)$, obdržíme

$$2\, r_1 = \frac{m^2}{m - r_2}\,.$$

Je-li L koncový bod poloměru kružnice k_2 kolmého k centrále $K_1 K_2$, jest

$$\overline{K_1 L}^2 = r_2^2 + (m - r_1)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\, m\, r_1 + 2\, r_1\, (m - r_2) = (r_1 - r_2)^2.$$

Poněvadž zde jest $r_1 > r_2$, proto obdržíme $r_1 = \overline{K_1 L} + r_2$.

V případě druhém platí opět úměra (1), avšak $\overline{M_1 P_1}^2 = 2\, r_1\, (m - r_2)$, takže

$$2\, r = \frac{m^2}{m + r_2}$$

a tudíž $\overline{K_1 L}^2 = (r_1 + r_2)^2$. Obdržíme zde tedy $r_1 = \overline{K_1 L} - r_2$. Takto jsme vyjádřili podmínky pro kružnici k_2 v poloze Ponceletově k dané kružnici k_1 a naopak.

Je-li kružnice k_2 a centrála $K_1 K_2$ dána, sestrojíme bod L, kolem něhož jako středu opíšeme kružnici l poloměru r_2; pak příslušné kružnice k_1, k nimž jest k_2 v poloze Ponceletově, tvoří řadu kvadratickou kružnic, jejichž středy leží na $K_1 K_2$ a jež se dotýkají kružnice l. Přisoudíme-li této kružnici určitý smysl, pak budou cykly příslušné na kružnicích k_1 cyklografickými obrazy, do roviny M uvažovaných útvarů, pro body v prostoru, jež popíšou rovnoramennou hyperbolu, která jest křivkou průsečnou roviny položené kolmo k M přímkou $K_1 K_2$ s pravoúhelným kuželem rotačním opírajícím se o cyklus l a majícím vrchol v bodě, jehož cyklografickým obrazem jest cyklus tento.

Všecky kružnice v rovině M, k nimž jest daná kružnice k_2 v poloze Ponceletově, můžeme proto považovati jakožto cyklografické obrazy bodů dvojdílného rotačního hyperboloidu H dotýkajícího se roviny M v bodě K_2, jehož osa prochází bodem K_2 a jest kolmá k M. Zvolíme-li osu tuto za osu z a K_2 za počátek pravoúhlé soustavy souřadné, jest rovnice hyperboloidu toho

$$x^2 + y^2 - (z \pm r_2)^2 + r_2^2 = 0.$$

Je-li dána kružnice k_1 a centrála $K_1 K_2$, a sestrojíme-li libovolnou kružnici l, která se dotýká kružnice k_1 a přímky $K_1 K_2$, této v bodě K_2, pak kružnice k_2 středu K_2, rovné kružnici l, jest jednou z kružnic v Ponceletově poloze ke k_1. Jest patrno, že místem středů kružnic l jest parabola mající K_1 za ohnisko, kolmici v K_1 ku $K_1 K_2$ za osu a r_1 za parametr. Z toho plyne, že souhrn kružnic k_2, které jsou k druhé kružnici k_1 v poloze Ponceletově, jest cyklografickým zobrazením na rovinu M bodů rotačního paraboloidu, který má své ohnisko v K_1 a prochází kružnicí k_1. Volíme-li osu jeho za osu z a K_1 za počátek pravoúhlé soustavy, bude rovnice jeho

$$x^2 + y^2 - 2\, r_1 z \mp r_1^2 = 0.$$

5. Uvažujme opět jako v čl. 3. rovnoramennou hyperbolu h a kružnici k poloměru r, která má svůj střed na ní a prochází jejím středem O. Osy této hyperboly protnou k ještě v bodech L, L' ležících na průměru kružnice této kolmém k tečně t hyperboly h v bodě K; neboť kolmice k libovolnému průměru rovnoramenné hyperboly a průměr k tomuto sdružený leží antiparallelně vzhledem k jejím osám.

Budiž dále $A\,B\,C$ libovolný trojúhelník opsaný kružnici k a vepsaný hyperbole h. Opišme trojúhelníku tomu kružnici k', jejíž střed označíme K'. Rovnoramenná hyperbola opsaná trojúhelníku $A\,B\,C$ a procházející středem K kružnice vepsané k má za tečnu v K přímku $K\,K'$. Ježto tato hyperbola má s h body A, B, C, K a bod výšek H v trojúhelníku $A\,B\,C$ společné, splývá s ní. Leží proto střed K' na tečně t. Z toho plyne, že všecky kružnice k', které opíšeme trojúhelníkům $A\,B\,C$, jež jsou h vepsány a k opsány, mají své středy na tečně t, a k jest ke všem v poloze Ponceletově. Opíšeme-li tedy cyklus l kolem jednoho z bodů L, L', řekněme L, jakožto středu procházející bodem K, budou všecky kružnice k' vyjádřeny cykly o společné centrále t dotýkajícími se cyklu l a budou cyklografickými obrazy bodů na hyperbole rovnoramenné (u), jejíž poloosa má délku r. Sklopme její rovinu do roviny M. Budiž u poloha, do níž při sklopení tom přechází křivka (u). Křivky h a u jsou v poloze affinní, majíce t za osu a jednu neb druhou osu hyperboly h za směr affinity podle toho, v kterém smyslu uvedené sklopení provedeme. V poloze té příslušejí úsečkám kolmým k t v soustavě křivky u úsečky stejně dlouhé a rovnoběžné s $K\,O$ v soustavě křivky h. Proto poloměru $K'\,D'$ kružnice k' kolmému k t, jehož koncový bod D' leží na u, přísluší na h bod D, pro nějž $K' D \parallel K O$ a $\overline{K' D} = \overline{K' D'}$. Jest tedy D průsečíkem kružnice k' s hyperbolou h.

Jest patrno, že každá kružnice k' mající střed K' na t a dotýkající se kružnice l seče h ve čtyřech bodech, z nichž tři tvoří trojúhelník opsaný kružnici k. Neboť jeden z těch průsečíků leží na rovnoběžce bodem K' k přímce $K O$. Budiž A další z nich; jím prochází mimo k' ještě jedna kružnice k'', která má střed na t a dotýká se l. Kružnicí tou může býti jenom kružnice, která má svůj střed v bodě, v němž rovnoběžka bodem A ke $K O$ vedená protíná t. Vepíšeme-li totiž hyperbole h trojúhelník, jenž jest k opsán a jehož jeden vrchol jest A, tu víme, že kružnice jemu opsaná musí se l dotýkati; trojúhelník ten musí tudíž býti vepsán buď kružnicí k' nebo k''; avšak bod A na kružnici k'' jest různý od jejich bodů průsečných s h, jež mohou přináležeti trojúhelníku h vepsanému a k opsanému.

Každý bod na t jest středem dvou kružnic k'. Splývá-li bod ten s K, jest poloměr jedné z nich k_0' roven $2r$; příslušný trojúhelník $A B C$ jest proto rovnostranný. Platí tedy věta:

„Kružnice, které mají středy K na rovnoramenné hyperbole a jejichž poloměry rovnají se průměrům hyperboly procházejícím jejích středy K protínají hyperbolu tu ještě ve vrcholích rovnostranných trojúhelníků."

Druhá kružnice k' středu K degeneruje v isotropické přímky. Tyto protínají h v dvojných bodech E_1, E_2 involuce, v níž jest hyperbola ta proťata involucí pravých úhlů kolem K. Jsou tudíž E_1, E_2 koncové body průměru v h sdruženého ke směru normály $L L'$. Průměr ten jest kolmý k průměru $K O$; splývá proto s tečnou o kružnice k v bodě O. Jest následkem toho trojúhelník $K E_1 E_2$ též jedním z trojúhelníků $A B C$.

Vrcholy trojúhelníků $A B C$ tvoří na hyperbole h kubickou involuci J^3 a příslušné body D řadu bodovou k ní prométnou; neboť každé trojici bodů $A B C$ jest jednoznačně přiřaděn bod D a naopak, jak z konstrukcí našich patrno.

6. Přiřaďme vrcholům každého z uvažovaných trojúhelníků $A B C$ jeho bod výšek H. Seznáme, že řada $[H]$ bodů H na h jest rovněž prométná s kubickou involucí J^3. Každé trojici $A B C$ v J^3 přísluší v $[H]$ určitý bod H jednoznačně. Půjde o to dokázati, že také naopak libovolný bod H na h jest bodem výšek jednoho a jen jednoho trojúhelníku $A B C$ kružnici k opsaného a hyperbole h vepsaného. Hleďme tedy k bodu H sestrojiti příslušný trojúhelník $A B C$. Involuce J^3 vztahuje k a h k sobě prométně tím, že libovolné tečně q křivky k přidružíme na h onen bod Q, v němž se protínají další tečny ke křivce k z bodů, v nichž q seče h a naopak.

Páry rovnoběžných tečen q, q' ke k tvoří involuci na k a páry $Q Q'$ příslušných bodů Q tvoří involuci na h. Splynou-li q, q' s tečnami, jež jsme dříve (čl. 3) označili $A_0 B_0$ a $A^0 B^0$, pak splynou body Q, Q' s nekonečně vzdálenými body na h. Proto budou spojnice $(Q Q')$ párů $Q Q'$ tvořiti svazek přímek rovnoběžných. Splynou-li q, q' s tečnami rovnoběžnými k asymptotám a_2, a_1, splynou body Q, Q' s A_0, B_0, resp. A^0, B^0. Proto jest $(Q\,Q') \parallel A_0\,B_0$. Jsou tudíž přímky $(Q\,Q')$ rovnoběžné k normále $L\,L'$ bodu K a následkem toho jsou sdruženy k průměru o hyperboly h, jenž se dotýká kružnice k.

Spustíme-li k tečnám q, q' kolmici s z bodu H, obdržíme svazek přímek $[s]$ promětný s involucí $[q\,q']$. Svazek řečený protne h v řadě (S) bodové promětné k involuci $[Q\,Q']$; tehdy a jen tehdy, když bod S řady (S) splyne s jedním bodem Q příslušného páru involuce $[Q\,Q']$, jest bod tento vrcholem jednoho z trojúhelníků $A\,B\,C$, jehož vrcholy tvoří trojici v J^3.

Svazek $[s]$ jest také promětný ke svazku $[Q]$ přímek $Q\,Q'$, spojujících příslušné páry involuce $[Q\,Q']$ a vytvoří s ním kuželosečku u. Přímce nekonečně vzdálené ve svazku $[Q]$ přísluší v $[s]$ přímka kolmá k $A_0\,B_0$ a $A^0\,B^0$, tedy přímka rovnoběžná s t, z čehož plyne, že u jest taktéž ro noramenná hyperbola, jejíž asymptoty jsou rovnoběžny k $L\,L'$ a t. Kuželosečka u seče h v bodě H a ve třech dalších bodech A^*, B^*, C^* té vlastnosti, že spojnice libovolného z nich na př. bodu A^* s bodem H jest kolmá k přímce q_α spojující body B, C, v nichž tečny z A^* ke k vedené protínají ještě hyperbolu h. Trojúhelníky $A^*\,B^*\,C^*$, $A^*\,B\,C$ mají tudíž společnou výšku $A^*\,H$ a ježto tato seče obě hyperboly h, u v témže bodě H, jest tento společným bodem výšek obou trojúhelníků. Přímce $H\,B$ v $[s]$ přísluší tudíž v $[q\,q']$ pár, jemuž náleží $A^*\,C$ a přímce $H\,C$ pár, jemuž náleží $A^*\,B$. Proto musí body B, C splynouti s B^*, resp. C^*. Jest tudíž bodu H jednoznačně přiřaděna trojice $A^*\,B^*\,C^*$ v involuci J^3.

Jelikož obě řady bodů D a bodů H jsou promětny k involuci J^3, proto jsou také mezi sebou promětny.

Seznáváme dále, že poslední promětnost jest involucí.

Pro trojúhelník $A_0\,B_0\,C_0$, v němž C_0 jest jeden bod v nekonečnu na h, degeneruje k' v přímku $A_0\,B_0$ a v nekonečně vzdálenou přímku roviny M, jest tedy příslušný bod D druhý bod C^0 v nekonečnu na h. Bod ten jest též bodem výšek v $A_0\,B_0\,C_0$. Tím jest patrno, že promětné řady bodů D a H mají C_0, C^0 za samodružné elementy. Opíšeme-li kolem bodu K jako středu kružnici k', jejíž poloměr rovná se $2\,r$, pak jest, jak víme, příslušný trojúhelník $A\,B\,C$ rovnostranný, jeho bod výšek splyne s K a příslušný bod D na k, označme jej D_0, jest bod na h diametrálně protilehlý k bodu K. Invariant promětnosti jest roven dvojpoměru $(C_0\,C^0\,D_0\,K)$, kterýžto dvojpoměr má zde hodnotu -1. Tvoří proto řady bodů D a H skutečně involuci o dvojných bodech C_0, C^0, mající střed O za pol, pročež jsou libovolné dva sobě příslušné body D_0 a H na h diametrálně protilehlé.

Že si body D_0 a K přísluší v uvažované promětnosti involutorně, jest také patrno z toho, že bod D_0 jest bodem výšek trojúhelníka $K\,E_1\,E_2$; kružnice jemu opsaná se skládá z isotropických přímek bodem K vedených, a čtvrtý její průsečík s h splývá s bodem K.

V promětnosti svazků $[s]$ a $[Q]$ přísluší paprsku s_0 svazku prvého rovnoběžnému k přímkám svazku druhého v tomto svazku druhém přímka q_0, která jest asymptotou hyperboly u. Tato asymptota jest průměrem hyperboly h, jak plyne z následující úvahy.

Dejme bodům Q probíhati involuci (i) mající nekonečně vzdálený bod na t za pól, tedy body K a D_0 za body dvojné a $C_0 C^0$ za jeden pár elementů. Prometností dříve vytknutou mezi body Q a tečnami kružnice k přísluší involucí (i) involuce tečen na k a též involuce (i') jejich bodů dotyku. Bodu $Q \equiv K$ na h odpovídá prometně tečna $o \equiv E_1 E_2$ kružnice k. Poněvadž K jest dvojným bodem v (i), jest O dvojným bodem v (i') a páru $C_0 C^0$ v (i) přísluší pár $A_1 A_2$ v (i'); následkem toho jest kolmice v z O na t osou involuce (i'); budou tedy tečny v bodech libovolného páru v (i') ke kružnici k se protínati na v. Budiž nyní $A\,B\,C$ jeden trojúhelník opsaný k a vepsaný hyperbole h, jehož strana $A\,B$ jest rovnoběžná k t. Páru bodu $A\,B$ v (i) přísluší v (i') pár bodů, jejichž tečny ke k se protnou na v. Ale bodům A, B přísluší na k prometně tečny $B\,C$, $A\,C$; leží tedy bod C na přímce v, z čehož jest zřejmo, že v prometnosti svazků $[s]$ a $[Q]$ náleží paprsku v v svazku tomto paprsek k němu rovnoběžný ve svazku onom, takže přímka $v \equiv q_0$ jest asymptotou hyperboly u.

Poněvadž obě hyperboly u, h jsou opsány trojúhelníku $A\,B\,C$ a mají též jeho bod výšek společný, proto diagonální trojúhelník úplného čtyřrohu $A\,B\,C\,H$ jest společným trojúhelníkem polárním obou hyperbol. Trojúhelník ten má za vrcholy paty výšek trojúhelníka $A\,B\,C$, a kružnice f jemu opsaná jest geometrickým místem středů všech rovnoramenných hyperbol trojúhelníku $A\,B\,C$ opsaných. Proto prochází f bodem O a protíná v ještě v bodě U, který jest středem hyperboly u. Kružnice f jest kružnicí devíti bodů vzhledem k trojúhelníku $A\,B\,C$, ona má s kružnicí k' středu K' jemu opsanou bod H za vnější střed podobnosti, její poloměr rovná se polovině poloměru kružnice k', a její střed F leží na přímce $K'\,H$ půlíc úsečku $\overline{K'\,H}$. Následkem toho jest čtvrtý průsečík G kružnice k' s u bod na u diametrálně protilehlý k bodu H, takže $D\,G \parallel v$. Poněvadž $D\,O = O\,H$, proto leží body O, K, F na přímce rovnoběžné ke $K'\,D$. Tím seznáváme, že kružnice f se dotýká kružnice k v bodě O.

Souhrn kružnic f pro veškeré trojúhelníky k opsané a h vepsané tvoří tedy svazek kružnic dotýkajících se ve středu hyperboly h. Avšak libovolné kružnici f středu F, náležející svazku tomu, příslušejí dva body D na h, které obdržíme, když bodem F_1 na $K\,O$, pro nějž $\overline{K\,F_1} = 2\,.\,\overline{F\,O}$ vedeme rovnoběžku k tečně t. Rovnoběžka ta protne h ve dvou bodech D a D_1, a rovnoběžky k $O\,K$ body těmi vytínají z t body K', K_1'. Kružnice středu K' a poloměru $K'\,D$ seče hyperbolu h ve vrcholích jednoho trojúhelníku opsaného k, označme jej $A\,B\,C$, kdežto kružnice středu K_1' a poloměru $K_1'\,D_1$ seče h ve vrcholích druhého takového trojúhelníka $A_1\,B_1\,C_1$, a tyto trojúhelníky jsou ony dva možné, jež mají kružnici f za společnou kružnici devíti bodů. Paty výšek H, H_1 pro tyto trojúhelníky $A\,B\,C$, $A_1\,B_1\,C_1$ leží na rovnoběžce k t protínající $O\,K$ v bodě F_0, pro nějž $\overline{K\,F_0} = 2\,.\,\overline{K\,F}$.

7. Provedené úvahy o rovnoramenné hyperbole obsahují v sobě důkaz věty Feuerbachovy.

Je-li totiž $A\,B\,C$ libovolný trojúhelník a k jedna z kružnic jemu vnitř neb vně vepsaných středu K, dále k' kružnice středu K' trojúhelníku opsaná, víme, že body A, B, C, K prochází rovnoramenná hyperbola h, jež se v K dotýká přímky $K\,K'$. Poněvadž trojúhelník $A\,B\,C$ jest kružnici k opsán a hyperbole h vepsán, lze nekonečně mnoho trojúhelníků této vlastnosti sestrojiti. Buďtež a_1, a_2 asymptoty této hyperboly a C^0, C_0 jejich body v nekonečnu. Tečny kružnice k rovnoběžné k a_2 nechť protnou h ještě v bodech A_0, B_0; přímka $A_0\,B_0$ se musí dotýkati kružnice k, poněvadž $A_0\,B_0\,C_0$ jest jedním ze zmíněných trojúhelníků. Vytkněme si dále svazek kružnic s k soustředných a veďme k ním tečny rovnoběžné s a_2; ty budou tvořiti involuci, jež seče h v involuci bodové, která má body K a C^0 za dvojné elementy a $A_0\,B_0$ za jeden pár. Jest tudíž průsečík A_1 přímky $K\,K'$ s asymptotou a_1 pólem této involuce, a přímka $A_0\,B_0$ jím prochází. Jelikož body A_0, B_0 jsou průsečíky tečny $A_0\,B_0$ ke kružnici k s jejími tečnami $C_0\,A_0$, $C_0\,B_0$ k sobě rovnoběžnými, proto jest $\sphericalangle A_0\,K\,B_0$ pravý, následkem čehož, jak jsme dříve podotkli (čl. 1.), jest přímka $A_0\,B_0$ kolmá k tečně $K\,K'$ hyperboly h, pročež jest A_1 bodem dotyku přímky $B_0\,A_0$ s k. Z toho soudíme, že body koncové A_1, A_2 průměru kružnice k ležícího na přímce $K\,K'$ náležejí asymptotám hyperboly h, a že tudíž střed O této hyperboly leží na k, což dává větu:

„Rovnoramenná hyperbola libovolnému trojúhelníku opsaná a procházející středem kružnice jemu vnitř neb vně vepsané, má svůj střed na této kružnici.“

Poněvadž kružnice k vepsaná trojúhelníku buď vnitř neb vně jest s hyperbolou h v souvislosti, již jsme v předcházejícím článku uvažovali, dotýká se kružnice devíti bodů pro trojúhelník $A\,B\,C$ kružnice k, a to v bodě O; můžeme tedy vysloviti větu:

„Středy rovnoramenných hyperbol danému trojúhelníku opsaných a procházejících jednotlivými středy kružnic jemu vnitř a vně vepsaných jsou body dotyku těchto kružnic s kružnicí devíti bodů trojúhelníka daného.“

8. K těmže výsledkům vede následující úvaha.

Je-li dán trojúhelník $A\,B\,C$ a kružnice k středu K jemu vnitř neb vně vepsaná, položíme opět rovnoramennou hyperbolu h body A, B, C, K.

Body půlící strany všech trojúhelníků h vepsaných a k opsaných popisují křivku řádu čtvrtého k^4. Neboť na libovolné přímce p vzniká (2, 2) značná příbuznost tím, že tečnám ke k z bodů na p přiřadíme průsečíky její s průměry hyperboly h k tečnám těm sdruženými a naopak průměrům hyperboly té z bodů na p vycházejícím přiřadíme průsečíky tečen ke k, jež jsou rovnoběžny k průměrům sdruženým. Příbuznost ta dává čtyři koincidence, jež jsou body křivky k^4. Z konstrukce této plyne, že body C^0, C_0 v nekonečnu na h jsou body dvojnými křivky k^4 a bod O

jest pro ni bodem vratu. Neboť k^4 jest též místem bodů půlících úsečky na tečnách kružnice k omezené asymptotami a_1, a_2 hyperboly h. Kdyby bod O ležel vně kružnice k, pak by měla příslušná křivka k^4 v O bod dvojný, který při přechodu bodu O na k přechází v bod vratu.

Jelikož jest k^4 křivka racionálná, protíná ji svazek kuželoseček mající O za jeden bod základní, kdežto ostatní body základní neleží na k^4, v involuci bodové řádu šestého, stanovené dvěma skupinami, tedy dvěma kuželosečkami ve svazku.

Vytkněme si jednu takovou zcela zvláštní involuci.

Křivka k^4, jak z její konstrukce patrno, se kružnice k ve společných bodech obou dotýká; má tedy s k mimo O ještě tři body α, β, γ a body k nim nekonečně blízké α', β', γ' společné. Vedeme-li na př. v α tečnu kružnice k, seče ona h ve dvou bodech B', C', z nichž vedené další tečny ke k se protínají v bodě A' na h. Jelikož α jest na k^4, jest $\overline{B'\alpha} = \overline{\alpha C'}$. Bod výšek v trojúhelníku $A'\,B'\,C'$ leží na výšce $A'\,\alpha$ procházející bodem K a na hyperbole h, splývá tudíž s bodem K, z čehož soudíme, že $A'\,B'\,C'$ jest trojúhelník rovnostranný a k se dotýká stran $A'\,B'$, $A'\,C'$ v bodech γ, β náležejících křivce k^4. Pro trojúhelník $A\,B\,C$, jenž jest nekonečně blízký k $A'\,B'\,C'$, dospíváme k bodům α', γ', β'.

Jest tudíž k kružnicí Feuerbachovou pro trojúhelník $A'\,B'\,C'$ a trojúhelník jemu nekonečně blízký k opsaný a h vepsaný.

Průměru i_1 hyperboly h směřujícímu k jednomu bodu kruhovému v nekonečnu jest sdružený průměr isotropická přímka i_2 směřující k druhému bodu kruhovému v nekonečnu. Tečny ke k rovnoběžné k i_2 splývají s příslušnou přímkou isotropickou j_2 procházející bodem K. Proto jest přímka i_1 tečnou ke k^4 v bodě $(i_1\,j_2)$ a přímka i_2 tečnou ke k^4 v bodě $(i_2\,j_1)$, značíme-li j_1 druhou přímku isotropickou bodem K vedenou. Přímky j_1, j_2 protínají tedy přímku o v bodech E_1, E_2 trojúhelníka $K\,E_1\,E_2$, jenž jest k opsán a h vepsán. Jsou tudíž i_1, i_2 tečnami křivky k^4, jejichž body dotyku J_1, J_2 leží na přímce rovnoběžné s přímkou o a půlící její vzdálenost od bodu K. Jsou proto přímky i_1, i_2 Feuerbachovou kružnicí pro trojúhelník $K\,E_1\,E_2$ a trojúhelník jemu nekonečně blízký, jenž jest k opsán a h vepsán. Jest tedy dvojice $i_1\,i_2$ kružnicí Feuerbachovou rovněž pro dva v mezích splývající trojúhelníky $A\,B\,C$ spojujíc středy stran těchto trojúhelníků.

Kružnice k a $(i_1\,i_2)$ stanoví svazek kružnic dotýkajících se v bodě O. Vytínají tedy kružnice svazku toho z k^4 involuci řádu šestého J_6; každá z nich vytíná jednu skupinu bodovou involuce této. Trojice bodů α, β, γ a trojice bodů O, $(i_1\,j_2)$, $(i_2\,j_1)$ stanoví na k^4 zároveň involuci kubickou J_3. Jest patrno, že každá skupina v J_6 se rozkládá ve dvě skupiny involuce J_3. Neboť kdyby rovnice stupně třetího $P = 0$ měla za kořeny parametry bodů α, β, γ a rovnice stupně třetího $Q = 0$ měla za kořeny parametry bodů O, $(i_1\,j_2)$, $(i_2\,j_1)$, pak lze libovolnou skupinu v J_6 vyjádřiti rovnicí

$$P^2 - \lambda\, Q^2 = 0,$$

která se rozkládá v rovnice

$$P + \sqrt{\lambda}\, Q = 0,\; P - \sqrt{\lambda}\, Q = 0,$$

z nichž vysvítá, že řečená skupina v J_6 se rozpadá ve dvě skupiny involuce J_3.

Z toho plyne, že kružnice devíti bodů pro každý trojúhelník *k* opsaný a *h* vepsaný dotýká se kružnice *k* v bodě *O* a naopak každá kružnice, jež se v *O* dotýká kružnice *k*, jest kružnicí devíti bodů pro dva trojúhelníky *k* opsané a *h* vepsané. Takto jsme dospěli znovu k předcházejícím výsledkům a k novému důkazu věty Feuerbachovy.

VII.

Brookit z Bobrůvky.

(Morava.)

Napsal

F. Ulrich v Praze.

(S 1 obr. v textu.)

(Předloženo dne 27. ledna 1922.)

Kosočtverečná modifikace Ti O_2, zvaná brookit, přistupuje co další člen k řadě minerálů, jež z Bobrůvky, sv. od Velkého Meziříčí, popsal Fr. Slavík[1]. Naleziště to známo bylo též pod jménem Hochberg (Hoperk) již dříve[2].) Vyznačeno jest tím, že rula, budující valnou část Českomoravské vysočiny, proražena zde jest žilami pegmatitovými, jež se vyznačují tímto mineralogickým složením: albit, záhněda, turmalín, muskovit, apatit. První zmínku o brookitu z Bobrůvky učinil zasloužilý moravský sběratel minerálů Dr. B. Kučera z Brna[3]. Materiál z Bobrůvky získaný, zaslal Dr. Kučera profesorovi české university v Praze, Dru F. Slavíkovi, který mi jej svěřil k prozkoumání.

Albit z Bobrůvky jest druzovitého slohu a jest zajímavý hlavně společným výskytem krystalů jednoduchých i zdvojčatěných, hypoparalelním sestavením téměř všech jedinců druzy a kombinačním rýhováním v pásmu svislém. Turmalín jest černý, hypoparalelně stébelnatý, muskovit jest vyvinut v podobě šestibokých tabulek, až 1 *cm* v průměru, apatit jest nažloutle zelenavý, většinou omezený jen plochami prvcřadého nebo druhořadého hranolu a plochou spodovou, zřídka se objeví úzké facety pyramid obyčejných symbolů.

---

[1] Fr. Slavík: Mineralogické zprávy ze západní Moravy I. Rozpravy Č. Akademie 1900, č. 8, str. 13—16.

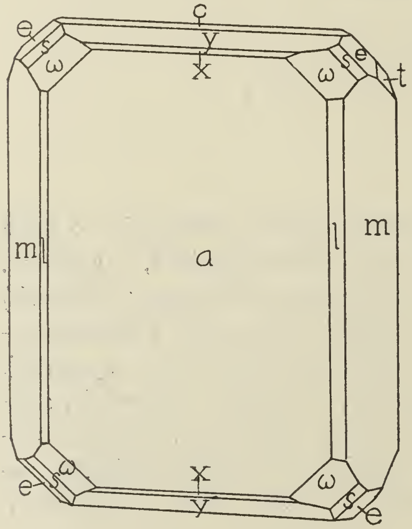
[2] Srovnej: V. Hruschka: Kristallisation einiger mährischen Fossilien. Mittheilungen der k. k. mähr. Gesellschaft für Ackerbau und Naturkunde, 1826, str. 263.

Friedrich A. Kolenati: Die Mineralien Mährens und Österreichisch-Schlesiens, deren Fundorte und ökonomisch-technische Verwendung, 1854, str. 21, 36, 41, 47, 58.

F. Dvorský: O předních nalezištích nerostů na záp. Moravě. Annales Musei Franciscei, 1899, sep. str. 9.

[3] B. Kučera: Doplňky ku záznamům nalezišť moravských nerostů. Sborník klubu přírodovědeckého v Brně za období 1914—1919, str. 22—23.

Brookit moravský patří habitem i typem svým k třetímu typu krystalografickému, který stanovil Schrauf[4]) pro brookity anglické, ruské a švýcarské. Schrauf ovšem, vykládaje si nesprávně optické chování brookitu a krystalový vývoj jeho ploch, pokládal jej za monoklinický, isomorfní s wolframitem. Nesprávné jeho pojetí záhy bylo vyvráceno vom Rathem, Bückingem, i Weinschenkem a Brugnatellim.[5])



Obr. 1. Brookit z Bobrůvky.

Celkem prozkoumal jsem goniometricky 6 krystalů. Brookit z Bobrůvky jest hnědočerný, neprůhledný, intensivně kovově lesklý. Velikost krystalů jest různá, kolísá od 0·5 *mm* do 2 *mm* délky. Krystaly jsou vesměs tabulkovité podle makropinakoidu a (100), který jest vždy charakteristicky rýhován $\parallel c$. Kromě něho z vertikálního pásma bývají vyvinuty tvary l (210) a m (110). V zakončení dominuje pásmo makrodomatické, zastoupené kombinací x (102), y (104), k nimž se druží c (001)). Velmi řídké jest brachydoma t (021). Plochy pyramidální jsou vyvinuty jen malými, byť i ostře reflektujícími ploškami. Jsou to: e (122), s (322) a pak plocha ω (944), která jest pro brookit novou. Vyskytla se na dvou krystalech. Měřené hodnoty jejího φ a ρ i úklon k (100) v pásmu (100 : 011) se dobře shodují s hodnotami theoretickými, vypočtenými z parametrů, stanovených pro brookit Kokšarovem:

$$a : b : c = 0{\cdot}8416 : 1 : 0{\cdot}9444$$

Vzhledem k tomu mám tento tvar za zajištěný a považuji jej za vicinálu tvaru (211), který dosud vůbec konstatován nebyl.

---

[4]) A. Schrauf: Morphologische Studien an der Mineralspecies Brookit. Sitzungsber. der Wiener Ak. LXXIV (1), Novemberheft 1876.

[5]) G. vom Rath: Mineralogische Mitteilungen. Pogg. Ann. 1876, *158*, 405.

P. Groth: Strassb. Mineraliensammlung, str. 110—111.

E. Weinschenk: Die Minerallagerstätten des Groß-Venediger Stockes. Zeitschrift f. Kr. und Min. 1896, *26*, 403, str.

L. Brugnatelli: Über Anatas und Brookit von der Piattagrande bei Sondalo im Veltlin. Zeitschr. f. Kr., r. 1900, *32*, str. 357.

Tabulka.

Číslo	Písmeno	Symbol		Měřeno průměrem		Vypočteno		Poznámka
		Miller	Goldschmidt	∂	φ	φ	ϱ	
1.	c	001	0	—	0° 00	—	0° 00	Krystal č. 1, 2, 3, 5, 6. Signál nebyl nikdy příliš ostrý, proto centrováno a justováno na pásmo vertikální, kde zvláště plochy (110) dávaly signál velmi dobrý.
2.	a	100	∞ 0	90° 00	90° 00	90° 00	90° 00	Na všech krystalech. Signál jasný, ale neostrý, poněvadž vždy rýhována ‖ c.
3.	l	210	2 ∞	67° 08′	89° 58′	67° 10′	90° 00′	Krystal č. 1, 4, 6.
4.	m	110	∞	49° 58′	90° 00	49° 55′	90° 00	Na všech krystalech. Signály velmi dobré.
5.	t	021	02	0° 00	62° 05′	0° 00′	62° 16′	Krystal č. 1, 6.
6.	y	104	$\frac{1}{4}0$	90° 00	15° 32′	90° 00′	15° 40′	Krystal č. 1, 2, 3, 4, 5, 6.
7.	x	102	$\frac{1}{2}0$	90° 00	29° 23′	90° 00′	29° 18′	Na všech krystalech.
8.	e	122	$\frac{1}{2}1$	30° 44′	47° 50′	30° 43′	47° 49′	č. 1, 2, 3, 4, 5, 6.
9.	s	322	$\frac{3}{2}1$	60° 52′	62° 43′	60° 42′	62° 36′	č. 1, 3, 5, 6.
10.	ω	944	$\frac{9}{4}1$	69° 27′	69° 42′	69° 29′	69° 39′	č. 1, 6.

Optických vlastností jsem podrobně studovati nemohl — stanoviti indexy lomu pomocí vysoce lomných tekutin není možno, poněvadž není známa tekutina s tak vysokou lámavostí světelnou a k stanovení indexu lomu jinými methodami se zkoumaný materiál nehodil. Ani jeho hustoty jsem z podobných důvodů určiti nemohl.

Proto s tím větší radostí uvítal jsem příležitost provésti jeho spektrálnou analysu, která mně byla poskytnuta laskavostí p. prof. J. Štěrby — Böhma. Pan profesor zhotovil obloukový spektogramm s 0·01 — 0·015 g látky, který jsem pak s jeho vzácnou pomocí propočítal. Kromě *Ti* a *Fe* z prvků čtvrté skupiny periodické soustavy konstatována přítomnost *Sn*, *Pb*, *Si* a stop *Ge*. Dále nalezeny též četné linie *Nb*, *Ta*, a *W*, ale přítomnost jejich hlavních linií nemohla býti konstatována. Leží totiž jejich hlavní linie podle Exnera a Haschka⁶) ve viditelné části spektra,

---

⁶) Exner-Haschek: Die Spektren der Elemente bei normalem Druck. Leipzig und Wien, Fr. Deuticke 1911.

pro kterou však disperse použitého křem. prismatu byla příliš malá, takže jednotlivé linie na spektrogrammu nemohly býti bezpečně identifikovány.

Fe a *Ti* charakterisovány na spektrogrammu téměř všemi čarami v oblasti od 2378 *Å* až do 3685 *Å*. *Sn* bezpečně identifikován liniemi: 3262·50, 3175·16 a (2863·46) *Å*. *Pb* zvláště svojí nejsilnější linií 3683·62, *Si* 2881·70, 2528·60, 2524·22, 2516·20, 2514·43 a 2507·01. To jsou všechno prvky, které spolu s *Ta*, *Nb* a *W* bývají v $Ti\ O_2$ nalezány[7]. Zajímavější jest přítomnost *Ge*. Z jeho linií dobře pozorovány 3269·62 a 3039·22 *Å*. Mendělějev ve svém pojednání o periodické soustavě prvků[8], předpovídaje vlastnost tehdy neznámého Ekasilicia (t. j. r. 1886 Cl. Winklerem objeveného *Ge*), doporučuje pátrati po něm v titanových minerálech, zvláště rutilu, anatasu a brookitu. Dosud však, jak se zdá, právě v těchto minerálech zjištěno nebylo[9], ačkoliv jinak v novější době byl tento vzácný prvek Urbainem a del Campem[10] nalezen v četných sfaleritech, (zvláště mexických), z nichž jej G. Urbain, M. Blondel a Obiedow[11] získali i ve větším množství.

Pokud se týče paragenese minerálů z Bobrůvky, tu můžeme celkem stanoviti dvě generace. Starší z nich patří albit, turmalín a záhněda, jež k sobě navzájem jsou v různém poměru — v jednom případě mohl jsem konstatovati, že turmalín jest nejmladším jejím členem, vyplňuje mezery mezi krystalky záhnědy, narostlé na albitu.

Druhé generaci — druzových dutin — patří muskovit, apatit a brookit, který jest z nich nejstarší, jsa zarostlý v muskovitu, jehož velké tabulky daleko převládají nad druhými dvěma členy.

* * *

Svým učitelům pp. prof. Dru F. Slavíkovi a J. Štěrbovi-Böhmovi jsem zavázán upřímným díkem za všechnu laskavost, s níž mně při této práci vyšli vstříc.

PRAHA, prosinec 1921.

Mineralogický ústav
Karlovy university.

---

[7] Srovnej: C. Doelter: Rutil, M. Henglein: Anatas. Brookit v Doeltrově Handbuch der Mineralchemie sv. III., *1*, str. 16 a násl., kde uveden též seznam starších i novějších analys.

[8] D. J. Mendělějev: Die periodische Gesetzmäßigkeit der chemischen Elemente. Ostwald's Klassiker der exakt. Wissenschaften, sv. 68, str. 95 a násl.

[9] Srovnej: R. Pribram: Germanium v Doeltrově Handbuch der Mineralchemie, sv. III., 1, str. 112 i novější práci L. M. Dennis a J. Papish: Germanium. Zeitschr. f. anorg. und allgem. Chemie, Bd 120, str. 1, 1921.

[10] G. Urbain a A. del Campo, C. R. *149*, 602—603 (1909).

[11] G. Urbain, M. Blondel et Obiedow, C. R. 150, 1758—60 (1910).

Chemické složení nerostů z Chvaletic a Litošic.

Podává

Dr. Václav Veselý.

(Předloženo dne 24. února 1922.)

Ve zprávě této podávám rozbory a některé chemické vlastnosti železitých fosforečnanů a hydroxydů a manganatých uhličitanů z rudního ložiska železito-manganového u Chvaletic. Výzkum optických vlastností jejich provedl kol. asistent Ulrich, k jehož práci odkazuji[1]. Vedle toho studuji dehydrataci kolloidních fosfátů těch spolu s fosforečnany z jiných nalezišť českých a dovolím si o ní podati zprávu později. Veškeren materiál obstaral pan profesor Slavík; vzdávám mu za to, jakož i za jeho rady a pokyny své upřímné díky.

I. Delvauxit z Litošic.

Objevuje se v hlízovitých tvarech, povrchu ledvinitého, barvy kaštanově červené; bývá potažen slabou, černou vrstvou zemitou, jež tvoří tu a tam v kompaktní hmotě tenké žilky. Hlízy ty jsou lehce drobivé, lesku matného. Hustota minerálu jest dosti měnivá; závisí patrně na množství hygroskopické vody. Byla stanovena pyknometricky, při čemž vzorek dobře vyvářen vodou. $H=1·815-1·999$. $T=2\frac{1}{2}$ přibl.

V kyselinách rozpouští se částečně již za studena, velmi snadno při zahřátí. Při tom zanechává dosti nerozpustného zbytku. Zbytek ten zvláště byl analysován a obsahoval z největší části kyselinu křemičitou, pak Al_2O_3, Fe_2O_3 a něco málo CaO.

---

[1] F. Ulrich, Rozpr. Č. Akademie, **1922**, č. 10.

Rozborem delvauxitu i s nerozpustným zbytkem nalezeno:

MgO	stopy
CaO	2·31 %
MnO	stopy
Al_2O_3	6·69
Fe_2O_3	42·57
P_2O_5	20·85
SiO_2	3·67
SO_3	0·75
H_2O	23·19
	100·03 %

Přepočet na 100 % po odečtení CaO a SiO_2:

Al_2O_3	7·11 %
Fe_2O_3	45·26
P_2O_5	22·17
SO_3	0·80
H_2O	24·66
	100·00 %

Molekulární objemy:

Al_2O_3	0·069	0·353
Fe_2O_3	0·284	
P_2O_5	0·156	
SO_3	0·010	
H_2O	1·368	

Kysličník sírový náleží patrně destinezitu; odečteme-li tedy molekulární poměry destinezitové (str. 3.) —

$$Fe_2O_3 : P_2O_5 : SO_3 : H_2O = 2 : 1 : 2 : 12, \text{ čili } 0·01 : 0·005 : 0·01 : 0·06 \text{ —,}$$

obdržíme kvocienty:

Fe_2O_3	0·343
P_2O_5	0·151
H_2O	1·308

Poměr molekul delvauxitu jest tedy přibližně

$$Fe_2O_3 : P_2O_5 : H_2O = 2 : 1 : 9.$$

II. Destinezit z Chvaletic.

Tvoří hlízy, někdy značné velikosti, barvy světle šedožluté až skoro bělavé a bývá potažen tmavošedým povlakem zemitým. Povrch ledvinitý, sloh zemitý; snadno se otírá. Hustota stanovena pyknometricky jako u delvauxitu. H = 2·105.

V kyselinách se rozpouští za tepla velmi snadno až na nepatrný zbytek. Vzniklý roztok jest oranžově žlutý. Destinezit vařen s vodou vydává bublinky a do roztoku přechází malé množství kyseliny sírové.

Složení jeho jest:

Nerozp. zbytek	0·04 %
MgO	—
CaO	0·19
Fe_2O_3	37·66
P_2O_5	16·50
SO_3	19·32
H_2O	26·47
	100·18 %

Přepočet na 100 %
po odečtení nerozp. zbytku a CaO:

Fe_2O_3	37·68 %
P_2O_5	16·51
SO_3	19·33
H_2O	26·48 %
	100·00 %

Molekulární kvocienty:

Fe_2O_3	0·236
P_2O_5	0·116
SO_3	0·241
H_2O	1·470

Poměr jednotlivých molekul jest tedy

$$Fe_2O_3 : P_2O_5 : SO_3 : H_2O = 2 : 1 : 2 : 13.$$

Složení jeho velmi dobře se shoduje s údaji *G. Cesàrovými*[2]), jenž studoval velmi čistý krystalovaný, jednoklonný *destinezit* z Visé v Belgii. Našel poměr molekul:

$$Fe_2O_3 : P_2O_5 : SO_3 : H_2O = 2 : 1 : 2 : 12,$$

tedy blízký našemu. Právě tak *Kovář*[3]) analysoval „diadochit“ z Vysočan, a vypočetl poměr

$$Fe_2O_3 : P_2O_5 : SO_3 : H_2O = 2 : 1 : 2 : 13.$$

Jak z mikroskopicko-optického výzkumu[1]) vyplývá, náleží t. zv. diadochit z Chvaletic, z Vysočan a jiných nalezišť u nás k destinezitu, není tedy nerostem typicky amorfním, nýbrž představuje[4]) prvý mikrokrystalinní produkt přeměny kolloidální substance v krystalickou.

Vodou lze vyluhovati z destinezitu, jak jsem se na začátku zmínil, jen malé množství kyseliny sírové. Tím liší se od destinezitu z Visé. Dle *G. Cesàra*[2]) přechází varem veškerá kyselina sírová ve vodní roztok. Zkoušel jsem působení studené i horké vody, leč vyluhovalo se maximálně 0·33—0·72 % SO_3; více do roztoku nepřešlo, i když extrahován jemný prášek celých 14 dnů. To se také shoduje s nálezy *F. Kovářovými*[3]), jenž vyluhoval z diadochitu vysočanského jen 0·56—1·32 % SO_3.

---

[1]) F. Ulrich, Rozpr. Č. Akademie, 1922, č. 10.

[2]) Ref. N. J. f. Min. etc. 1887, I, str. 412.

[3]) Věstník kr. spol. nauk, 1889, str. 343.

[4]) Dr. Slavíková-Slavík: Rozpravy Č. Akad. II. tř., 1917, č. 62, str. 12.

III. Destinezit (t. zv. diadochit) z Litošic.

Barvy světle žlutošedé, celistvý, slohu uvnitř částečně ledvinitého, daleko tvrdší nežli destinezit z Chvaletic. Hustota stanovena pyknometricky jako u prvých dvou fosfátů. Dosti kolísá dle množství hygroskopické vody. Průměrně H = 1·982.

Rozpouští se v teplých kyselinách až na nevelký zbytek. Zbytek ten z většího množství průby zvláště analysován skládal se hlavně z kyseliny křemičité a něco málo kysličníku železitého a vápenatého. „Diadochit" vařen s vodou vydává bublinky a do roztoku přechází malé množství kysličníku sírového. I když vyluhoval jsem rozmělněný fosfát po 6 měsíců vodou, přešlo do roztoku jen 0·62 % SO_3.

Složení jeho jest:

Nerozp. zbytek	1·29 %
MgO	—
CaO	0·18
Fe_2O_3	42·94
P_2O_5	19·85
SO_3	10·57
H_2O	25·28
	100·11 %

Přepočet na 100 %
po odečtení nerozp. zbytku a CaO:

Fe_2O_3	43·53 %
P_2O_5	20·12
SO_3	10·72
H_2O	25·63
	100·00 %

Molekulární kvocienty:

Fe_2O_3	0·272
P_2O_5	0·141
SO_3	0·133
H_2O	1·422

Poměr molekul jest v tomto případě:

$$Fe_2O_3 : P_2O_5 : SO_3 : H_2O = 2 : 1 : 1 : 11.$$

Podle optických výzkumů kol. Ulricha1) jedná se o směs destinezitu a delvauxitu. Tomu nasvědčuje i následující jednoduchá úvaha: odečteme-li od zdvojnásobeného molekulárního poměru

$$Fe_2O_3 : P_2O_5 : SO_3 : H_2O = 4 : 2 : 2 : 22$$

poměr molekul destinezitu —

$$Fe_2O_3 : P_2O_5 : SO_3 : H_2O = 2 : 1 : 2 : 13,$$

obdržíme

$$Fe_2O_3 : P_2O_5 : H_2O = 2 : 1 : 9,$$

tedy molekulární poměr delvauxitu (viz str. 2.).

IV. Dialogit z Chvaletic.

Celistvý, tvořící žilky a hnízda v celistvém hnědeli; barvu má růžovou, v kyselinách za tepla je rozpustný až na nepatrný zbytek, h=3·312.

Jeho složení jest:

Nerozp. zbytek	0·06 %
MnO	57·31
FeO	3·67
CaO	3·91
CO_2	35·12
	100·07 %

V. Dialogit z Litošic.

Jemnozrnný, barvy světle růžové; prostupují jím žilky křemene a kyzu, řidší i hustší; proto zbývá při rozpouštění značnější zbytek. H=3·552. Místy v druzových dutinkách nacházíme velmi ploché, čočkovitě zaoblené klence dialogitové, srostlé spolu podobně jako vídáme u příbramských kalcitů v $(01\bar{1}2)$ krystalovaných, a na nich mladší pyrit v (100) (111) (110).

Analysa:

Nerozp. zbytek	2·91 %
MnO	56·75
FeO	3·60
CaO	2·13
CO_2	34·83
	100·22 %

VI. Goethit z Chvaletic.

Krápníkovitý, uvnitř paprsčitě vláknitý, barvy tmavohnědé. Rozpouští se snadno v kyselinách až na malý zbytek, kyselinu křemičitou.

Jeho složení jest:

SiO_2	0·90 %
Fe_2O_3	86·95
Mn_2O_3	0·24
CaO	0·50
MgO	—
P_2O_5	0·58
H_2O	10·92
	100·09 %

K vyšetření poměru $Fe_2O_3 : H_2O$ odečte se nejprve kyselina křemičitá a kysličník vápenatý, a pak vodnatý fosforečnan železitý s poměrem:

$2\ Fe_2O_3 : P_2O_5 : 3\ H_2O$ (poměr molekul dufrenitu, resp. delvauxitu). Ze zbylých čísel převedených na 100% určeny pak molekulární kvocienty:

		Mol. kvocienty:	
Fe_2O_3	88·67	0·555	0.557
Mn_2O_3	0·25	0·002	
H_2O	11·08	0·615	0·615
	100·00		

Poměr $Fe_2O_3 : H_2O$ jest tedy 1 : 1.

VII. Stilpnosiderit z Chvaletic.

Celistvý, barvy černohnědé. Rozpouští se v kyselině solné za šumění a vývinu chloru (vyšší kysličníky manganu!) Ve výbruse lze viděti, že v převládající hmotě základní, tmavě hnědočervené, místy celistvé, jež náleží kolloidnímu kysličníku železitému, uloženy jsou tmavé, neprůhledné útvary, pravděpodobně psilomelanové; struktura kolloidů bývá ledvinitá, obrysy nerovné. Vedle toho tvoří psilomelan nepravidelné žilky, leckde dosti husté. Čiré žilky světlé náležejí uhličitanům kalcia, magnesia a částečně i manganu.

Analysa jeho:

SiO_2	1·51%
Fe_2O_3	52·32
MnO	24·59
O	4·02
CaO	2·66
MgO	2·10
P_2O_5	2·09
CO_2	3·22
H_2O	7·80
	100·31%

Mineralogický ústav
university Karlovy v Praze.

Příspěvek k poznání fosforečnanů železa a hliníku.

Napsal

Fr. Ulrich v Praze.

(Se čtyřmi obr. v textu.)

(Předloženo dne 24. února 1922.)

I. *Fosforečnany z Chvaletic a Litošic.*

Již dávno před koncem minulého století zapadly a byly opuštěny četné jámy a pokusné štoly na dolování žel. rud, roztroušené po svazích Železných hor, které kdysi daly tomuto orografickému celku jméno. Současně s nimi nebo krátce po nich zanikaly též malé huti, které zpracovávaly materiál, na blízku získaný.[1]

Ale světová válka přinesla změnu i do těchto končin. Známý nedostatek surovin pro výrobu kovů způsobil znovuotevření mnohého zapadlého díla — a tak i zde. Pražská železářská společnost podnikla ve válečných letech pokusné dolování na dvou místech: ve Chvaleticích u Přelouče (spec. mapy 1 : 75.000 list Hradec Král., Labská Týnice a Pardubice, zjz. od žel. st. Kladruby n. Lab.) a v Litošicích (list Čáslav-Chrudim, sev. od Semtěše).

Obě ložiska jsou geograficky nepříliš vzdálena a i jejich mineralogický a geologický ráz jest téměř shodný. Leží ve slabě metamorfovaném algonkiu, které chová mocné vrstvy kyzových břidlic a lože spilitová. Hlavní rudou manganovou jest zde dialogit, jehož velké massy zvláště jsou odkryty na nalezišti litošickém. Detailní výklad genese obou ložisk není dosud pro neúplné odkryvy možný a jest vyhrazen pracem příštím. Svrchní partie ložiska ukazují zajímavé přeměny železného klobouku —

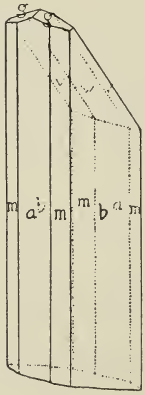
---

[1] Srovnej Krejčí-Helmhacker, Vysvětlivky ku geolog. mapě Železných hor. Něm. r. 1881, česky r. 1891 v Archivu pro přír. výzkum Čech. Katzer: Geologie von Böhmen.

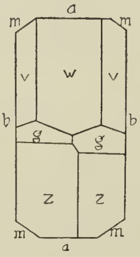
vedle stilpnosideritu, goethitu, psilomelanu, celistvého modravého křemene který svojí mikroskopickou strukturou ukazuje, že vznikl překrystalisováním křemičitého gelu, a vedle jiných méně významných nálezů jsou zde zvláště pozoruhodné různé fosforečnany, jejichž studiu jest věnována tato práce.[2] Podává především data krystalografická a optická, doplňujíc tak chemický výzkum, provedený kolegou Drem V. Veselým.

1. *Vivianit z Litošic.*

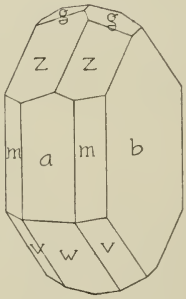
Vodnatý fosforečnan železnatý $Fe_3(PO_4)_2 . 8H_2O$ jest parageneticky ze zdejších fosfátů nejmladší. Jeho nález v Litošicích spadá do doby nejnovější: pan řed. A. Brož věnoval v poslední době tři velmi pěkné ukázky jednak Národnímu Museu, jednak mineralogickému ústavu české university. Laskavostí pp. Dr. K. Vrby, ředitele mineralog. sbírek musejních a prof. Dra F. Slavíka obdržel jsem tento materiál k prozkoumání.



Obr. 1.



Obr- 2.



Obr. 3.

Vivianit pěkně krystalovaný jest na oněch vzorcích nejmladší, vyrůstaje na podkladu, tvořeném fosforečnany aluminia a železa, o nichž se později zmíním podrobněji. Jakost krystalů dovolila jak goniometrický, tak i optický výzkum.

Morfologicky možno na našem materiálu rozlišiti krystaly dvojího habitu. Převládají krystaly, znázorněné obr. 1. Jsou protaženy podle vertikály a při tom více méně tabulkovité podle (010), jevíce tuto kombinaci:

b (010), *a* (100), *m* (110), *g* (012), *v* ($\bar{1}11$).

Klinodomatické plošky tvaru (012) často scházejí a takové jehličky celkovým rázem pak silně upomínají na krystaly sádrovcové. Velikost jejich jest dosti různá, vedle docela drobných individuí jsou vyvinuty jehlice až 8 *mm* dlouhé. Často jeví sklon k hypoparalelnímu srůstu a jsou pak uspořádány ve svazečcích. Krystaly druhého habitu byly poněkud hojněji zastoupeny na malém exempláři univ. ústavu mineralog. Ty jsou poněkud hojnoplošší, majíce kromě tvarů již pro první typ uvedených ještě *z* (112). a *w* $(\bar{1}01)$. Jsou tlustě tabulkovité podle (010), jak ukazují obr. 2. a 3., dosahujíce při tom délky až 7 *mm*. O vývoji a jakosti ploch dá se říci asi toto:

---

[2] Krejčí a Helmhacker uvádějí z Chvaletic (l. c. [1]), str. 175) limonit, psilomelan a diadochit.

Tvar (010), podle něhož jsou krystaly též výborně štěpné, jest na všech krystalech vyvinut největšími, perleťově lesklými a dobře reflektujícími plochami. Proti němu ostatní plochy vertikálního pásma zvláště na jehličkovitých krystalech ustupují do pozadí. Po klinopinakoidu nejrozsáhlejší jest orthopinakoid — jeho plochy dosti často bývají zvláště na tabulkovitých jedincích zaoblené. Základní prisma otupuje co úzké facety hrany mezi oběma pinakoidy. Terminální plochy vesměs dávají reflexy velmi ostré a jednotné. Nejrozsáhlejší z nich jsou tvary *w* $(\bar{1}01)$ a obě hemipyramidy *z* (112) a *v* $(\bar{1}11)$. Klinodoma *g* (012) jest vždy vyvinuto jen menšími ploškami. Počtem vyvinutých tvarů řadí se litošický vivianit hned k výskytu z Košťálova, který jest z českých lokalit nejbohatší.3) Přehled měřených úhlů φ a ϱ podává tato tabulka:

Číslo	Písmeno	Miller	Gold-schmidt	Měřeno		Počítané4)		Poznámky
				φ	ϱ	φ	ϱ	
1.	*b*	(010)	0∞	0° 00′	90° 00′	0° 00′	90° 00	Na všech krystalech
2.	*a*	(100)	∞0	90° 02′	90° 00′	90° 00	90° 00	dto
3.	*m*	(110)	∞	53° 55′	90° 00′	54° 01′	,,	Na 6 krystalech.
4.	*g*	(012)	0½	36° 10′	23° 32′	36° 16′	23° 31′	Na 4 krystalech
5.	*w*	$(\bar{1}01)$	—10	90° 00′	35° 26	90° 00	35° 20	Na všech tabulkovitých krystalech
6.	*z*	(112)	+½	64° 43′	39° 12′	64° 39′	39° 20′	dto.
7.	*v*	$(\bar{1}11)$	—1	$\overline{45}$° 12′	44° 52′	$\overline{45}$° 17′	44° 55′	Na všech krystalech

Hustota stanovena byla suspensí ve zředěném roztoku Kleinově a jest rovna 2·670 při 18° C.

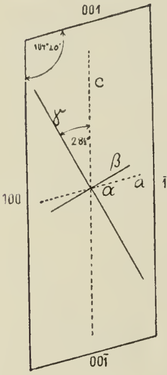
---

3) Srovnej Rosický: Krystalografické zprávy Rozpr. Č. Ak. XVII. č. 28. 3. Vivianit z Košťálova, kde uveden jest přehled všech českých lokalit s krystalovaným vivianitem.

4) Goldschmidt: Winkeltabellen str. 359-60. — Parametry G. vom Rath.

Litošický vivianit jest v napadajícím světle slabě modrozelený, v prostupujícím téměř bezbarvý. Podle studií Gärtnerových[5]) a J. M. van Bemmelenových[6]) závisí intensita zbarvení na množství přítomného trojmocného železa. Že ve vivianitu litošickém bylo krátce po nálezu Fe^{III} jen velmi málo, o tom jsem se kvalitativně přesvědčil při rozpouštění jeho v H_2SO_4. I velmi citlivá reakce se sulfokyanidem poskytovala jen slabé růžové zabarvení. Tento fakt přímo vybízel ke studiu vlastností optických.

Zhotovíme-li si práškový preparát z jehličkovitých krystalů a pozorujeme je pod mikroskopem, rozeznáme individua dvojího rázu: jedny jehličky jsou čiré, skoro nepleochroické, mezi *z* kříženými nikoly šikmo zhášejí — úhel zhášení, měřený v Na světle na četných jedincích, jest 28½° — v konvergentním světle ukazují výchoz středné s velikým úhlem os optických. Rovina os opt. jest o měřený úhel 28½° uchýlena od jejich délky. Druhé jehličky jeví velmi intensivní pleochroismus mezi blankytně modrou (⊥ k délce) a skoro bezbarvou (∥ k délce). Mezi *z*kříž. nikoly zhášejí tyto krystalky rovnoběžně, v konverg. světle jeví velmi excentrický výchoz os. Obojí jehličky jeví silný dvojlom a zkoumány kř. klínem + ráz délky. Toto pozorování bylo ve zřejmém rozporu s údajem u Lacroix.[7]) Studuje pak literaturu o optické orientaci vivianitu shledal jsem, že ze známých autorů jedině správně ji udává Rosický l. c.[3]) a Larsen[8]) a jest tedy nutno opraviti údaj Lacroixův, Naumann-Zirkelův[9]) i Grothův.[10]) Optický charakter vivianitu jest +. Osa *b*, jež stojí kolmo na plochu štěpnosti (010), odpovídá směru α, který jest tupou střednou a má silnou absorpci ostrá středná jest o 28½° uchýlena do *tupého* úhlu β (obr. 4). Na ploše výborné štěpnosti (010) stanoveny refraktometrem Pulfrich-Abbeovým hlavní indexy lomu:



Obr. 4. Schema opt. orientace u viviantu na ploše (010), ⊥ k tupé středné α.

$$\alpha = 1{\cdot}5788 \qquad \gamma - \alpha = 0{\cdot}0506$$
$$\beta = 1{\cdot}6024 \qquad \gamma - \beta = 0{\cdot}0270$$
$$\gamma = 1{\cdot}6294 \qquad \beta - \alpha = 0{\cdot}0236.$$

---

[5]) A. Gärtner, Arch. d. Ver. d. Freunde d. Nat. Gesch. Mecklenburg 51, 97 (1898).

[6]) J. M. van Bemmelen, Z. anorg. Chem. 22, 329 (1910).

[7]) A. Lacroix: Minéralogie de la France et de ses colonies IV. p. 454.

[8]) T. L. Watson and S. D. Gooch: Vivianite from the Land Pebble etc. Journal of the Washington Academy 1918.

[9]) 15. vyd. str. 599 v Lehrb. d. Min., kde jest orthodiagonála označena co ostrá střednice.

[10]) U Grotha (Chem. Kryst. II. Teil 839) je uvedeno, že ostrá středná s vertikálou svírá úhel 61½' (DesCl·).

Úhel os optických měřil jsem dvakrát v Thouletově roztoku o různé koncentraci a nalezl tyto hodnoty:

a) při n_{Na} roztoku $= 1{\cdot}6932$	b) n_{Na} roztoku $= 1{\cdot}6534$
$2H_{oNa} = 90^0\ 01'$	$2\ H_{oNa} = 92^0\ 29\frac{1}{2}'$
z toho $2\ V_a = 83^0\ 17'$	$2\ V_a = 83^0\ 38'$
$2\ V_o = 96^0\ 43'$	$2\ V_o = 96^0\ 22'$

to jest souhlas při měření úhlu os optických velmi dobrý. Pozorované hodnoty jsou dosti sblížené k hodnotě theoretické, vypočtené na základě vzorců, z určených tří indexů lomu, ale značně se liší od oněch, jež uvádí na př. Rosický. Jsou však blízké úhlu, který zjistil Larsen11) na vivianitu z Mullica Hill, New Jersey.12)

Na srovnání studoval jsem též optické vlastnosti vivianitu ze Šimozuki v Japonsku, jehož pěknou ukázku (štěpné úlomky velkých krystalů) obdržel mineralog. ústav prostřednictvím p. Dr. E. Skarnitzla. Na velké štěpné destičce 12 × 9 *mm*, 1·2 *mm* silné, nalezl jsem:

$\alpha = 1{\cdot}5809$ $\quad \gamma - \alpha = 0{\cdot}0517,$
$\beta = 1{\cdot}6038$ $\quad \gamma - \beta = 0{\cdot}0288,$
$\gamma = 1{\cdot}6326$ $\quad \beta - \alpha = 0{\cdot}0229.$

Na této destičce pokusil jsem se rozhodnouti otázku, jaký vliv na optické vlastnosti vivianitu má oxydace Fe^{II} na Fe^{III}. Kdežto nejprve bylo možno uvedenou destičkou velmi dobře rozeznati na př. tištěný text v knize, po 2× opakované oxydaci se stala úplně neprůhlednou — i tenší plátky, z ní vyštípnuté — a nabyla vedle intensivnější barvy lesku téměř kovového. Na refraktometru nebylo možno již optických vlastností studovati, ale methodou Beckeho přesvědčil jsem se o značném stoupnutí lomu (v některých # lupéncích oba směry, ležící v (010) — β a γ — byly vyšší než 1.652). Při tom značně klesá dvojlom, neboť ony lupénky, které před oxydací měly mezi zkříženými nikoly interferenční barvu bílou vyššího řádu, mají po oxydaci barvy jen druhého, nejvýše třetího řádu Newtonovy stupnice, a dále se mění optická orientace — směr *b*, který před tím byl tupou střednou, stává se ostrou bissektricí, takže v konvergentním světle hyperboly již neopouštějí svého pole. Optický charakter jest po oxydaci negativní. Současně stoupá pleochroismus na (010) mezi žlutozelenou (γ) a modrozelenou (β).

---

11) Srovnej: T. L. Watson, The color change in vivianite and its effect on the optical properties. The American Mineralogist, Vol. 3, No. 8, Aug. 1918. V této práci autor, neznaje studií Gärtnerových a Bemmelenových, ukazuje souvislost mezi barvou a obsahem Fe^{III}. Zároveň upozorňuje na pravděpodobnou závislost opt. vlastností, ale spokojuje se jen excerpováním dat z literatury.

12) V nejnovějším svém spise: The microscopic determination of the nonopaque minerals Bul. 679 U. S. Geol. Survey udává Larsen v tabulce na straně 216 zase nesprávně úhel $\gamma : c\ 61\frac{1}{2}^0$, ačkoliv před tím v textu str. 153 konstatuje shodu svého pozorování opt. orientace s údaji Rosického.

Těmito fakty se dají též vysvětliti poměrně značné difference v lámavosti světelné pro vivianit, jak je udávají z novějších autorů na př. Gaubert,13) Rosický14) a Winchell15).

2. *Fouchérit a vashegyit.*

Vivianit litošický narůstá buď bezprostředně na úlomcích kyzem proniklé břidlice, částečně limonitisované (tak jest tomu u exemplářů Nár. musea) nebo jeho podklad tvoří dva fosforečnany: fouchérit (fosforečnan železitovápenatý) a po případě též vashegyit (fosfát hlinitý). Tento jest mladší fouchéritu.

Fouchérit, resp. bořickyt16) tvoří slabý červenohnědý povlak smolně lesklý na kyzové břidlici. V mikroskopu jest úplně isotropní, oranžově červený, průhledný a často jeví zrnitou strukturu, upomínající na stavbu plasmy organismů. Index lomu rovná se 1·648. O přítomnosti vápníku vedle železa a kys. fosforečné přesvědčil jsem se mikrochemicky. Fouchérit z Litošic jest úplně podoben t. zv. picitu Bořického17) z dolu Hrbku u Sv. Dobrotivé. Studoval jsem tento picit na autentickém materiálu universitní sbírky a došel jsem k přesvědčení, že to není nic jiného, než fouchérit. Také Slavík18) konstatoval optickou shodu dobrotivského picitu s fouchéritem z Trubína. Není tedy správným názor Leitmeierův,19) podle něhož existuje dvojí picit: amorfní Bořického (z r. 1867) a krystalický, popsaný A. Strengem.20) Důl Hrbek jest dnes zašlý a nebylo by možno sehnati se všech sbírkových exemplářů dosti materiálu k analyse, ale k rozhodnutí stačí fakta, jež sám Bořický uvádí: $H = 2{\cdot}397$ — číslo velmi sblížené oněm, jež udává pro typické fouchérity z Vinoře Kovář (2·25, 2·32, 2·39, 2·48), kvalitativní zkouška vedle P a Fe dokázala přítomnost Al, Ca a Mg. Poněvadž pak též index lomu jest velmi sblížen světelné lámavosti typických fouchéritů, budiž označení picit ponecháno jen pro onen nerost, který popsal r. 1881 A. Streng (analysoval A. Nies) z dolu Eleonore am Dünsberg u Giessenu, ačkoliv také o homogenitě této látky byly vysloveny pochyby.21)

---

13) P. Gaubert: Sur des cristaux de vivianite etc. Bull. de la Soc. franc. de Mineral. XXVII. 1904, 312—316.

14) l. c. 3).

15) Optical Mineralogy, p. 388, 1909.

16) Že Berthierův název fouchérit má prioritu před Danovým bořickytem, upozorňuje A. Lacroix v Min. de la France etc. IV, str. 536. Srovnej též Slavík: Opt. data o některých nerostech, R. Č. Ak. 1917.

17) E. Bořický: Sitzb. d. k. Ak. d. Wissenschaften in Wien LVI., Bd. 1867.

18) F. Slavík: Optická data o některých nerostech. Č. Ak. XXVI., č. 60, 1917.

19) H. Leitmeier: Eisenoxydphosphate v Doeltrově Handbuch d. Mineralchemie sv. III., str. 536.

20) A. Streng: Über die Phosphate von Waldgirmes. N. J. B. für Min. etc. 1881. I., 116.

21) Srovnej K. Klockmann: Lehrbuch d. Mineralogie.

Fosforečnan hlinitý, který na univ. exempláři tvoří ledvinité a drobně stalaktitické tvary, svými vlastnostmi se úplně shoduje s vashegyitem ze Železníka.[22] Jest křídově bílý, místy od slabé příměsi Fe nažloutlý, vzhledu zemitého. Tvrdost asi 2, hustota rovná se 1·920. Pod mikroskopem jest průhledný, mezi zkříženými nikoly isotropní, v některých částečkách jsou již patrny počátky krystalisace. Index lomu isotropních partií jest roven 1·5036. Kvalitativní chemickou analysou zjištěno vedle Al a kys. fosforečné též malé množství Fe. Ke kvantitativní analyse nebylo dosti materiálu.

3. *Delvauxit a destinezit.*

Tyto dva fosforečnany, které jsou navzájem ve velmi úzkých vztazích genetických, vyskytují se oba zvláště v Litošicích ve velmi značném množství, ve Chvaleticích jest delvauxitu poskrovnu. V Litošicích loňského roku pod slabou přikrývkou hlinitopísčitou byla odkryta až pět metrů mocná vrstva, složená místy z fosforečnanu skoro čistého, místy promíšeného ostatními produkty rozkladnými, která se těžila k technickým účelům (jako fosforem bohatá ruda).

Nejobvyklejší jest u nich výskyt konkrecionární s ledvinitým povrchem, ale často se též vyskytují v celých kompaktních massách a co tmel úlomků rozpadlé matečné horniny (hlavně břidlice).

Materiál první analysy kol. Veselého, delvauxit, jest typický minerálný gel — barvy kaštanově až cihlově červené, makroskopicky celistvý, $T = 2\frac{1}{2}$, $H = 1{\cdot}815 - 1{\cdot}999$ Práškovaný minerál pod mikroskopem má barvu žlutou až oranžovou, jeví micellární strukturu a jest mezi zkříženými nikoly úplně isotropní. Lámavost světelná poněkud kolísá, nejvýše dosahuje hodnoty 1·726. Za účelem srovnávacím studoval jsem optické vlastnosti řady t. zv. delvauxitů ze sbírky universitní i musejní. Objevilo se, že jedině delvauxit z Berneau u Visé v Belgii jest s naším materiálem opticky shodný. Index lomu jest u něho jen nepatrně nižší, neklesaje nikdy pod 1·708. Malé kolísání světelné lámavosti jest u minerálných gelů zjevem obvyklým.[23]

Již Slavík[24] konstatoval, že velká část t. zv. diadochitů, v naší literatuře popsaných,[25] patří krystalované modifikaci této látky, totiž monoklinickému destinezitu, který první popsal G. Cesàro.[26]) Material Veselého analysy destinezitu z Chvaletic jsou světle žlutošedé hlízy, až 2 dm v průměru i nad to měřící, měkčí mastku, které pod mikroskopem se jeví co velmi jemnozrnný aggregát, složený ze šupinkovitých krystalků. Velikost jejich se pohybuje mezi 0·01—0·03 *mm*. Svým obrysem upomínají na sádrovec (Cesàro v práci citované je přímo uvádí ve vztahy krystalografické) a pokud jsou v jednom směru protaženy, jeví vesměs posit. ráz délky. Zhášení šikmé pod různým úhlem. Dvojlom jest značný, i při tak nepatrných rozměrech některé šupinky jeví až červeně oranžovou barvu interferenční I. řádu. S tím ve shodě jest rozdíl v lámavosti světelné pro dva směry, v této ploše [(010) podle Cesàra] ležící, který stanoven na 0·0278. Obrysy šupinek zmizejí v jedné posici zhášení, je-li lámavost světelná tekutiny, je uzavírající, rovna 1·6658, v posici druhé 1·6380.

---

[22] Viz II. část této práce.

[23] J. Šplíchal: Příspěvek k poznání koloidních jílů. Zem. Archiv 1919, str. 413 a násl.

[24] F. Slavík: Optická data o některých nerostech. Rozpr. Č. Ak. XXVI., čís. 60.

[25] Srovnej zvláště: J. Vála a R. Helmhacker: Das Eisensteinvorkommen in der Gegend zwischen Prag und Beraun. Archiv f. Landesdurchforsch. 1874. Česky r. 1873.

F. Kovář: Chemický výzkum fosforečnanů z hlin diluviálných okolí Vysočan, Vinoře a Ouval. Věst. kr. č. spol. nauk 1899, 344—358.

J. Krejčí a R. Helmhacker: Vysvětlivky ku geolog. mapě Železných hor. Archiv pro přír. výzk. Čech, díl V. 1.

Tak zv. diadochit kompaktních mass litošických jest směsí destinezitu s delvauxitem. Při mikroskopickém studiu hlízek, z nichž byl vzat materiál k analyse, záhy poznáme, že uprostřed takové konkrece převládá amorfní delvauxit, čím blíže k povrchu, tím hojnější jsou šupinky destinezitové. Krystalisace postupuje tedy od povrchu do středu.

Poměr delvauxitu k destinezitu. Delvaux a Dumont uveřejnili r. 1838 a 1839 první analysy delvauxitu. Od té doby v literatuře popsána celá řada t. zv. delvauxitů, ale žádný z nich původnímu delvauxitu neodpovídá — většinou jsou to bořickyty resp. fouchérity. Church v Ch. News r. 1864 upozornil, že delvauxit jest „a wet dufrenite", a tento fakt zdůraznil v novější době Cornu,[27]) podle něhož delvauxit jest homoisochemitem krystalovaného dufrenitu a obsahuje tedy $Fe_2O_3 : P_2O_5$ v poměru 2 : 1. A skutečně Veselého analysa delvauxitu dává tento poměr.

Přítomnost malého množství Ca nepadá na váhu, poněvadž jest hlavně obsaženo v nerozp. zbytku, který podle procenta SiO_2 jest dosti značný. A nejen čistý delvauxit, i směs delvauxitu s destinezitem (t. zv. diadochit z Litošic) dává tento poměr, když odečetli jsme z analysy množství Fe_2O_3 a P_2O_5, jež odpovídá nalezenému množství SO_3 při poměru destinezitovém. Cornu vyslovil domněnku o genetické souvislosti mezi delvauxitem a destinezitem — jeho názor naším studiem na fosfátech chvaleticko-litošických jest podepřen a odůvodněn. Koloidální fosforečnan železitý (delvauxit) vydán jest účinkům H_2SO_4, která se zde stále tvoří kyzovým větráním, a tak vzniká destinezit. Tato naše interpretace jest právě opačná názoru Cesàrovu, který považuje delvauxit za rozložený destinezit na základě svých pokusů, při nichž prý nalezl, že všechna H_2SO_4 dá se nahraditi vodou. Jeho nález však v novější době nebyl potvrzen ani Kovářem 8) ani Veselým, ale za to E. Dittler 9) pozoroval, že syntheticky připravený gel, blízký delvauxitu, krystalisoval za přidání malého množství H_2SO_4. Myslím tedy, že o správnosti naší interpretace není pochyby. Zatím ovšem zůstává nerozřešena otázka po původu kys. fosforečné, jejíž množství jest příliš značné, než aby se dalo vysvětliti obyčejnou sekrecí, na ložiskách žel. rud jinak dosti častou.

---

[26]) G. Cesâro: Étude chimique et cristallographique la Destinezite (Diadochite de Visé). Bull. de la Soc. min. de France VIII., 1885, Mémoires, p. 183. Ref. Neues Jahrbuch für Min. etc. 1887, I., str. 412.

[27]) F. Cornu: Die Bedeutung der Hydrogele im Mineralreich, Kolloidzeitschrift 1909 (IV.), str. 15 a násl.

II. *Fosfáty ze Železníka.*

K. Zimányi ve dvou sděleních 30) popsal ze Železníka u Sirku (spec. mapy 1 : 75.000, list V. Revúca a Rimavská Báňa, asi 8 km j. od V. Revúce) tři alumofosfáty: variscit, vashegyit a konečně nepojmenovaný fosforečnan, jemuž na základě chem. analysy dává empirickou formuli: $3\ Al_2O_3 . 2\ P_2O_5 . 17\ H_2O$. R. 1920 při orientační a sběratelské exkursi, vedené prof. Slavíkem, získali jsme na Železníku také řadu ukázek těchto fosfátů.

Variscit ze Železníka vyskytuje se ve formě hnízd, kor a povlaků v břidličné brekcii. Jest světle zelený s odstínem do modrava, makroskopicky úplně celistvý. Tvrdost leží mezi 4—5, $h = 2{\cdot}453$. V prášku pod mikroskopem jest kryptokrystalický, lámavost světelná jest velmi sblížena 1·565 — tedy téměř identická s β krystalovaného variscitu. 31) Velmi zajímavé poměry shledáváme při mikroskopickem studiu výbrusů, zhotovených z kompaktního variscitu i s matečnou horninou. V celistvé masse variscitové shledáváme především dutinky, v nichž je v. zřetelněji krystalován, jevě ledvinitou a částečně miskovitou strukturu. Ale i celá matečná hornina jest úplně přeměněna v isotropní, částečně kryptokrystalickou hmotu, jest úplně fosfatisována. Z původní horniny zbylo zde jen něco málo křemenných zrnek, trochu šupinek světlé slídy a pak hojný grafitický pigment vedle nehojných zrnek pyritu, částečně zvětralého. Také tato břidlice obsahuje četné dutinky, v nichž jest zase ona koncentricky miskovitá stavba variscitu zřetelnější. Ráz délky jest při tom negativní. Chemická analysa Loczkova i novější kolegy V. Veselého 2) ukazují nadbytek vody proti krystalovanému variscitu, jehož složení jest $Al_2O_3 . P_2O_5 . 4\ H_2O$ nebo $AlPO_4 . 2\ H_2O$. To jest v úplné shodě s mikroskopickým pozorováním — amorfní a krystalické modifikace jsou vždy více hydratisovány než modifikace krystalovaná. Zimányi nepodává vůbec výkladu o genesi železnických fosfátů, ani W. T. Schaller se o vzniku

---

28) l. c. 22).

29) E. Dittler, Koll. Z. 5, 35 (1909).

30) Vashegyit, ein neues basisches Aluminiumphosphat vom Comitat Gömör. Zeitschr. f. Kr. XLVII. Bd., p. 53—55. 1909 a Über ein Aluminiumphosphat von Vashegy im Comitate Gömör. Zeitsch. f. Kr. XLVIII., str. 525.

31) W. T. Schaller: Crystallized variscite from Utah. Bulletin of the U. S. Geolog. Survey 509 (1912), 48—66, překlad v Zeitsch. f. Kryst. *50*, 32 sq.

32) V. Veselý: Chemické složení variscitu ze Železníka. Č. Čes. Musea 1922

krystalisovaného variscitu nijak nevyslovuje. Nám se nepodařilo nalézti in situ tyto minerály, ale mikroskopická povaha celého výskytu mluví proti vzniku obyč. větráním a sekrecí. Spíše se nám zdá pravděpodobným vznik hydrothermální — zabývám se nyní pokusy o synthesu variscitu, jimiž doufám tuto otázku rozhodnouti, a dovolím si příležitostně o jejich výsledku podati zprávu.

Vedle variscitu přítomen jest ve větším množství vashegyit, který jest zřetelně mladší. Na některých kusech (č. 7358 univ. sb.) můžeme přímo pozorovati, jak z variscitu vzniká. Jest barvy bílé, měkký, zemitý. V mikroskopu jest většinou isotropní, ale místy jeví počátky krystalisace, jeho lámavost světelná jest velmi sblížena 1·5046 — leží tedy mezi indexem lomu evansitu (1·485) a uhligitu (1·533).

Zimányi na základě analysy J. Loczkovy píše empirický vzorec $4 Al_2O_3 . 3 P_2O_5 + 30 H_2O$. K vystižení jeho vztahu k variscitu a k dalšímu fosfátu, s nímž se spolu vyskytuje, navrhuji formuli: $AlPO_4 . [Al(OH)]_3(PO_4)_2 . nH_2O$, při čemž n v uvedené analyse blíží se 13.

Také Zimányiho nepojmenovaný fosforečnan, jehož analysu uvádí Z. na 55. str. cit. práce, jest na vzorcích mineralog. ústavu přítomen. Při mikroskopickém studiu nabyl jsem přesvědčení, že tento „bröckeliges, weiches Mineral" není nic jiného, než wavellit. V mikroskopu jsou to drobné sférolity, jež, pokud nepřesahují 0·02—0·04 *mm*, jsou úplně čiré; jakmile jsou trochu větší, mají bílé, neprůhledné jádro. Jehličky, jež tyto sférolity tvoří, ukazují ráz délky positivní. Obrysy těchto sférolitů zmizejí, jestliže tekutina, je uzavírající, má index lomu mezi 1·542 a 1·544, kterážto hodnota leží mezi β a γ wavellitu. Také Loczkova analysa dává poměr $3 Al_2O_3 . 2 P_2O_5$, t. j. poměr týž, jako u wavellitu. Rozdíl jest jen ve množství vody (podle Zimányiho $17 H_2O$, wavellit na základě novějších analys má $13 H_2O$). To však na věci nic nemění, neboť 1. ony sférolity mohou obsahovati v drobných prostorách vodu adsorbovanou a 2. při téměř 15% nerozpustného zbytku může část oné přebytečné vody patřiti též k němu.

Na jednom ze vzorků variscitu ve větším množství ve formě povlaků na variscitovém podkladě vyskytuje se amorfní fosfát železitý (zjištěno kval. analysou), který jsem na základě indexu lomu identifikoval s delvauxitem ($n = 1·716$).

Vedle variscitu, vashegyitu a nepojmenovaného alumofosfátu (recte wavellitu) uvádí Zimányi pro Železník též evansit na základě zprávy D. Forbesa,[33]) jenž právě odtud jej původně popsal. Studoval jsem evansit z jiného slovenského naleziště, totiž z Nižné Slané u *Rožňavy*. *Evansit* z této lokality jest čirý, slabě modrozelený, ve formě jemných hroznovitých a stalakt. aggregátů na úlomcích břidlice, které částečně setmeluje. Pro malé množství materiálu omezil jsem se jen na výzkum optický a stanovení hustoty ($N_{Na} = 1·485$, $h = 1·1924$), které jen potvrzují nálezy F. E. Wrightovy a W. T. Schallerovy.[34]) Kvalitativní analysou dokázáno vedle Al jen nepatrné množství železa, jež patrně působí onu modrozelenou barvu. Pátrání po Cu i nejcitlivějšími reakcemi dalo výsledek negativní.

---

[33]) Philos. Magazine, 1864, *28*, 341.

Souhrn.

Tato práce věnována jest stúdiu fosforečnanů z obvodu chvaleticko-litošického (v Čechách) a ze Železníka (na Slovensku). Hlavní výsledky:

1. Podává morfologii vivianitu z Litošic, zjišťuje na základě vlastních pozorování a diskuse literatury jeho optickou orientaci a konečně experimentálně dokazuje závislost indexů lomu na obsahu Fe^{III}.
2. Uvádí optická data a ostatní fysikální vlastnosti fouchéritu a vashegyitu z Litošic, jejich paragenetický poměr vzájemný i k vivianitu a diskutuje postavení t. zv. picitu Bořického v mineralogické systematice.
3. Řeší na základě mikroskopického pozorování a chemických analys genetický poměr delvauxitu a destinezitu z Chvaletic a Litošic a současně udává jejich optické konstanty.
4. Zjišťuje optické vlastnosti alumofosfátů (variscitu, vashegyitu, wavellitu) a delvauxitu ze Železníka, identifikuje nepojmenovaný alumofosfát Zimányiho (recte wavellit) a udává jejich paragenesu.
5. Udává novou lokalitu evansitu (Nižná Slaná u Rožnavy) a jeho nejdůležitější vlastnosti.

Dokladový materiál k této práci uložen jest ve sbírkách mineralog ústavu české university Karlovy v Praze a v mineralog. odděl. Národního musea.

Svému učiteli, prof. Dru F. Slavíkovi děkuji za laskavý zájem, s nímž tuto práci sledoval.

Praha, v únoru 1922.

Mineralogický a petrografický ústav university Karlovy.

---

[34]) F. E. Wright a W. T. Schaller, Z. Kryst. *44*, 4 (1907.)

O partielní redukci dinitronaftalinů.

Napsali

Dr. Vítězslav Veselý a Ing. Karel Dvořák.

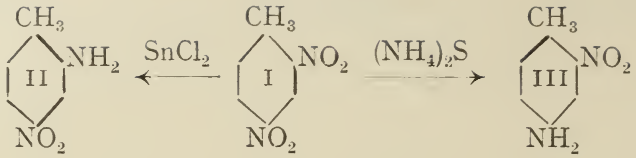
(Předloženo dne 13. ledna 1922.)

K redukci pouze jedné nitroskupiny di- a polynitrolátek řady aromatické používáme obyčejně sirníku ammonného nebo některého jiného sirníku příp. sulfhydrátu alkalií. Protože se zpravidla nepodaří, ani použije-li se velkého přebytku těchto redukovadel, zredukovati více nežli jednu nitroskupinu, není třeba množství těchto činidel přesně odvažovati, postačí, jsou-li v přebytku.

Partielní redukci polynitrolátek lze však provésti i jinými činidly v prostředí kyselém a to alkoholickým roztokem chloridu cínatého nasyceným chlorovodíkem, odporučovaným již Kekulem, nebo alkoholickým roztokem chloridu titanitého (Knecht, B. B. 36, 168; Sachs a Sichel, B. B. 37, 1862 a N. Ř. P. 168.273 z r. 1906) anebo také železem a kyselinou solnou (Wülfing, N. Ř. P. 67.018 z r. 1892). Těchto redukujících činidel smí se však k částečné redukci použíti jen v přesně vypočítaném, k redukci pouze jedné nitroskupiny potřebném množství, neboť jinak se zredukují i další nitroskupiny.

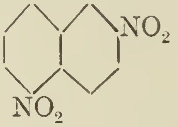
Zajímavým způsobem docílil konečně partielní redukce polynitrolátek Hirsch Pomeranz (N. Ř. P. 289.454 z r. 1912, Friedl. XII, 117), totiž zaváděním kyseliny siřičité do směsi polynitrolátky a železných pilin suspendovaných ve vodě, při čemž se zredukuje vždy jen jedna nitroskupina.

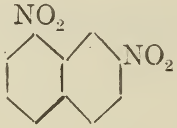
Jak již Anschütz a Heusler shledali (B. B. 19, 2161), není u asymmetrických polynitrolátek lhostejno, kterého činidla k partielní redukci použijeme, neboť redukujíce 2.4-dinitrotoluol (I.) vypočteným množstvím alkoholického roztoku chloridu cínatého nasyceného suchým chlorovodíkem, získali výhradně o-amino-p-nitrotoluol (II.), kdežto, jak již dříve bylo známo, poskytuje týž dinitrotoluol při redukci alkoholickým roztokem sirníku ammonného p-amino-o-nitrotoluol (III.):



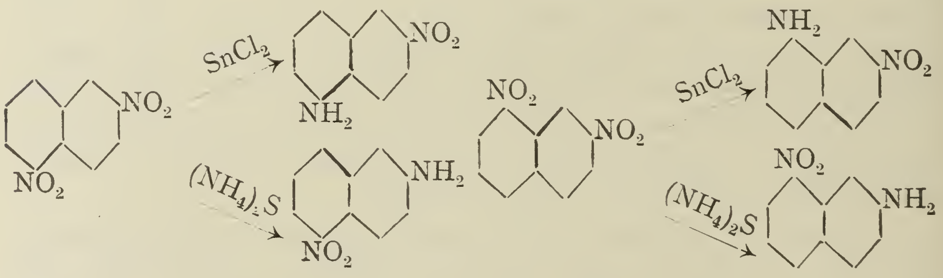
Redukuje se zde tudíž chloridem cínatým nitroskupina sousedící v jádře s methyl-skupinou, tedy právě ona nitroskupina, která při redukci sirníkem ammonným zůstává nezměněna.

Zabývajíce se přípravou různých dinitronaftalinů, studovali jsme, v jakém smyslu probíhá částečná redukce dinitronaftalinu 2.5 (= 1.6) a 2.8 (= 1.7):



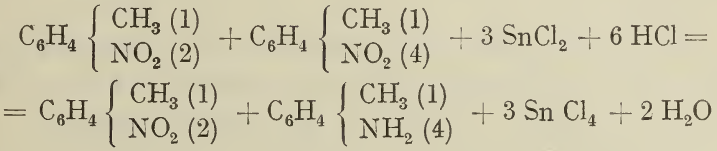


Obě tyto látky mají jednu nitroskupinu v poloze α a druhou v β. Protože α-poloha jádra naftalinového sousedí s řetězcem uhlíkatým, čemuž u polohy β není, dalo se z analogie při redukci 2.4 dinitrotoluolu očekávati, že i zde při partielní redukci alkoholickým roztokem chloridu cínatého zredukuje se nitroskupina v α-poloze, kdežto sirníkem ammonným se získá látka isomerná o aminoskupině v poloze β. Provedené pokusy potvrdily úplně náš předpoklad, partielní redukce proběhly takto:



Výsledek našich pokusů znovu potvrzuje úkaz pozorovaný při 2.4 dinitrotoluolu, že lze totiž volbou vhodného redukovadla dirigovati partielní redukci asymmetrických polynitrolátek a způsobu toho použíti k přípravě nitro-aminolátek, jež se jinou cestou dosud nepodařilo připraviti.

Protože při redukci 2.4-dinitrotoluolu zredukuje se za použití pouze jedné nitroskupině odpovídajícího množství alkoholického roztoku $SnCl_2$ výhradně nitroskupina sousedící s methylskupinou, kdežto nitroskupina v parapoloze zůstává nezměněna, zkusili jsme také, kterak probíhá redukce ekvimolární směsi o- a p-mononitrotoluolu, použije-li se jen tolik alkoholického roztoku $SnCl_2$, kolik postačí k redukci pouze jedné z obou nitrolátek. Pokus ukázal, že se tímto postupem získá výhradně p-toluidin; reakce probíhá tudíž takto:



$$C_6H_4\begin{cases}CH_3\ (1)\\ NO_2\ (2)\end{cases} + C_6H_4\begin{cases}CH_3\ (1)\\ NO_2\ (4)\end{cases} + 3\ SnCl_2 + 6\ HCl =$$

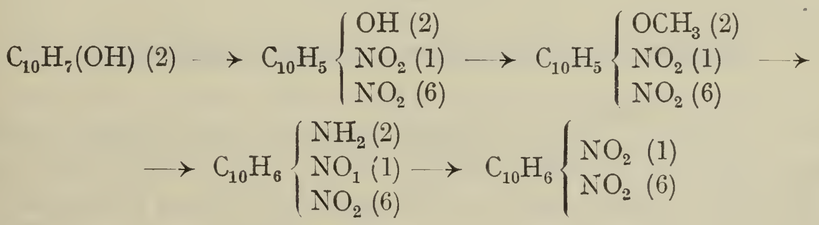
$$= C_6H_4\begin{cases}CH_3\ (1)\\ NO_2\ (2)\end{cases} + C_6H_4\begin{cases}CH_3\ (1)\\ NH_2\ (4)\end{cases} + 3\ Sn\ Cl_4 + 2\ H_2O$$

Rychlost reakční jest tedy při redukci p-nitrotoluolu značně větší než při o-nitrotoluolu a výsledek jest právě opačný nežli jaký jsme z analogie při partielní redukci 2.4-dinitrotoluolu očekávali.

Zcela obdobný pokus částečné redukce ekvimolární směsi α- a β-nitronaftalinu neposkytl však amin pouze jeden, nýbrž směs α- a β-naftylaminů, v níž převládal isomer β.

Příčinu nesrovnalostí těchto výsledků hodláme blíže studovati.

Obą výchozí dinitronaftaliny 2.5 a 2.8 připravili jsme z 2-amino-5-nitronaftalinu příp. 2-amino-8-nitronaftalinu náhradou aminoskupiny nitroskupinou, methodou, kterou popsali jsme v Rozpravách roč. XXX. tř. II. čís. 6., působíce totiž roztokem nitro-naftalin-diazoniumsulfátů v měděňou bronz suspendovanou v roztoku dusitanu sodného. Pro přípravu známého již 2.5 dinitronaftalinu jest tento způsob mnohem jednodušší a poskytuje daleko lepších výtěžků nežli cesta, jakou dospěli k téže látce Graebe a Drews (B. B. 17, 1172, An. 335.139) jakož i Kehrmann a Matis (B. B. 31, 2149), naznačenou schematem:

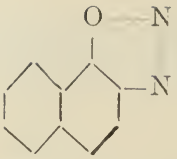


$$C_{10}H_7(OH)\ (2) \rightarrow C_{10}H_5\begin{cases}OH\ (2)\\ NO_2\ (1)\\ NO_2\ (6)\end{cases} \rightarrow C_{10}H_5\begin{cases}OCH_3\ (2)\\ NO_2\ (1)\\ NO_2\ (6)\end{cases} \rightarrow$$

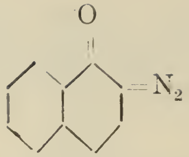
$$\rightarrow C_{10}H_6\begin{cases}NH_2\ (2)\\ NO_1\ (1)\\ NO_2\ (6)\end{cases} \rightarrow C_{10}H_6\begin{cases}NO_2\ (1)\\ NO_2\ (6)\end{cases}$$

Tímže způsobem připravili jsme z 1-amino-4-nitronaftalinu dosud neznámý 1·4-dinitronaftalin. Výtěžky jsou v tomto případě značně horší nežli v předcházejících, nepřesahujíť 3% množství theoretického.

Připraviti obdobnou cestou z 1-nitro-2-aminonaftalinu dosud neznámý 1.2-dinitronaftalin se nám však nepodařilo, vznikáť rozkladem 1-nitronaftalin-diazoniumsulfátu (2) mědí a roztokem $NaNO_2$ látka, jež svým složením a vlastnostmi shoduje se s naftalin-2.1-diazooxydem připraveným nejdříve E. Bambergerem (B. B. 27, 680) oxydací alkalického roztoku β-naftalindiazoniového ferrikyanidem draselným. Látka tato má složení:

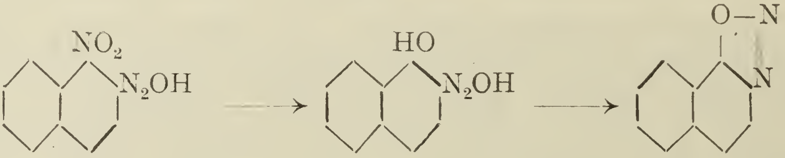


anebo snad



a dá se velmi snadno připraviti anhydrisací 1-oxy-2-naftalin-diazoniumhydroxydu. (N. Ř. P. 172, 446 z r. 1904). Jak shledali Gaess a Ammelburg (B. B. 27, 2214), vylučuje se týž naftalin-diazooxyd z roztoku 1-nitro-2-naftalin-diazoniumsulfátu, necháme-li jej několik dní za obyčejné teploty státi, kdežto Orton (Proc. Chem. Soc. 258) získal tutéž látku působením octanu sodného na vodný roztok 1-chlor-2-naftalindiazoniumsulfátu.

V obou posledních případech, jakož i v případu našem, možno si vyložiti vznik naftalin-2-diazo-1-oxydu pouze tak, že diazoniová skupina v poloze 2 uvolňuje vazbu NO_2- příp. Cl- skupiny na jádro v poloze 1., takže tato v alkalickém nebo slabě kyselém prostředí se nahradí hydroxylem a vzniklý hydroxyd se anhydrisuje:



Taková labilnost substituentů v sousední poloze ke skupině diazoniové byla u benzolových derivátů pozorována již častěji. (Srov. Noelting a Battegay, B. B. 39, 78).

Část pokusná.

Příprava 2.5 dinitronaftalinu z 2-amino-5-nitronaftalinu.

10 *g* 2-amino-5-nitronaftalinu připraveného dle Friedländra a Szymanski-ho (B. B. 25, 2077) rozpuštěno ve 40 *g* ledové kyseliny octové, přidáno 40 *g* zředěné kyseliny sírové (1 : 1) a roztok rychle ochlazen za stálého míchání, takže se látka vyloučila v jemné krystalické kaši. Tato zředěna ledem a zdiazotována za chlazení konc. roztokem 10 *g* $NaNO_2$. Čirý červenohnědý diazoroztok byl potom opatrně po malých dávkách vlit do 160 cm^3 25%ního roztoku $NaNO_2$ v němž bylo suspendováno 20 *g* měděné bronzi fy Ullmann ve Fürthu v Bavořích (označené „přirozená měď C.")[1] Ihned nastává prudká reakce; směs ponechána, aby reakce

---

[1] Protože prodejná bronz jest maštěná a nedá se vodou omočiti, reaguje špatně s vodnými roztoky i nutno ji tuku zbaviti, což daří se mnohem lépe než vypíráním étherem nebo benzinem, přidáme-li ke směsi bronzi s vodou několik kapek konc. roztoku NaOH a chvíli protřepáváme. Jakmile měď netvoří více povlaku na povrchu vody, přidá se k slabě alkalické směsi přímo roztok dusitanu a použije se pak k rozkladu diazoroztoku.

proběhla do konce, několik hodin státi, vyloučená černohnědá látka odssáta, promyta vodou a několikrát vyvařena lihem. Ze zahuštěného, karboraffinem[2]) odbarveného lihového roztoku vyloučil se dinitronaftalin 2.5 v dlouhých zlatožlutých jehlách, tajících při 161-2°. Z matečného louhu získáno po zahuštění ještě něco látky b. t. 159—160°. Výtěžek v celku 2·6 *g* t. j. 21·6% theor. množství.

0·1740 *g* látky poskytlo 20·5 *cm*³ dusíku při 21° a tlaku 741 *mm*.

Vypočteno pro $C_{10}H_6O_4N_2$	Nalezeno
12·84%	13·05%

Látka jest úplně totožná s 1·6-dinitronaftalinem připraveným Graebem a Drewsem.

Redukce 2.5-dinitronaftalinu sirníkem ammonným.

1 *g* 2·5-dinitronaftalinu přelito v baňce 40 *cm*³ lihu a 3 *g* konc. NH_3, načež zaváděn za obyčejné teploty sirovodík do nasycení; při tom roztok sežloutne a konečně zhnědne. Potom baňka zahřívána asi půl hodiny na vodní lázni se zpětným chladičem, roztok ochlazen a znovu nasycen sirovodíkem. Přísadou vody sráží se z roztoku látka, jež odssáta a vyvařena zřed. kyselinou solnou, při čemž redukcí vzniklý nitramin přechází jako chlorhydrát do roztoku, kdežto případně nezredukovaná dinitrolátka zůstává spolu s vyloučenou sírou nerozpuštěna. Filtrovaný roztok chlorhydrátu ochlazen a alkalisací ammoniakem sražena z něho zásada nitronaftylaminu, jež odssáta, vysušena a dvakrát překrystalována z lihu získána ve formě granátově červených jehlic tajících při 143° a jevících všechny vlastnosti 2-amino-5-nitronaftalinu, z něhož výchozí dinitronaftalin 2.5 byl připraven. Také acetylací z tohoto nitraminu získaný produkt, tající při 186°, jest totožný se známým 2-acetamino-5-nitronaftalinem.

Partielní redukce 2.5-dinitronaftalinu chloridem cínatým.

K roztoku 4 *g* 2.5-dinitronaftalinu ve směsi 350 *cm*³ lihu a 100 *cm*³ étheru přikapáván za třepání a chlazení vodou po malých dávkách alkoholický roztok 12·5 *g* $SnCl_2 + H_2O$ nasycený chlorovodíkem t. j. množství, jež postačí k redukci pouze jedné z obou nitroskupin. Původně slabě nažloutlý roztok nabývá při tom barvy oranžové. Po 2 hodinách vyloučen z roztoku přísadou konc. roztoku NaOH téměř veškeren cín jako $Sn(OH)_4$, jenž se usadí co hustá kaše na dně nádoby, takže lze odlitím snadno čirý alkoholický roztok odděliti. Lihový roztok odpařen, zbytek vyvařen zřed.

---

[2]) V této práci bylo používáno k odbarvování roztoků „karboraffinu“, vyráběného Společností pro průmysl chemický a metalurgický v Ústí n. L. Jeví u těchto látek větší odbarvovací schopnost nežli Merckovo zvířecí uhlí.

HCl, kyselý výluh sfiltrován a z filtrátu vyloučena přesycením NH_3 redukcí vzniklá nitroaminolátka, jež odssáta a překrystalována z lihu, tvoří tmavočervené jehličky tající při 165°.

0·1522 *g* látky poskytlo 20·7 *cm*³ dusíku při 25° a tlaku 738 *mm*.

Vypočteno pro $C_{10}H_8O_2N_2$	Nalezeno
14·89 % N	14·77 % N

Jelikož nalezené množství dusíku odpovídá složení nitro-naftylaminu a látka s 2-amino- 5-nitronaftalinem totožná není, musí míti nezbytně konstituci 5-amino-2-nitronaftalinu.

Acetylací získá se příslušný 2-acetamino-5-nitronaftalin, jenž krystaluje z lihu v citronově žlutých jehličkách b. t. 232-3°, ve studeném lihu těžko rozpustných.

0·1269 látky poskytlo 14·3 *cm*³ dusíku při 27° a 748 *mm* tlaku.

Vypočteno pro $C_{12}H_{10}O_3N_2$	Nalezeno
12·18 % N	12·34 % N

Příprava 2.8-dinitronaftalinu z 2-amino- 8-nitronaftalinu.

Výchozí 2-amino-8-nitronaftalin připraven byl taktéž dle Friedländra a Szymanski-ho (l. c.) Postup byl stejný jako při přípravě 2.5 dinitronaftalinu. Zmíniti se pouze dlužno, že při diazotaci vznikající nitronaftalindiazoniumsulfát jest dosti těžko rozpustný ve vodě, takže jest nutno pracovati v roztoku silně zředěném. Při reakci s mědí vznikající 2.8-dinitronaftalin jest také v lihu dosti nesnadno rozpustný, pročež jest k vyluhování reakční směsi třeba použíti většího množství tohoto rozpustidla. Z roztoku karboraffinem odbarveného a zahuštěného vykrystaloval 2.8-dinitronaftalin v nažloutlých mikroskopických jehličkách b. t. 155·5°, těžko v lihu, snadno rozpustných v benzolu, étheru, chloroformu a v ledové kyselině octové. Z matečného louhu získáno ještě něco látky tající při 152°. Z 10 *g* výchozí látky získáno v celku 2·6 *g* dinitroproduktu, t. j. 21·6 % theoretického výtěžku.

0·094 *g* látky poskytlo 11·1 *cm*³ dusíku při 22·5° a 745 *mm* tlaku.

Vypočteno pro $C_{10}H_6O_4N_2$	Nalezeno
12·84 % N	13·06 % N

Redukce 2.8-dinitronaftalinu sirníkem ammonným.

Operace provedena stejně jako při 2.5 dinitronaftalinu. Získán 2-amino-8-nitronaftalin tající při 104—5°; jeho acetylderivát tál při 197·5°.

Partielní redukce 2.8-dinitronaftalinu chloridem cinatým.

Také zde pracováno stále stejně jako při redukci 2.5 dinitronaftalinu. Jelikož při redukci vzniklá a jak nahoře popsáno, z kyselého roztoku ammoniakem vyloučená nitroaminolátka jest v lihu i za chladu velmi snadno rozpustná, špatně z něho krystaluje a nesnadno se čistí, shledáno výhodnějším zásadu čistiti ve formě acetylderivátu. Acetylací surového nitro-naftylaminu získána látka, jež třikráte z lihu překrystalována tvoří žluté jehličky tající při 206·5⁰.

0·0698 *g* látky poskytlo 0·0324 *g* H_2O a 0·1590 *g* CO_2.

Vypočteno pro $C_{12}H_{10}O_3N_2$	Nalezeno
C = 62·6 %	C = 62·1 %
H = 4·3 %	H = 5·1. %.

Zmýdelněním zřed. kyselinou sírovou (1 : 1) poskytl tento acetylderivát amino-nitronaftalin krystalující ze zředěného lihu v jemných červených jehličkách b. t. 121—2⁰, ve všech obyčejně užívaných organických rozpustidlech — mimo ligroin — velmi snadno rozpustných. Pro nedostatek látky elementární analysa provedena nebyla.

Jak vyplývá z výsledku analysy acetylderivátu, jest tato látka nitronaftylaminem, není však identickou s 2-amino-8-nitronaftalinem. Nezbývá tudíž nežli ji považovati za neznámý dosud 2-nitro-8-aminonaftalin.

Příprava 1.4-dinitronaftalinu z 1.4-nitronaftylaminu.

10 *g* 1·4-nitronaftylaminu připraveného dle Lellmanna a Remyho (B. B. 19, 797 a 20, 842) a Meisenheimera a Patziga (B. B. 39, 2541) rozpuštěno v 200 *g* horké ledové kyseliny octové, přidáno 40 *g* zřed. kyseliny sírové (1 : 1), vzniklá krystalická kaše diazotována a diazoroztok rozložen — stejně jako bylo popsáno při přípravě obou druhých dinitronaftalinů — směsí měděné bronzi s roztokem $NaNO_2$. Vyloučená pevná látka odssáta, promyta vodou, vysušena a vyvařena lihem. Z lihového výtažku odbarveného karboraffinem vyloučil se zahuštěním 1·4-dinitronaftalin ve světle žlutých jehličkách b. t. 129⁰. Výtěžek pouze 0·4 *g*.

0·1221 *g* látky poskytlo 14·6 *cm*³ dusíku při 25⁰ a tlaku 740 *mm*.

Vypočteno pro $C_{10}H_6O_4N_2$	Nalezeno
12·84 % N	12·97 % N

Pokus o přípravu 1.2-dinitronaftalinu z 1-nitro-2-aminonaftalinu.

1-nitro-2-aminonaftalin zdiazotován stejně jako v předešlých případech a diazoroztok rozložen měděnou bronzí suspendovanou v roztoku

$NaNO_2$. Poslední reakci jakož i všechny další operace provésti nutno při umělém světle, neboť vzniklý produkt působením slunečního světla rychle tmaví a konečně úplně mazovatí. Reakční směs ponechána několik hodin státi, vyloučená látka odssáta, promyta vodou, vysušena při obyčejné teplotě na porovitém talíři a vyloužena étherem. Karboraffinem odbarvený étherický extrakt odpařen do sucha a zbytek dvakráte překrystalován z ligroinu tvoří lesklé žluté lístky, jež v exsikátoru větrají, při 73—76^0 tají a při 112^0 se za kypění rychle rozkládají. Takto vyčištěná látka na světle jen zvolna hnědne; jest snadno rozpustná ve vodě i ve všech běžných organických rozpustidlech. Její vodný roztok poskytuje s resorcinem a floroglucinem temně červeno-fialové roztoky azobarviv.

0·2014 *g* látky poskytlo 0·5251 *g* CO_2 a 0·0754 *g* H_2O.

0·1500 *g* látky poskytlo 22·05 cm^3 dusíku při 15·5^0 a tlaku 746·5 *mm*.

Vypočteno pro $C_{10}H_6ON_2$:	Nalezeno:
C = 70·6 %	C = 71·1 %
H = 3·5 %	H = 3·4 %
N = 16·5 %	N = 16·8 %

Z ústavu chemie organické
na české vysoké škole technické v Brně.

Předběžná zpráva o geologii lázní Bašky a okolí.

Podává

Dr. Otakar Matoušek,

asistent geologie na universitě Karlově.

(Předloženo dne 13. ledna 1922.)

Práce tato podává příspěvek ke geologii okolí českých lázní Bašky na ostrově Krku (Veglia) se zvláštním zřetelem k tektonické stavbě. Poznatků, které uvádím, jsem nabyl během letního pobytu r. 1921; nebylo ovšem možno za několik neděl prostudovati krajinu tektonicky a hlavně stratigraficky naprosto mi neznámou detailně, zvláště uvážíme-li, že nesmírná vedra téměř znemožňují v té době cesty po holých skalách. Později vypracuji podrobnou mapu s vysvětlivkami nových objevů, poněvadž jde o místa velice zajímavá a s moderního hlediska nedostatečně známá.

Z literatury nejvýznamnější jsou práce Stacheovy, uveřejněné v „Jahrbuch der k. k. Geol. R. A." a „Verhandlungen" a „Abhandlungen" der k. k. Geol. R. A." Tamtéž vyšla řada novějších pojednání, hlavně Waagenových a Schubertových; nákladem ústavu byla vydána Waagenova geologická mapa v měřítku 1 : 75.000 a vysvětlivky k ní (r 1911). Přes to, že vlivem politických poměrů jsem obdržel tuto mapu až po návratu z Bašky, zmíním se o ní dodatečně v textu. — Ve vysvětlivkách a v populárnějším průvodci Schubertově severní Adrií (Samml. geol. Führer XVII., Berlin 1912) jsou podrobnější seznamy literatury.

Drobné příspěvky sběratelské a stratigrafické ke geologii Nové Bašky podal ve „Verhandl. d. R. A." a v lázeňském prospektu M. Remeš.

Tak jako u jiných svých prací, i v této jsem zavázán upřímnými díky p. prof. Dru Počtovi za mnohé vzácné rady, o něž jsem ho požádal a jimiž mne vždy podporuje s nevšední ochotou a laskavostí.

STRATIGRAFIE.

Je pochopitelno, že přes dosavadní zpracování bude třeba stále ještě pečlivějších doplňků k přesnému stanovení stratigrafie. Sám během nedlouhého pobytu nalezl jsem příklady toho a jsem přesvědčen, že při podrobnějším studiu by nezůstaly osamoceny.

Jinak ovšem mi nebylo možno mnoho pozměňovati v poznatcích geologů, kteří ovládali detailně stratigrafii celé Adrie. Omezuji se prozatím spíše na kritické poznámky a doplňky, dále na upozornění na význam pro tektoniku ostrova a vlastnosti, jež byly dosud opomenuty.

Nejstarší horninou jsou rudistové vápence z doby mladšího cenomanu, v nejsvrchnějších polohách snad i turonu. Budují vypnutý, sbroušený hřbet na obou stranách údolí, omezený podélnými zlomy a rozbitý nesčetnými zlomy příčnými, které působí na mapě Waagenově nesprávně zakreslené zklikacení horstva. Na východě se jejich pruh jaksi vykliňuje nedostatečným vypnutím; při mocnější denudaci byl by jistě patrný i dále. Charakteristické jsou brekcie, které byly staršími pracovníky srovnávány správně se známými brekciemi repenskými; jak jest známo, chybějí naproti tomu spodnokřídové dolomity na Krku úplně.

Dosti důležitými jsou tyto rudistové vápence a brekcie se stanoviska tektonického, jak ukáži později. Nadloží tvoří svrchní vápence rudistové, petrograficky rozdílné, které jsou pro naši krajinu nejcharakterističtější. Stáří jejich odpovídá nejspíše svrchnímu turonu až senonu. Pokud mohu souditi z vlastní zkušenosti, rozeznají se od předešlých velice dobře, ač ovšem hranice je naprosto neurčitá; jak však vysvítá z literatury, není tomu tak asi všude.*)

Mají charakteristickou nádhernou růžovou barvu, ve vyšších polohách hlavně krásně bílou. Místy nalezneme vápenec šedý a navrch felsitově žlutý; myslím že jde o facie, které asi těžko bude možno stanoviti podrobněji stratigraficky. Spíše větší pozornosti zasluhují hrubé brekcie, které se v tomto pásmu nacházejí.

Vápenec upomíná vzhledem dosti na naše krystalické vápence koněpruské. Tak bývá čistý, že možno někdy mluviti skoro o čistém $CaCO_3$. Je škoda, že dopravní obtíže a nedostatek paliva zabraňují průmyslovému zužitkování. Naproti tomu je vápenec tento dosti „řídký" a má všechny vlastnosti, které jsou vhodny k vytvoření zjevů krasových. Jen on je příčinou toho, že Krk, Pervič a p. na první pohled se odlišují celým vzezřením od sousedních ostrovů, na př. Rábu, které jsou budovány hlavně vápencem spodnorudistovým, starším, petrografickými vlastnostmi odlišným. Zmíním se o některých zjevech, které působí, v části morfologické.

Nedostatek rostlinného krytu, jehož je sám příčinou svými vlastnostmi fysikálními a chemickými, činí jej nejzpůsobilejším k pozorováním tektonickým.

---

*) Sám jsem narazil na obtíže při podrobném studiu r. 1922 a to hlavně pro složitou tektonickou stavbu. Srovnej pozdější práce: „Nalezení eocenu na ostrově Prviči" a j. (Pozn. při korektuře.)

Po uloženinách křídových následuje stratigrafická mezera, která bývá zastřena tím, že spousty svalených úlomků krystalického vápence zabraňují studiu hranic s vápenci ecenními, anebo že hranice velmi často bývá původu tektonického. Právě tektonika ztěžuje, podle mého názoru, nejvíce mimo rozdíly facielní přesné stanovení stratigrafie uloženin křídových, a nejinak je tomu i u následujících pásem stáří eocenního. Celkem jsem však došel přesvědčení, že až bude podrobněji a spolehlivěji — což bych zdůraznil — prozkoumána palaeontologie v těchto místech, bude možno rozdělení provésti na řadu úplně zřetelných oddílů, hlavně kaenozoika.

Je to patrno hned při prvních vrstvách, které Stache rozdělil na alveolinové a numulitové, a které Waagen a po něm Schubert stahují. Palaeontologicky je možno obě dobře odděliti až na místa přechodu, kde nejsou hranice dobře vytčeny, kdežto rozdělení petrografické značně selhává. Soudím, že původní, staré rozdělení, které Stache navrhl, bylo by možno po novém prozkoumání palaeontologickém zcela dobře přijati. Spolehlivěji určeno je stáří pouze u vápenců nummulitových přehojným výskytem. Orbitolites complanata L., dosti charakteristickým pro svrchní lutétien. Podle toho možno se značnou pravděpodobností předpokládati, že stáří vrstev spodnějších, alveolinových spadá do lutétienu spodního; přechod je pak srozumitelný.

Vápenec alveolinový má všechny vlastnosti vápence krasového.

Neprávě jasné jsou dosavadní názory o následujících vrstvách. Jde o nepříliš mocné uloženiny šedého slínu, ostře odlišeného od sousedních vrstev, pokud mi je známo, a místem pěkně břidličnatého. Profil takový je odkryt na př. při pobřeží u mladých skal písčitých jihozápadně od zříceniny St. Cosmo, ale je bohužel právě v tomto bodě komplikován k stratigrafickému pozorování shlukem zlomů, které se tu křižují

Neostrá je hranice těchto slínů a břidlic vůči nadloží více pískovcovitému; pouze vápnitost se uchovává, takže následují vápnité pískovce nebo písčité vápence, obsahující veliké množství zkamenělin. Střídání slínů s pískovci, o němž se mluví v literatuře, je z části zaviněno tektonicky a to směrnými zlomy. V předpokladu prostých synklinál a antiklinál, jimiž se dosud vykládala stavba Krku, je ovšem těžko vysvětlitelno. Mocné poklesy působí, že jen na málo bodech po obou stranách údolí vystupují skály vápenců. Na mnoha místech však se s nimi jinak setkáme; zdi kolem vinic jsou skoro vesměs sestaveny z nich a obsahují pravé sbírky palaeontologické. Některé sestávají vlastně z pouhých tisíců nummulitů („svrchní nummulitové vrstvy") naproti zřetelně samostatné poloze, vystupující na př. při břehu mořském pod českým pensionátem „Dalibor", kde jsou krásně zachované korále a spousty úlomků lastur nebo ježovek. I petrografický je tato poloha velmi význačná. Zajímavá je obrovská skořápka tamtéž nalezeného gasteropoda, pravděpodobně Cerithium (giganteum? — nenalezl jsem však nikde zmínky, že by tento druh byl na Bašce nalezen).

Vrstvy tyto vystupují také asi 100 *m* jižně od Jurindvora, tvoříce střed antiklinály. Jsou plny skořápek, částečně i nummulitů a jsou nejmladším eocenním pásmem v popsané krajině, dosud neznámým. Nález jejich je velmi významný tektonicky, dokazuje, že údolí baščanské je porušenou, sbroušenou antiklinálou eocenní, vyplňující propadlou kru křídovou; dosud byla předpokládána tu vždy synklinála. Podrobnostmi, příliš důležitými, se zde nebudu zabývati, ponechávaje je pro práci specielní.*)

Je patrno, že je mnoho nevyjasněného v eocenních sedimentech v okolí Bašky, ale nezbylo mi času tyto pochybnosti objasniti si úplně. Pokud se týče míst, krytých mladými nánosy potoka uprostřed údolí, vykopávkou blízko břehu mořského, nalezl jsem opět slíny, které však naprosto nijak nepůsobily dojmem břidličnatým, který je na př. jihozápadně od zříceniny při břehu tak patrný.

Diskordantně na dosavadních uloženinách spočívají mnohem mladší brekcie, pískovce a hlíny. Nenalezl jsem vůdčích zkamenělin a proto co do stáří nutno se připojiti k názorům dosavadním, uváděným s úplnou jistotou, o stáří plistocenním, resp. samozřejmém holocenu u potoka. Přes to mám dojem, že není vyloučeno, že jde v některém případě i o horninu starší nebo alespoň o dobu nejstaršího plistocenu, což je pravděasi bližší.

Pohledíme-li na dokonale stmelené brekcie, které pokrývají svahy údolí hlavně asi uprostřed jich anebo na mnohametrovou mocnost pískovců, máme k tomu dosti značný důvod; naproti tomu nelze nevzpomenouti, že běží o snadno se tvořící tmel vápencový. Brekcie chovají skoro vesměs ostrohranný materiál křídový, růžové a bílé vápence krasové, kdežto materiál starší, okulacený a hlavně eocenní horniny jsou vzácné. Poněvadž je nesporno, že jde o brekcie mladší, je chybění eocenních částí dosti podivné; prozatím nepodám bližších názorů, ale zdůrazňuji, že je to podle mého názoru opět jeden z důvodů, který by ukazoval na dosti značné stáří brekcií. Nestačí úplně ani poukaz na to, že eocenní vrstvy jsou většinou z materiálu snadno rozrušitelného.

Na některých místech jsou zaměněny (jak pojednám později na mapě) za brekcie stáří křídového, což ovšem má v zápětí řadu chybných dedukcí.

Brekcie chovají někdy balvany úžasné velikosti; leckde na západním svahu blíže Bašky nalezl jsem úlomek v průměru přes dva metry.

Pískovce jsou uloženy vesměs v nižších polohách, což samo už ukazuje, že jsou mladší. Střídají se vrstvy hrubozrnné s jemnými. Některé polohy jsou velice pevné, takže vyčnívají ze skály až půl metru v podobě tenounké desky, odolávající dosti atmosferiliím; jinde však nalezneme úplně sypké písky.

---

*) Doplněno při korektuře.

Vysoko nad těmito písky nalezneme na svahu stráně na př. asi uprostřed západního svahu nedaleko od Bašky hlíny, jichž původ nemohu s určitostí vysvětliti, poněvadž jsem nenalezl zkamenělin; nejde asi o uloženiny lössu. Na druhé straně údolí tu a tam nalezneme nevelké stopy větrání v podobě známé terra rossa, vesměs však v podružném množství.

Za války byl tu učiněn pokus i těžiti beauxit.

Studiem nejmladších usazenin, hlavně holocenního pruhu podél potoka, jsem se podrobněji nezabýval.

TEKTONIKA.

Daleko podstatnějších změn než stratigrafie bude vyžadovati tektonika celé krajiny. Pojednám o ní ve zvláštní práci, jakmile prostuduji některé dosud mi nejasné body. Považuji tedy názory své, které tu podám, do jisté míry za předběžné.

Promluvím nejprve o tektonické stavbě celé krajiny. Stavba ostrova Krku nezdá se mi býti tak pravidelná, jak se uvádí ve veškeré literatuře bez výjimky. Bývá vykládána tak, že stejně jako u Rábu a ostatních drobných ostrovů sousedních křídové vrstvy byly zvrásněny a ve vytvořených pánvích usazovaly se uloženiny kaenozoické.

Nesporno je, že (nemluvě o dobách starších) horotvorné pohyby opakovaly se alespoň dvakráte: Poprvé ve značném měřítku v době pokřídové, ale předeocenní, po druhé po době eocenní v měřítku menším. Tím již možno si poněkud vysvětliti odlišný úklon obou hornin, při čemž směr zůstává zachován. Pískovce eocenní zapadají na př. na záp. straně údolí zcela zřetelně a nikoliv jen lokálně k jihozápadu, ač by bylo podle dosavadních theorií nutno očekávati zapadání opačné, abychom mohli mluviti o pánvi; zjistil jsem na několika místech na př. uložení to 8½, 80⁰ jz.

Pohled na mapu ukazuje ihned, že tlak horotvorný působil ve směru kolmém na tvar ostrovů, vesměs se táhnoucích od sz k jv. Jízda kolem ostrovů, hlavně drobnějších a nekrytých rostlinstvem — nejlépe jsem to pozoroval u drobných ostrůvků severně od Rábu — ukazuje přesvědčivě, že tlak přišel z jihozápadu, ale že nejde o prosté zvlnění, nýbrž o jev složitější. Pravidlem je sv svah ostrovů kolmější, takže půda dostávala asi tvar, upomínající na duny, povlovnější ke straně, odkud tlak působil.

O přesunech tu nemůže býti řeči a také dosavadní názory jiné jsou neudržitelné.

Půda se tedy vlnila tímto způsobem, až napětí zvyšované způsobilo řadu velmi mocných zlomů podélných, podle nichž nastaly jednak výsuny, jednak — povolením tlaku na vedlejším místě téměř současně poklesy, jimiž vrásnění vyvrcholilo a zároveň doznívalo. Zvláště tyto poklesy, které se vyrovnaly, když tlak pominul jejich vznikem, jsou důležité v údolí Bašky, které mladšími sedimenty dostalo onen pravidelný ráz.

Drobné celkem, ale nesčetné zlomy příčné (k 4) jsou pozdějšího původu a na vrásnění podélném nezávisly. Zdá se mi, že bude možno je rozlišiti ve dvě fáse od sebe odlišné. Podrobnosti ponechám na soubornou práci definitivní.

V detailech jsou tektonické poznatky Waagenovy právě tak nesprávny jako v celku. O zlomech se sice zmiňuje, ale do mapy jich nezanesl vůbec, naopak je zřejmo, že nerozuměl vždy, pokud na vystupování pásem působí denudace a pokud jde o tektoniku.

Co do postupu tektonických zjevů je možno nalézti pěknou analogii s orogenetickými poměry středočeskými. Výsledky tam ovšem byly jiné, na jedné straně komplikovanější odporem neznámého podloží, na druhé straně jednodušší. Základní rozdíl je ovšem v celkovém nedostatku přesmyků, nebo jde o přesmyky jednostranné, zatím co strana odlehlá tlaku poklesávala postupně vždy více, čím je blíže středu.

Tlak příčný byl rázu naprosto odlišného, nepůsobiv, pokud vím, velkých změn, nýbrž jen ohýbání vrstev a poruchy počtem velice hojné, podle nichž jednotlivé kry byly posunuty, ale jimiž se základní stavba téměř nezměnila. Na některých místech (jz svah údolí baškánského, svahy drobných ostrovů) jsou tyto zlomy v takovém množství vedle sebe, že dávají celý zvláštní ráz morfologický; ale znemožňují svým počtem zakreslení i do podrobné mapy.

Podle všech dosavadních názorů je údolí baščanské ohraničeno dvěma hřbety, jež prý jsou antiklinálami, mezi nimiž je údolí, synklinála křídová a spolu eocenní. Ve skutečnosti, jak jinde dokáži, jsou hřbety jen vytyčenými krami — dokonce tam, kde Waagen a ostatní předpokládali vrstvy nejstarší, spodnorudistové, jsem nalezl právě nejmladší, eocenní — a údolí baščanské krou propadlou podél směrných zlomů při uvolnění tlaku, zatopenou eocenním mořem, jehož sedimenty později byly vyborceny mezi dvěma krami tlakem v antiklinálu, jejíž jádro pak se propadlo. To je asi jádro mých nových představ, jež jinde dokáži.*)

Naznačil jsem základy nového geologického pojetí, jímž budou názory dosavadní jak co do detailů, tak hlavně co do stavby celé krajiny úplně přepracovány.

MORFOLOGIE.

O morfologii Krku a okolních ostrovů nebylo dosud mluveno leč v souhrnných pracech o krajinách Krasových. Dlužno však podotknouti předem, že jevy krasové jsou vázány na vystupování mladšího vápence křídového a alveolinového. Jeho přítomností se liší ihned ráz okolí Bašky, Perviče a t. d. na př. od Rábu. Po vodě v místech, kde se vyskytuje tento vápenec, není stopy a odtud také částečně i nepřítomnost rostlinstva. Teprve na eocenních svazích, hlavně v místech nad slíny, objevují se porosty travin, ukazujících na existenci vody, a někde, kde jsou vápence kryty hlinou, i drobné háje, fíkovníky a p.

---

*) Odstavec doplněn při korektuře.

Řada jiných geologických zjevů souvisí s tímto krasovým růžovým vápencem, které však jsou známy z všeobecných kapitol o krasových zemích. Upozorňuji pouze na jeskyně krápníkové; o poljích a j. pojednám až v práci hlavní, poněvadž jde o množství různých poznatků, jichž nelze vystihnouti několika slovy.

Hned proti přístavnímu molu jsou zbytky jeskyní s krápníky, většinou již vylámanými. Pěkné jeskyně krápníkové jsou na jižním konci ostrova v průlivu proti Perviči. Jeskyně se šíří ve směru dislokací, hlavně příčných, které jsou v pobřeží tom nádherně patrny a vodou zvětšeny. Velká část oněch míst je jeskyněmi většími či menšími prohlodána. Někde je zřejmo, že původní dislokace, pak stále se přetvořující v jeskyně, tu rozčleňují ostrov; tak křídové skalisko právě v tomto průlivu v moři, hned poblíže břehu, je troska staré stěny jeskyně, která kdysi souvisela s ostrovem samým. I závrty jsou v okolí patrny.

Sama morfologie pobřeží je dosti jednotvárná; z velké části spolupůsobí tu tektonika, která je druhotně zastřena erosivními účinky moře. Naproti tomu na př. na jz straně zátoky, kde vrstvy zapadají téměř kolmo, takže plochy vrstevní značně vzdorují příboji, je na první pohled patrno, že linie pobřežní sleduje podélný zlom, podle něhož východní kra velice silně poklesla. Výška skoku je značná; stačí srovnati poměrnou hloubku moře ihned u břehu a výšku stěn pobřežních.

Zlomy příčné naproti tomu pouze rozrušují pobřeží, ale k jeho vytvoření v hlavních rysech působily naprosto nepatrně.

Pokud morfologie vod se týče, je situace velmi jednoduchá. Potůčky jsou vedeny z části velké ve směru tektonických rýh podélných i obou příčných, nejčastěji kombinovaně. Známe-li směr těchto zlomů, je zřejmo z kterékoliv mapy, že podle něho se řídí. Potok v údolí baškánském teče v nejhlubším poklesu ker, které byly zakryty sedimenty eocenními; holocenní pruh podél něho je z týchž důvodů tektonických dosti široký, ale mocnosti minimální.

Zajímavé je pozorovati s kopců nános baškánského potoku do moře, jehož průhledné vody dovolují pohlížeti na dno.

Poznatky stratigrafické samy značí nám morfologický vývoj jižní části ostrova a vlastně celé krajiny. Je neznám až do doby křídové, dosti neklidné; brekcie ukazují občasnou regressi mořskou, či spíše kolísání. Následuje mocné vyzdvižení vrstev, křídových; v době eocenní se usazují vrstvy v propadlých krách. V prvních dobách (lutétien) bylo moře hluboké a usazovalo alveolinové vápence, později vápence nummulitové. V auversienu hloubka moře několikráte mocně kolísá, jak ukazuje přítomnost pískovcových poloh a útesů korálových, která si zaslouží ještě bližšího prozkoumání. Tektonické pochody vyznívají a sesilují se ještě později — snad v priabonienu působí nesouhlasné uložení mladších vrstev v údolí; s představami o jakýchsi mezi-vrásách nemohu souhlasiti a objevem jádra antiklinály také se stávají bezpředmětnými.

Nové tektonické pochody komplikují stavbu krajiny, hlavně eocénu. Od zdvižení zůstaly křídové skály vystaveny rušivým vlivům atmosferilií. Výsledek jejich působení během kaenozoika je patrný v nádherném peneplainu po obou stranách údolí.

Geologický ústav university Karlovy, 1921.

* * *

Po předložení této studie České Akademii byl mi zapůjčen laskavostí p. ředitele C. Purkyně kartáčový otisk pojednání Dra Remeše „Eocén u Nové Bašky na ostrově Krku.“ Podává několik příspěvků stratigrafických, takže hlavní kapitoly mé práce, tektonické (nejdůležitější) a morfologické (rovněž dosud nepovšimnuté) se netýká.

Práce Remešova podává seznamy zkamenělin z různých lokalit jím objevených a určených pp. Cossmannem a Oppenheimem, a uvádí i řadu detailů, jichž jsem nemohl pojati v rámec tohoto pojednání. Přes to, že většinou se naše představy shodují, zůstaly některé nejasnosti; proto ponechávám svou práci beze změny a odkazuji na zmíněné pojednání hlavní. Podotýkám jen na příklad, že v závěrečném odstavci také je nesprávný Remešem uvedený stratigrafický pořad:

Pásmo Sv. Kosmo—Majka Boží je prý *mladší* než „pásmo“ Praga—Sv. Michal—Batomalje — a přece pásmo první (Kosmo) považuje Remeš za lutétien, druhé (Praga) za auversien. Jak známo, je ve skutečnosti lutétien *starší* než auversien.

Stejně nesprávný a vůbec nemožný je průběh těchto pásem, jak jej Remeš naznačil čísly do mapky (Waagenovy).

O fulguritech.

Napsal

P. N. Čirvinskij v Novočerkassku.

(Se 3 vyobr.)

(Předloženo dne 27. ledna 1922.)

O fulgurity měli by se zajímat odborníci rozličných nauk, ale snad právě tato okolnost vysvětluje, že poměrně nemnozí se o ně zajímají. Fysikové, geofysikové, meteorologové i elektrotechnikové nevědí o nich skoro nic. Nejvíce studovali je ještě geologové a mineralogové, ale ani jejich studia nebyla dosti všestranná: pro prvé byla to „petrografická drobnost", pro mineraloga není fulgurit minerálem, pro petrografa není horninou. Ale přece nakupila se o fulguritech dost velká literatura. Vyjmenujeme autory, kteří o nich psali: L. D. Hermann (1711), Priestley (1790), Fiedler (1817), Humboldt (1819—1859), Arago (1821), G. D. Gibb, Ch. Darwin, W. Wicke (1859), H. Abich (1870), A. Rogovič (1873), P. Harting (1874), F. Roemer (1876), Gümbel (1882), A. Wichmann (1883), J. S. Diller (1884), A. Heim (1886), G. P. Merrill (1886), F. Rutley (1889), W. H. Hobbs (1899), G. T. Bonney (1900), A. A. Julien (1901), G. Merzbacher, P. J. Armaševskij (1903), K. W. Wood (1910), A. Lacroix (1915), A. P. Pavlov (1919) a někteří jiní.

Uměle připravili fulgurity Beudant, Hachette a Savart (1828), W. Kollmann (1868), K. W. Wood (1899), P. N. Čirvinskij (1905), J. J. Kosonogov (1905), Butcherová (1909) a jiní.

První fulguritové trubičky nalezl asi L. D. Herrmann[1]) v Masselu v dolním Slezsku nedaleko Vratislavě. Píše o nich: „skleněné trubičky, které rostou ve žlutém písku zdola nahoru a jsou zřejmě produktem podzemního ohně." Má-li B. Franklin, vynálezce bleskosvodu, na hrobě nápis: „Vyrval blesk nebi“ (eripuit coelo fulmen), mohlo by být napsáno na zapomenuté mohyle Herrmannově: „Našel blesk v zemi.“ Fulgurity v karakteristické formě trubiček byly popsány hlavně z písku, ve kterém se nejsnáze tvoří. Ale bývají i ve tvrdých horninách vyvřelých i usazených, které nacházíme hlavně na vrcholcích hor. O těch psalo se méně (zvláště v pracích A. Humboldta, Abicha, Rogoviče, Heima, Lacroixe atd.). Kdyby bylo možno vytisknout mou práci o fulguritech úplnou, napsal bych ji jako ilustrovanou monografii s podrobným vyčerpáním celé literatury o této otázce, ale teď se omezím na pouhý výtah z toho celého materiálu a vysvětlím blíže morfologické zvláštnosti fulguritů, vztahy k jejich vzniku a podám roztřídění.

---

[1]) L. D. Herrmann, Maslographia. Brieg 1711.

Je nutno říci že ještě ve čtyřicátých letech minulého století vyskytovaly se pochyby o tom, že jsou fulgurity skutečně produkty úderu blesku.

17. července 1823 udeřil v Rauschu ve Vých. Prusku blesk do kmene břízy. U paty stromu udělaly se dvě díry. Jedna byla hluboká asi 3 *dm* a nebylo na ní nic zvláštního; hlouběji však se ukázal fulgurit. V druhé díře nebylo fulguritu. 29. dubna 1825 udeřil blesk ve vesnici Augustdorfu u Roggenfeldu; místo, kde uhodilo, bylo vyznačeno dýmem. Asi za měsíc při prohlídce byla tam nalezena prohlubina 0·8—1 *dm* hluboká a široká skoro 3 *dm*. V zemité vrstvě byly nalezeny toliko odtržené kousky půdy, spečené dohromady, ale níže, když přišel čistý písek, ukázala se skutečná fulguritová trubička tlustá asi $1^1/_4$ *cm*.

Podle udání W. Wickeho[2]) uhodilo 15. července 1858 do břehu řeky nedaleko města Oldenburgu. Místo úderu nacházelo se 3 *m* od vody a upoutalo pozornost tím, že po udeření ukázaly se nad ním obláčky kouře. Vznikly dva otvory, obehnané malým valem bílého písku. Při rozkopávání nalezeny dvě tenké fulguritové trubičky v písku, který tu tvoří vrstvu přes 4 *dm* mocnou nad bahnem, v němž se fulgurity nevytvořily; ani v zemité vrstvě, asi 16centimetrové, pokrývající písek, nebylo fulguritů.

Ch. Darwin[3]) popsal svoje nálezy v písčitých místech, oddělujících záliv Del Potrero od břehů La Platy v Jižní Americe. Písky ty jsou pokryty pohyblivými dunami. Při pohybu dun trubičky, zprvu úplně skryté v písku, začínají trčet vzhůru a postupně se ulamují. Četné roztroušené jich úlomky ukazují místo jejich původního uložení. Rozhrabávaje písek rukama, Darwin sledoval jednu z nich do hloubky 6 *dm* a přiloživ příslušné úlomky, které tu ležely, dostal trubičku o něco delší než $1^1/_2$ *m*. Vnitřní povrch trubiček byl úplně skelný, hladký a lesklý. „Nevelký úlomek pod mikroskopem připomínal svými četnými bublinkami, naplněnými vzduchem nebo snad parami strusku získanou dmuchavkou." — Dle vnějšího vzhledu, jsouce pokryty rýhami a drsné, podobají se dle Darwina úplně fulguritům cumberlandským, dosahujícím délky až 9 *m*. Povrch trubiček Darwin velmi vhodně přirovnává k vrásčitému kořeni, ke kůře jilmu nebo korkového dubu. Jeho trubičky měly v obvodu okolo 5—6 *cm*, některé i dvojnásob. „Rýhy jsou zřejmě resultátem tlaku, kterým působil na trubičku písek v té době, kdy její hmota byla ještě roztavena vysokou teplotou." Rozebíraje tu okolnost nálezu, že fulgurity na označeném místě se nalézají ve skupinách, Darwin vysvětluje to tím způsobem, že při úderu do země tvoří blesk několik větví.

---

[2]) W. Wicke, Direkte Beobachtung über Entstehung von Blitzröhren. Ann. der Physik und Chemie, 1859, Bd. 106, S. 158—159.

[3]) Ch. Darwin, Cesta po lodi Beagle. Geol. Trans., vol. II, p. 528. Nyní jsou tyto fulgurity chovány v Britském Museu v Londýně.

Zajímavé jsou nálezy fulguritů blíže Starcynova nedaleko města Olkusze v Polsku, o nichž víme z práce F. Roemerovy.[4]) Písek je tu sypký, našedle bílý. Fulguritové trubičky byly obklopeny až decimetr dokola pískem zbarveným světle hnědě (změnu barvy podařilo se mi docílit umělým vytvořením fulguritu ve žlutém písku). Tloušťka nalezených tu fulguritů kolísala od tloušťky ruky do síly tlusté bavlněné niti. Nejtenčí trubičky byly průhledné a velmi křehké. Příčný řez trubičkami byl brzy kruhový, brzy hranatý, brzy stlačený. Nejtenčí trubičky byly skoro vždy ideálně válcovité. Tlustší trubičky mají obyčejně nepravidelný drsný podélný hřeben. Sploštělé trubičky často náhle přecházejí v oblé. Tloušťka stěn fulguritů je proměnlivá. U trubiček šířky 3 *cm* bývají stěny asi 1—2 *mm*. V některých případech je tak tlustá, že vnitřní průměr rovná se asi špendlíkové hlavičce. Nezřídka se hlavní stvol rozvětvil a někdy byl rozdělen ve dví (srovn. fulgurit z Vigurovščiny u Kijeva, o kterém se dále zmiňuji). Nejdelší fulgurit zde nalezený měřil 219 *cm*. Byl zhotoven plán rozložení trubiček na prostoru skoro 2 hektarů. Na tom místě zaznamenáno 26 trubiček seskupených dle nákresu ve dva pásy směru *JZ—SV*.

R. W. Woodovi[5]) v East Hamptonu, Long Island poštěstilo se r. 1910 být svědkem úderu blesku do písku; pak vykopal fulgurit, tento „autograf blesku," jak praví. Byl vzdálen od místa, kde uhodilo, všeho všudy nějakých 15 *m*. Bylo to na mýtině nedaleko domu, kde bydlil. Úder byl provázen ranou podobnou výstřelu z děla. Před jeho zrakem mihl se oheň u povrchu země a zdvihl se sloup páry a dýmu asi 2 metry vysoký. Před tím celý týden pršelo a půda byla silně promoklá. Wood pozoroval tři místa široká asi ½ metru, pokrytá zvadlou travou. Ve středu jednoho takového místa vznikla díra o průměru 3 *cm* a vedle ní ještě jedna menší (asi přes ½ *cm*). Wood chtěl udělat odlitek fulguritu; roztavil asi 7 *kg* cínu a vlil jej do díry. Potom byl fulgurit vykopán, trubka rozbita a odlitek vnitřku byl podroben studiu tvaru. (Tento odlitek Wood nesprávně nazývá „umělým fulguritem“.) Při odkopávání fulguritu přišel Wood ve hloubce několika *cm* od povrchu zemského na postranní rozvětvení, které bylo spojeno s hlavní větví jednou nebo dvěma větvičkami. Kov nepronikl do tohoto rozvětvení. Délka odlitku byla přes metr. Odlitek byl zřetelně spirálovitě zakřiven po celé délce. Nejzřetelnější bylo to u jeho tenčího doleního konce. Průměr odlitku se zvětšuje až do 6 *dm* od povrchu, pak se zmenšuje směrem dolů (srovn. rozměry obvodu u kijevského fulguritu). Spirála tato jde podle Wooda ve směru hodinové ručičky (z leva na pravo) nebo, což je totéž, souhlasně se závitky šroubu. Z přiložené fotografie možno vidět, že výška závitu nezůstává stejná — nahoře je větší než dole (dle mého mínění je to způsobeno menší elektrickou vodivostí vrstvy písku ležící hlouběji).

---

[4]) L. Roemer, Ueber ein Vorkommen von Blitzröhren oder Fulguriten bei Starcynov etc. N. Jb. 1876, S. 33—40. Mikroskopickou strukturu těchto fulguritů popsal a zobrazil A. Wichmann v článku Ueber Fulgurite, Z. d. d. Geol. Ges. 1883. Bd. XXXV, S. 849—859. Srovn. správné poznámky Gümbelovy tamtéž 1884, Bd. XXXVI, S. 179—180.

[5]) R. W. Wood, Experimental Study of fulgurites. Nature. Vol. LXXXIV, London 1910, p. 70.

Za další zajímavá pojednání o nálezech fulguritů v písku a v pískovci u města Čigirina v kijevské gubernii vděčíme A. C. Rogovičovi.⁶) Našel je na Kamenné hoře nedaleko Čigirina. „Jak ve svrchních vrstvách písku ležících nad pískovcem, tak i v samých pískovcích nalezeny fulgurity různého průměru, barvou i lehkostí velmi podobné pemze.“ „Mají tvar čtyřhranný nebo nepravidelný, tloušťka jich se zmenšuje dle pevnosti půdy, kterou procházejí. V sypkém písku často nabývají bublinkovitého tvaru a skelného povrchu uvnitř; v pevných pískovcích se tyto trubičky ztenčují a nabývají tvaru kuliček na šňůře; jsou hned jednoduché, hned se rozvětvují, někdy slepě končí.“ „Na těch místech, kde ve směru fulguritů se naskytují trhliny, bývá jich povrch na značné ploše pokryt skelnou hmotou barvy nahnědlé.“ „Stopy různodobých úderů blesku můžeme vidět skoro na každém balvanu pískovcovém, vylomeném k výrobě žernovů.“ „Stopy dřívějších úderů blesku se snadno rozeznají podle hnědé matné barvy.“ „Trubičku, kterou si dovoluji ukázat, sebral jsem sám na tom místě, kde byl bleskem zabit kůň v minulém roce 1870.“

Gümbel zkoumal několik fulguritů z Libycké pouště⁷). Jsou dosti pravidelně kruhového obrysu s vnitřním průměrem 5—10 *mm* a průměrnou tloušťkou stěn okolo 1 *mm*. Jsou pokryty nepravidelně se střídajícími podélnými hřebínky a rýhami, které v celku sledují spirálný chod trubiček. Kromě toho na mnohých místech jsou stěny trubiček proraženy kruhovými otvory s okraji natavenými. Zcela nepravidelný vnější tvar mají tmavé, skoro černé trubičky fulguritové, rovněž z Libycké pouště. Domnívám se, že mohly vzniknout v glaukonitovém nebo magnetovcovém písku (takové černé fulgurity jsem získal uměle v glaukonitic-

---

⁶) A. Rogovič, О громовых стрелах или фульгуритах Каменной горы близъ Чигирина. Проток. 3. съезда Русс. Ест. в Киеве в 1871 г. Киев 1873.

⁷) Gümbel, Ueber die Bildung der Stylolithen und über Fulgurite. Zeit. d. deut. geol. Ges. 1882, Bd. XXXIV, S. 647—648.

kém písku). Šířka kanálku u nich dosahuje 3—5 *mm*, tloušťka stěn 2½—3 *mm*. Podélná žebra, pokrývající černé fulgurity, mají po celé délce rozšířeniny, připomínající sukovatou hůlku. Na příčném lomu je patrný paprsčitý sloh. Souhlasí s Ch. Darwinem a Hartingem,[8]) že fulguritová trubička in statu nascendi byla okrouhlá a většího průměru, ale potom ještě jsouc měkká smrštila se vlivem vnějšího tlaku kolem vzduchoprázdného prostoru, vzniklého průchodem blesku pískem. Tak také vznikla žebra. Tento výklad zdá se i mně pravděpodobným, ale je třeba jej doplnit názory G. P. Merrilla,[9]) W. S. Bayleye[10]) a F. Rutleye,[11]) kteří se domnívají, že hřebeny mohou vzniknout tím, že se elektřina rozbíhá stranou podle toho, jak se mění vodivost sousedního písku. Podle mého názoru však je to příčina podružného rázu. Hlavní příčinou vytvoření žeber je smrštění trubky v okamžiku vzniku; dle mého mínění dokazuje to, že hluboko ležící tenké trubičky bývají bez hřebenu a okrouhlé. Totéž se děje u tenkých trubiček, které obdržíme, necháme-li proskakovati jiskry pískem. Příčina je v tom, že tenké válcovité útvary pod týmž tlakem se tíže smršťují než tlusté; neboť je známo z fysiky, že poměrné zmenšení objemu dutého válce o vnitřním poloměru R_0 a vnějším poloměru R pod vnějším tlakem jest

$$\frac{\Delta V_0}{V_0} = \frac{5 - 4\sigma}{E} \cdot \frac{R^2}{R^2 - R_0^2} \cdot P,$$

kde σ jest koeficient Poissonův, E = modul Youngův.

Rutley studoval fulgurity z okolí Griquastadu v jižní Africe. Fulgurity jsou pískové, jak ve formě úlomků obyčejných trubiček, tak i ve tvaru nevelikých chumáčků téměř bez vnitřního kanálku. To se zřejmě shoduje s chumáčky, které vůbec nemají kanálku, o nichž se zmiňuje ve své práci G. P. Merrill: „Jejich tvar je podobný tomu, jaký dostane roztavená hmota vylitá ze lžíce na zemi.“ Já sám jsem také našel takové útvary (kapky se skelnými „pseudopodiemi“) ve fulguritových ukázkách z Vigurovščiny u Kijeva a myslím, že jsou to výtvory vzniklé tam, kam se rozstřikl písek po úderu blesku. Zajímavý je nález v Zankendorfu u Vídně (srovn. Gilbertovy Annalen, Bd. LXXIV, S. 213). Zde byla nalezena fulguritová trubička, končící se na hranici mezi pískem a podložní mokrou hlinou v naduřeninu s nesčetnými otvory. Další chod blesku byl vyznačen červenými nitkami, které pronikly do hloubky asi decimetru a také se rozšířily radiálně ve všech směrech v podobě jemných kořínků. Červená barva patrně tu vznikla místním zahřátím hlíny, neboť takové zbarvení můžeme vyvolat uměle ve hlíně vysokou temperaturou za přístupu vzduchu.

---

[8]) M. P. Harting, Notice sur un cas de formation de fulgurites et sur la présence d'autres fulgurites dans le sol de la Néerlande. Publié par l'Acad. Roy. Néerlandaise des Sciences. Amsterodam 1874.

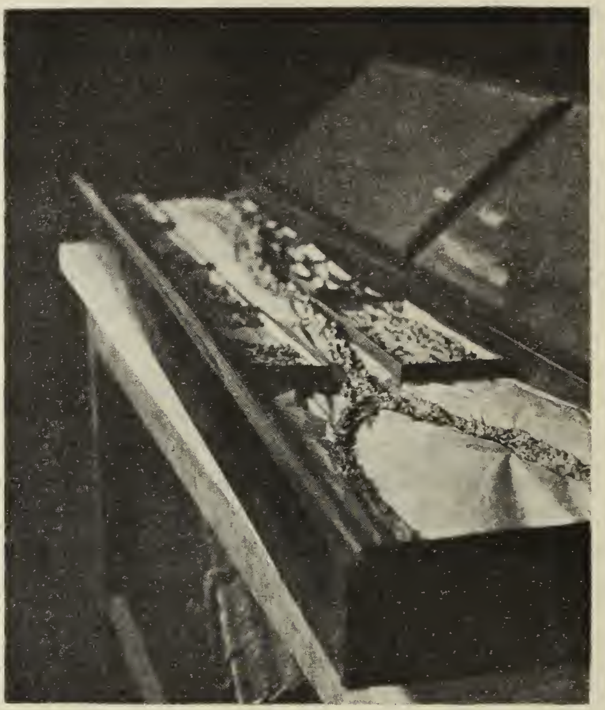
[9]) G. P. Merrill, On fulgurites. Proceed. of U. S. Nat. Mus. 1886, vol. IX, p. 83.

[10]) W. S. Bayley, A fulgurite from Waterville, Maine. Amer. Journ. of Sc., vol. XLIII, p. 327.

[11]) F. Rutley, On fulgurites from Monte Viso. Quart. Journ of Geol. Soc. XLV, p. 60—66, 1889.

Týž. On fulgurites from Griqualand West. Miner. Magazine 1894, X, Nro 48, p. 280, sq. 8 obr.

W. H. Hobbs[12]) popsal fulgurit ze hnědého písku z jednoho místa ve státě Wisconsinu. Zajímavé bylo, že fulgurit jevil nepochybný spirálný průběh, při čemž se točil s leva na pravo. Žebra pokrývající povrch fulguritu opětovala celkem tuto spirálu. Fulgurit tento je shodný s oním, který popsal Bayley z Watervillu, taktéž spirálně stočeným s leva na pravo. Spirálný průběh je velmi pěkně patrný na velkém fulguritu nalezeném v píscích druhé terasy Dněpru nedaleko Kijeva (blíže vesnice Vigurovščiny v osterském újezdu v černigovské gubernii). Tento fulgurit

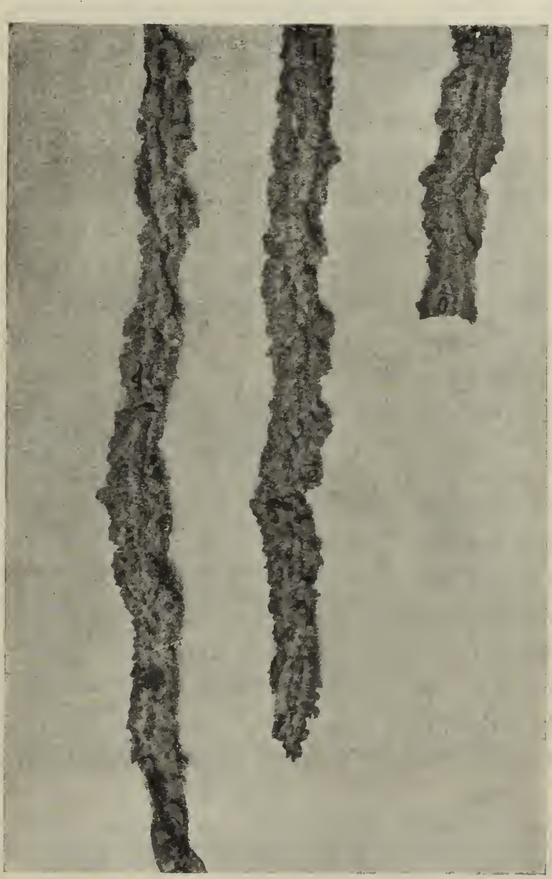


Obr. 1.
Celkový pohled na fulgurit z Vigurovščiny (okolí Kijeva). V krabičkách jsou menší úlomky fulguritů, sebraných na témže místě.

---

[12]) W. H. Hobbs, A spiral fulgurite from Wisconsin. Amer. Journ. of Sc. 1899, VIII, p. 17—20, s obrázky.

jest uložen v mineralogickém kabinetě kijevské university[13]) a byl r. 1903 demonstrován na jednom zasedání kijevské Společnosti přírodozpytců mým učitelem P. J. Armaševským, kterého bolševici zastřelili. Blíže však nebyl popsán. Tento fulgurit má hlavní stvol a dole dvě skoro stejné větve; spirála točí se s leva na pravo, t. j. tak, jak bývají obyčejně závity šroubků a jak do dneška jsme viděli u všech fulguritů na severní polokouli, u nichž byl pozorován spirálný ohyb.[14]) Tento nejdelší (není sice celý, ale je slepen z úlomků, jichž pořad dal se uchovati) a nejlepší ruský fulgurit (viz obr. 1. a 2.) má tyto rozměry: (měření provedl na mou žádost můj bratr V. N. Čirvinskij).



Obr. 2.
Povrch úlomků fulguritu z Vigurovščiny fotografovaných z blízka. Úlomky hlavního stvolu, počítaje shora, 0, 1, 2, 3 a 4.

---

[13]) Zde jsou uloženy úlomky tenkých, nezřídka oblých bezhřebenných fulguritů, nasbíraných taktéž u Vigurovščiny (viz na přiloženém obrázku; tyto úlomky leží v krabičkách vedle velkého fulguritu). Na těch trubičkách jsem stanovil speci-fickou váhu.

[14]) Na můj dotaz odpověděl L. J. Spencer, že fulgurity uchované v Britském Museu nejeví spirálného ohybu.

Délka fulguritu až k místu, kde se rozvětvuje (měření provedeno motouzkem, který sledoval záhyby fulguritu), je 125·5 *cm*; délka jedné tlustší větve 39 *cm*, druhé 40·5 *cm*. Jelikož těmito větvemi není fulgurit zakončen, jest celá jeho délka jistě větší než 160 *cm*. Váží asi 200 gramů.

Hlavní kmen.

	1. Nejtlustší horní konec hlavního kmene, od jeho konce	Celkový obvod (papír. proužkem)	Rozměry a tvar vnitřní světlosti fulguritové trubičky	Tloušťka stěn
	4 *cm*	8 *cm*	6 × 8 *mm* (průřez šestihranný)	1—1·5 *mm*
2.	11 *cm*	6·2 *cm*	6 × 9 *mm* (nepravidelný trojúhelník, udána výška a strana jeho)	1—1·5 *mm*
3.	20 *cm*	7·9 *cm*	neurčeny	neurčena
4.	38-40 *cm*	7·8 *cm*	4 × 7 × 8 *mm* (průřez nepravidelný pětiúhelník)	1—1·3 *mm*
5.	50 *cm*	6·7 *cm*	—	—
6.	60 *cm*	7·7 *cm*	—	—
7.	78 *cm*	7·2 *cm*	4 × 7 × 6 *mm* (nepravidelný trojúhelníkový průřez, udána strana a výška)	1·5 *mm*
8.	100 *cm*	7·0 *cm*	—	—
9.	110 *cm*	6·8 *cm*	—	—
10.	123 *cm*, t. j. ve 2 *cm* od vidlice	9·8 *cm*	—	—

Tlustší větev.

	Od začátku			
1.	2 *cm*	6·4 *cm*	—	—
2.	13 *cm*	4·8 *cm*	4·5 × 7 *mm* (tvar okrouhle trojúhelníkový)	1·3 *mm*
3.	20 *cm*	6·6 *cm*	—	—
4.	u dolního konce je opět rozvětvení	—	u jedné větvičky 3 × 4 *mm*, u druhé 2 × 4·9 *mm* (tvar průřezu nepravidelně trojúhelníkový)	1—1·2 *mm*

Tenčí větev.

1.	10 *cm*	3·6 *cm*	2·5 × 4 *mm* (průřez nepravidelně čtyřúhelníkový)	1 *mm*
2.	28 *cm*	3·0 *cm*	1·9 × 2 *mm* (průřez nepravidelně trojúhelníkový)	1—1·5 *mm*
3.	40 *cm*	2·9 *cm*	2 × 3·5 *mm* (průřez nepravidelně trojúhelníkový)	1—1·3 *mm*

Čísla značící rozměry obvodu fulguritové trubičky, aspoň čísla pro hlavní kmen, ukazují, jak se mi zdá, jakousi pulsaci, jejíž vysvětlení dlužno hledat v proměnlivosti a rozměrech bočních podélných žeber.[15]) Čím pak byl způsoben tento úkaz, nevím (příčin je tu zajisté několik a bude třeba je určiti experimentálně). Spirála hlavního kmene, t. j. horní části fulguritu, je asi třikrát více roztažena nežli spirála pobočních větví: v prvním případě jsou dva plné závity na 106 *cm*, ve druhém na 39—40 *cm* (srovnej analogické pozorování Woodovo). Veliká staženost spirály vysvětluje se zmenšením elektrické vodivosti písku. Na neštěstí bývají však fulgurity, ocitnuvší se ve sbírkách, jen pouhými malými úlomky. V Rusku mohu ukázat na takové příklady z nálezů.

V Donském museu v Novočerkassku mají úlomky pískových fulguritů z písčin u stanice Kazaňské v donském újezdu, v charkovské universitě úlomky z vesnice Kočetků ze zmijevského újezdu, v charkovské gubernii, nasbírané A. S. Fedorovským a na universitě moskevské jsou nevelké sbírky fulguritů nasbírané u řeky Oky v dunách muromského újezda profesorem A. P. Pavlovem. A. S. Fedorovskij sdělil se mnou (dopis ze dne 9. dubna 1921), že v Kočetkách vykopal na levém břehu řeky Severního Donce fulgurit asi metr dlouhý, ale potom ho nemohl z úlomků slepit dohromady. Také našel fulgurity blíže Zadoneckého dvorce ve zmijevském újezdě, v okolí vesnice Čerkasského Byškina v témže újezdě a j. Nejlepší exempláře nechal v zemi, chtěje je vykopati později s větší opatrností; ale do dneška to nemohl udělati. O nálezech fulguritových trubiček v píscích turkestanských je krátká zmínka v pracích prof. I. V. Mušketova; nalezl je též N. I. Andrusov v zakaspické oblasti.

Specifická váha písečných fulguritů kolísá od 2·35 do 2·46, t. j. leží mezi sp. hmotou křemene (2·65) a křemenného skla (2·2) podle Gümbela. U tenkých trubiček fulguritových z Vigurovščiny našel jsem váhu nižší: 1·94 při 11° *C*. Zřejmě bylo to způsobeno četnými póry ve stěnách fulguritů.[16])

Chemicky jsou fulgurity z písků více nebo méně čistý kysličník křemičitý (91·23—99%). Sklo je úplně isotropní s exponentem lomu $n_{Na} = 1{\cdot}4589$[19]), někdy se šmouhami kávové barvy (takové šmouhy našel jsem i já ve fulguritu z Vigurovščiny) a s větším nebo menším množstvím pórů brzy mikroskopických (odtud nabývá vzhledu emailu) nebo i viditelných prostým okem. Kávové šmouhy aspoň ve fulguritu vigurovščinském vysvětluji si roztavením zrníček magnetovce, přimíšeného v malém množství k písku.

---

[15]) Tento úkaz mohl býti lépe kvantitativně vyjádřen, kdybychom zvážili stejně dlouhé úlomky fulguritu, vzaté po celé jeho délce po pořádku. To však bohužel nebylo možno učiniti.

[16]) Váha byla 6·1268 gramu. Celkem bylo vzato 18 úlomků trubiček, délky 2—3·5 cm o průměru 3—5 mm. Určení provedeno metodou hydrostatickou, vzduch vypuzen vařením vody.

Krystalické a usazené horniny na vrcholcích hor bývají roztaveny a často mají díry do jisté hloubky od úderů blesků. Heim[17]) na jednom vrcholku ze skupiny Sv. Gottharda odstranil všechny stopy roztavení způsobeného bleskem, a navštíviv po několika letech tentýž vrcholek, nalezl tam znovu stopy natavení.

Zvláště podrobně popsal případy natavení andesitu na vrcholu Malého Araratu H. Abich,[18]) ale rozsah této stati nedovoluje širšího výkladu. Nejnověji uveřejnil pozorování o fulguritech písečných saharských a skalních pyrenejských A. Lacroix.[19])

Zajímavo je, že blesky čárové nebo jiskrové, vytvářející při úderu do země fulgurity, mají spirálný chod v atmosféře. (H. Mache a E. Schweidler, Die atmosphärische Elektrizität, 1909, S. 217.) V důsledku perspektivního zkreslení tím právě úkazem můžeme vysvětliti podivuhodný pohyb některých takových blesků (Schleifenblitze). Smyčky této nepravidelné spirály jsou ohromné ve srovnání s velikostí spirálných smyček písečného fulguritu. Tuším, že můžeme mluvit o ,,vzdušném fulguritu" nebo ,,atmosférickém fulguritu." Příčina je v tom, že při průchodu blesku vzduchem vzniká trubka s tak silným zředěním uvnitř, že v ní nastává výboj podobný jako je tomu v Geisslerových trubičkách nebo při severní záři. Poprvé byl tento zjev pozorován fotograficky na blesku Kaysrem a B. Waltrem, při čemž prvý z nich upotřebil fotografické komory rychle se otáčející.[20])

Takový vzdušný fulgurit je charakterisován nejen velmi malým vnitřním tlakem plynu, ale i jeho temperaturou, stupněm ionisace, chemickými proměnami (třaskavý plyn, kyselina dusičná), je schopen existence ovšem jen po velmi krátký čas. Tím zajisté se vysvětluje, že někdy jako stopa po blesku v atmosféře může zůstati velmi krátce trvající světelné záření. Výbuch třaskavého plynu, vzniklého ve vzdušném fulguritu, je dle Trowbridge příčinou hromu.

Uhodí-li blesk do stromu, obchází nezřídka kmen spirálně; o tom dovíme se více z prací jednajících o chorobách rostlin (poranění stromu), zvláště v krásné práci P. Sorauera.[21]) Spirálný chod blesku po stromě vysvětluje spirálním rozložením rostlinných vláken. Na výkresu v jeho práci je zobrazen dub poražený bleskem. Dle vzhledu byl vysoký asi 23 *m*, a úder podle obrázku, kde začíná spirála, stihl jej asi v 16 *m* výšky od země. Na těchto 16 *m* připadají tři plné závity bleskové spirály. Jinými slovy délka závitu je o něco větší než 5 *m*. Směr spirály jde s prava na levo. Jako dítě viděl jsem v Petrovsko-Razumovském u Moskvy velmi vysoký krásný smrk, poražený bleskem, který postupně zasýchal a na jehož povrchu bylo dobře vidět žlutou stuhu pravidelné spirály, kde blesk strhl kůru. Stejnou spirálu nalezl V. K. Čerkas (soukromé sdělení) na jednom místě poltavské gubernie na vlašském topolu sraženém bleskem. Strom padl a zůstal z něho kmen vysoký asi 1·8 *m*. V tom místě byl kmen jakoby uříznut a roztřepen. Domnívám se, že toto sříznutí bylo způsobeno tak, že v té výši byl uzel odražené vlny elektrické (stojatá vlna).

---

[17]) Alb. Heim, Notizen über Wirkungen des Blitzschlages auf Gesteine. Jahrb. d. S. A. G., XXI, S. 342—357, s obr., 1886.

[18]) H. Abich, Sitzber. d. Akad. der Wiss. Wien 1876, Bd. LX, I. Abt., S. 155.

[19]) Al. Lacroix, Bull. soc. franç. de Minér. XXXVIII (1915), 188—198.

[20]) Walter, Annalen der Physik 1906, Bd. XIX, S. 1042, tab. V.

[21]) Sorauer, Handbuch der Pflanzenkrankheiten, Berlin 1909, Bd. III, S. 479—497. Tam je i příslušná literatura. — Stahl, Die Blitzgefährdung der verschiedenen Baumarten. Jena 1912.

Navrhuji následující klasifikaci fulguritů:

1. fulgurity s velmi krátkou dobou trvání (nefixované),
   a) fulgurity atmosférické,
   b) fulgurity vodní, sněžné a ledové,
2. fulgurity trvající neurčeně dlouhou dobu (fixované),
   a) fulgurity organicke (rostlinné a živočišné),
   b) fulgurity písečné,
   c) fulgurity kamenné,
   d) fulgurity hromosvodové.

V této klassifikaci nacházíme užší rozdělení, o kterém výše nebylo řeči. To vyžaduje jistého vysvětlení. Fulgurity vodní vznikají při úderu blesku do vodní nádrže, zvláště do jezera nebo do moře. Zde po jeho průchodu vznikají elektrolytické zjevy v rozpuštěných solích, což může být v laboratořích pozorováno v roztoku lakmusu. Prostor zasažený ranou je místem, kde vznikají vlny šířící se na všechny strany ve vodě. Sněžné a ledové fulgurity mohou se vyskytovat zvláště v horách pokrytých sněhem a ledovci. Takové fulgurity patrně nalezl V. I. Vorobjev v létě r. 1903 na hoře Šugus na Kavkaze. K fulguritům organickým dlužno počítati stopy blesku na zasažených stromech, lidech i zvířatech; tyto případy podrobně popisuje Flammarion v knize „Atmosféra" (fulgurity hromosvodové jsou příklady blesků, které sjely po hromosvodech, při čemž vznikají mechanické poruchy v budovách, roztavení kovových drátů, přenesení kovů rozprášených atd.).

Znalosti o fulguritech logicky se spojují s umělým jich vznikem a s výzkumem elektrických výbojů vůbec. Tomuto předmětu je věnována ohromná literatura ve fysice a v části meteorologie o atmosférické elektřině. Výboje se teď nejenom fotografují (i blesky), ale i studují pomocí otáčivých zrcadel nebo otáčivé fotografické komory (Feddersen, Rood, Trowbridge, Schmidt, Walter a j.). Na fotografických snímcích je vidět, že dlouhá jiskra nevzniká najednou, ale prokládá svou cestu nárazy, při čemž částečné výboje postupně se prodlužují, majíce ráz trsů. Jelikož úkaz nenastává najednou, je viděti na snímkách, že každá následující fáze ve vývoji jiskry jeví se posunuta vzhledem k fázi předcházející. Pozoruhodné je, že předběžné výboje v hlavním svém kmenu jsou přesně rovnoběžné, t. j. ubírají se toutéž cestou, kterou jde hlavní jiskra výsledná. (To jest nadbytečným důkazem, že vskutku existuje vzdušný fulgurit, jenž předem určuje chod hlavního výboje.)

W. Holz[22]) ukázal, jak možno pod mikroskopem sledovat chod jiskry. Objevil, že jiskra, která prorazila 20—30 *cm* dlouhý masivní skleněný válec o průměru 5—10 *cm* podél jeho osy, měla ve vzduchu délku 30 *cm*. Aby prorazili skleněnou desku tlustou 1·7 *cm* svojí metodou, musili Kiessling a Walter použíti jiskry, která měla ve vzduchu délku 25 *cm*.[23]) Jejich pokusy ukázaly, že nejnepatrnější trhlinky na povrchu dielektrika usnadňují průchod jiskrám. E. Voigt[24]) shledal, že: 1. slída při tloušťce 0·2—1 *mm* se dá proraziti při 25—40 kilovoltech, 2. obyčejné sklo tlusté 1—5 *mm* při 40—90 kilovoltech. Velmi zajímavé je, že Kiessling a Walter při svých pokusech pozorovali, že dírka způsobená jiskrou někdy se docela zavře (zataví), takže ji nelze pak vůbec najít.

První pokusy o umělý vznik fulguritů v sypkých hmotách, pokud vím, byly popsány r. 1828 v práci Beudanta, Hachetta a Savarta.[25]) Působili jiskrami nejsilnější baterie v Paříži na drobně roztlučené sklo umístěné do prohlubeniny v cihle. Příměsí kuchyňské soli, snižující bod tání skla, vznikly trubičky větších rozměrů. Jedna z nich, zhotovená z rozbitého skla, dosáhla délky 25 *mm*, zevní její průměr u jednoho konce byl 3 *mm*, u druhého 1½ *mm* a prostřední kanálek ½ *mm*. Když přidali více soli ke sklu, dostali trubičku 30 *mm* dlouhou o průměru 4½ *mm* s kanálkem 2 *mm*. Pokusy s živcem a křemenem, rozemletými na prášek, byly bezvýsledny.

Rollmann popsal r. 1868 svoje pokusy o vzniku trubiček v sirném květu, k němuž někdy přimísil i jiné látky (železné piliny, kysličník železitý, kysličník rtuťnatý a j.)[26]) Vyrobené trubičky měly délku 8 *cm*, ale vždycky se rozlámaly na malé kousky, když je vyndaval ze skleněné trubičky nebo ze sklenice, ve kterých konal své pokusy. Trubičky byly oble nebo hřebenité a byly nepravidelně zakřiveny. S menším zdarem činil pokusy s kalafunou, stearinem a některými jinými látkami.

O mnoho později R. W. Wood zahrabával uhlíky obloukové lampy a dostal krátké tlusté trubičky se spirálným chodem. Tyto pokusy popsal velmi stručně r. 1899 W. H. Hobbs v práci výše uvedené. Podotýkám, že zde poprvé byl vysloven názor, že spirálné zahnutí fulguritů vzniká účinkem magnetického pole zemského (účinek magnetu na pohyblivý proud, jakým se jeví býti blesk). Tento duchaplný výklad, potřebující ještě důkazu, je-li správný, mohl by podle mého mínění vysvětlit vznik spirály fulguritů různého směru na severní a jižní polokouli zemské, jak tomu bývá i u cyklonů a anticyklonů. Ovšem magnetické pole zemské samo o sobě je příliš slabé, a tudíž můžeme vytvoření spirály vysvětlovat pravděpodobně vzájemným působením statického a dynamického pole vytvořeným bleskem samým: zde vznikají mohutná pole magnetická. Je však také možno, že ohnutí bývá způsobeno prostě nehomogenitou prostředí.

---

[22]) W. Holz, Sitzb. Akad. d. Wiss., Berlín 1876, Pogg. Ann. 1867, Bd. 130, S. 121.

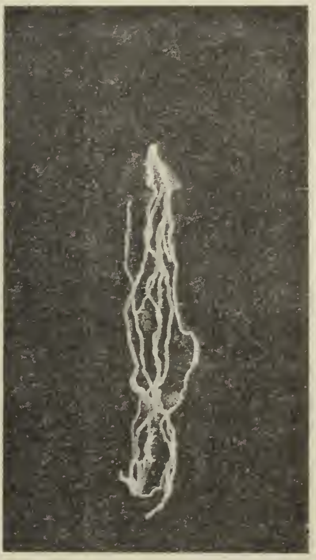
[23]) J. Kiessling und W. Walter, Ueber die elektrische Durchbohrung eines festen Dielektrikums. Ann. d. Physik 1903, Bd. XI, p. 570—588.

[24]) E. Voigt, Ann. d. Physik 1903, Bd. XII.

[25]) Beudant, Hachette et Savart, Ann. de Chimie et de Physique, 1828, t. 37, p. 319—321.

[26]) Rollmann, Pogg. Ann. Bd. 134, s. 605—615.

R. 1905 jsem publikoval práci o svých pokusech o umělém vzniku fulguritů.[27]) Pokusy byly prováděny v elektrotechnické laboratoři kijevského ústavu techniky za laskavé účasti A. V. Krukovského. Střídavé proudy vysokého napětí, jichž jsme používali, měly 60—80 tisíc volt; spojení trvalo několik vteřin; při každém pokuse dělalo se obyčejně několik takových spojení. V první serii pokusů vzal jsem bílý křemitý písek středního zrna (průměr zrn 0·1—0·15 *mm*). Nejzdařilejší byl pokus, při kterém se rozestřel písek na tlustou skleněnou desku ve val vysoký asi 5—6 *cm* a dlouhý 15—20 *cm*. Elektrody ve formě drátů se zasunuly do obou úzkých krajů valu tak, aby se nedotýkaly skla a proud mohl jíti směrem podélné osy. Ukázalo se opravdu nevyhnutelným smočit zlehka hřeben valu vodou (vodivá cesta), jelikož v opačném případě nastával klouzavý výboj po skle a tu se vytvořila ve skle rýha naplněná jakýmisi perličkami z roztaveného skla (srovn. údaje Bonneyovy u fulguritů andesitových z And), k nimž se přitavily sousední části písku a jen zřídka kdy vznikl trubkovitý fulgurit z čistého písku. V prvním případě vznikl rozvětvený fulgurit, jehož větve se scházejí v místech, kde proud vchází a vychází. Na skleněné destičce vzniká fulguritová síť, která je ke sklu přitavena jen na několika málo místech.



Obr. 3.
Umělý písečný fulgurit.

Tyto umělé písečné fulgurity jsou až k nerozeznání podobny přirozeným. Kromě oblých tenčích větviček (trubiček) bývají i tlustší větve s žebry. Obojí mají spirální chod. Největší tloušťka hranatých trubiček je 4 *mm*, obyčejná tloušťka oblých 1—1·5 *mm*. Sem tam bývají trubičky rozšířeny asi tak, jako křečovité žíly. Barva vnější stěny fulguritů je našedle bílá, email, kterým jsou uvnitř potaženy, je mléčně bílý. Povrch i vnitřek tohoto emailu vykazuje bublinky, výsledek to účinku vodních par. Největší fulgurit, který jsme dostali, vážil asi 2 gramy a měřil po délce 14 *cm* (viz obr. 3.). Pokud jde o písek, ve kterém se vytvořily fulgurity, nebylo nijakých změn v jeho hmotě. Když jsme nechali procházeti jiskry za stejných okolností pískem okrově žlutým (průměr křemenných zrn asi 0·03—0·5, zřídka 1 *mm*), dostali jsme fulgurity čistě bílé; k jejich bílému povrchu přitavila se zrna křemenná, tu žlutá, tu zčervenalá; takovou změnu barvy písku v blízkosti fulguritu pozoroval Roemer (viz výše). Zelený glaukonitový písek (průměr zrn 0·15—0·2 *mm*, zřídka 0·5 *mm*) dal černé jiskřící se fulgurity (srovn. tmavé fulgurity popsané Gümbelem z Libycké pouště). Změny barvy ani v nejbližším okolí fulguritu jsme nepozorovali. Interesantní je, že pokusy s práškovou chemicky čistou kyselinou křemičitou i práškem typického lössu daly výsledek záporný (tento fakt je třeba uvésti v souvislost s tím, že ve hlinité půdě fulgurity zřídka se vyskytují a bývají špatně vyvinuty). Tento zjev nelze vysvětliti tak chemickým složením použitých látek, jako spíše způsobem jich agregátního seskupení, drobností zrna), které má velkou úlohu.

---

[27]) P. N. Čirvinskij, Оъ искуственных фулгуритах. Записки Кіевского Общества Естествоиспытателей 1905, том XIX, стр. 139—144.

Otázkou umělých fulguritů zabýval se v souvislosti s pokusy výše zmíněnými můj učitel fysiky I. I. Kosonogov. On sám experimentoval s rozmělněným sklem a křemitým pískem smíšeným s kalafunou. V posledním případě dostal tlusté nepravidelně zahnuté trubičky s velmi malou světlostí, několik *cm* dlouhé.

Tyto fulgurity byly r. 1904 uloženy do sbírek mineralogického kabinetu kijevské university a nebyly specielně popsány. Prof. Kosonogov dělal pokusy v elektromagnetickém poli, chtěje objasnit vztah mezi účinkem pole a spirálným stočením fulguritů. Naprosto bezpečně nebylo možno tento vztah stanovit, ačkoli možnost jeho nepopírá.²⁸)

R. 1909 byly publikovány pokusy o umělém vzniku fulguritů D. Deane Butcherovou.²⁹) Bohužel však její práce, odhalující malé znalosti literatury o tom předmětu, ukázala se slabá i se stránky experimentální: měla po ruce toliko baterii 12 leydenských lahví a mohla tedy dostat jen trubičky velmi nepatrné (ne větší než 6—9·5 *mm* na délku) v takových snadno tavitelných látkách jako je kuchyňská sůl, borax, kaučuk, cukr, pečetní vosk a směs skelného prášku s kuchyňskou solí. Špatné, od ruky kreslené obrázky fulguritů umělých i přirozených illustrují práci; jejím cílem bylo ukázat správnost tvrzení jednoho z prvých badatelů o fulguritech doktora Fiedlera³⁰), vysloveného r. 1817, že massivní, tlustostěnné fulguritové trubičky tvoří se kladnou elektřinou, a tenké válcovité, skelné elek-

---

28) Na tyto pokusy upozorňuji ve své knize, Искусственное получение минераловъ в XIX. столетии, Kijev 1903—1906, str. 487.

29) Dorothy Deane Butcher, Experiments on artificial fulgurites. Proc. Phys. Soc. XXI, 1909, p. 254—260, 4 tab. London.

30) Karl Gustav Fiedler, Über die Blitzröhren und ihre Entstehung. Gilberts Ann. Vol. LV, S. 121—164, 1817.

třinou zápornou. Tuto myšlenku odůvodňoval Fiedler tím, že v massivních tlustostěnných trubkách byly stopy radiální struktury upomínající na Lichtenbergovy obrazce. Pokusy Butcherové nedovolovaly stanovit v rázu trubiček nějaký rozdíl mezi kladnými a záporným polem, z čehož ona dělala závěr o nesprávnosti i samého tvrzení Fiedlerova. V práci jsou vysloveny i všelijaké jiné banální vývody, předpoklady a dosti podrobně popsány potíže při pokusech, které se jí stavěly do cesty.

Konče svou nevelkou monografii o fulguritech, nemohu nevyslovit přání, aby těmto zjevům byla věnována větší pozornost se strany osob pracujících v různých oborech vědních, aby byly vykonány experimentální výzkumy svými rozměry, přesností a všestranností důstojné věku elektřiny.

Leden 1922.

Novočerkassk,
kabinet užité geologie a mineralogie
Donského technického ústavu.

O nálezu ryzího arsenu v Chodském dole (Vladikavkazský okruh).

Napsal

P. N. Čirvinskij.

(Předloženo dne 27. ledna 1922.)

Chodský důl, na němž se pracuje na téže žíle, jako na známějším Sadonském, leží o něco k SV od tohoto[1]). Proto nutno před touto zprávou předeslati zmínku o výskytu arsenu vůbec na dole Sadonském.

První zmínka v literatuře o ryzím arsenu je u S. S. Gembického (1916, l. c. str. 31): „Ryzí arsen nalezen náhodou v kolekci sebrané na S. dole studentem Hornického Institutu v Jekatěrinoslavi L. N. Plameněvským, a vyložiti podmínky jeho výskytu bude mojí úlohou příště.“ Podle soukromého sdělení Gembického mohu doplniti, že ukázali G. i místo v dole, odkud ukázka byla vzata, ale bylo už nepřístupné pro sesutí. Inž. L. A. Lurje, jenž pracoval ve vladikavkazské huti, kam posílali sadonské rudy, dokázal arsen i antimon v rudách zinkových i olověných. Hutnická zkušenost učí, že se arsen soustřeďuje hlavně ve sfaleritu, antimon v galenitu, leč neznámo, jak jsou chemicky vázány.

A priori sdělení to jest úplně pravděpodobno, neboť v obvodě soutěsky Ardonské, tak bohaté rudními výskyty typu Sadonského, jsou známy nálezy realgaru, arsenopyritu, antimonitu i berthieritu na žilách; podle analogie s druhými lokalitami i hlavní koncentrace arsenu ve sfaleritu, jenž v Sadoně je bohat železem, má asi podobu drobně vtroušeného arsenopyritu. Co se týče antimonu v galenitu, jest přítomen pravděpodobně jako některá ze sirných solí olova nebo stříbra.

Ukázky ryzího arsenu z Chodského dolu s nerosty jej provázejícími (kalcitem, sfaleritem a galenitem) dodal do ústavu pro užitou geologii a pro mineralogii při Donském Polytechnickém Institutu profesor hornictví N. S. Uspenskij, jenž navštívil důl Sadonský a Chodský v květnu 1921. Důlní P. M. Nikonov, jenž dříve sloužil na Urale, odevzdal mu ryzí arsen tak určený.[2]) Byl nalezen dosud jen v nedávno založené štole č. 15, vedené přímo po výchoze rudním, zlehka oxydovaném. Konečné průčelí štoly je v žilné hornině, ale bez rud. Podle mínění prof. Uspenského bylo vytěženo rudy olověno-zinkové mnoho, ale nyní se pracuje toliko ve stropu, asi 10½ *m* nad úrovní štoly; vybírají upadající odmrsk rudy, ke 2 *dm*, ve vápenci; v žíle se vyskytuje i křemen. Vtroušený arsen má tvar obyčejně ledvinitý. Ústí štoly č. 15 leží o 428·8 *m* nad Alexandrovskou štolou dolu Sadonského. Na nalezišti Chodském jsou důlní práce i ještě výše položené, ale ty neobsahují arsenu (č. 19 je 540 *m* nad Alex. št.). Fakt, že arsen se nachází ve svrchní části žilného tělesa, odpovídá obvyklému rázu výskytu tohoto nerostu na epigenetických ložiskách. Podmínky vzniku svrchní části Sadonsko-Chodské žíly patrně byly poněkud odlišné od podmínek panujících ve vlastním nalezišti Sadonském, neboť výchozy Chodské nacházejí se už nejen v území žuly, nýbrž i hornin dacito-rhyolithových (podle V. M. Dervizové) čili granulitů (podle S. S. Gembického.)[3])

---

[1]) S ovn. geologickou mapku v článku S. S Gembického, „Садонское месторождение серебро-свинцовых и цинковых руд в Северном Кавказе, Южный Инженер май—июнь 1916.

Nalezený arsen jsou především dva skoro stejné úlomky rozměru 2 × 2·5 × 6 *cm* (jeden vážil 75 *g*), jež mi odevzdal prof. Uspenskij. V jednom z nich nacházejí se malé nepravidelné partie čistě bílého neprůhledného kalcitu, druhý jich nemá a bylo ho použito k určení hustoty. Druhé dvě ukázky obsahují arsenu značně méně a vedle hojného kalcitu i galenit a sfalerit. Konečně velký kus bílého kryptokrystalického kalcitu s plochými prohlubinkami, podobnými piezoglyptům (regmaglyptům) meteorických železů a měřícími až 5—6 *cm*, jest pokryt korou arsenu s velmi ploše ledvinitým povrchem. V některých exemplářích arsenu možno viděti, že se rozpadá na nepravidelné, čtyřploché i pětiploché kusy, jako by vysycháním utvořené. V takovýchto trhlinkách bývají žilky vápencové. Všecko to činí pravděpodobným, že arsen se vyloučil zprvu koloidální (jak na to poukázal V. I. Vernadskij).

Zevně se podobají naše ukázky arsenu ze Schneeberka v saských horách Krušných. Kousky jsou celistvé, černé, bez lesku, ale na čerstvém lomu mají šedě olověnou barvu a jeví sloh jemnozrnný. Šedočerný náběh, prošed s počátku stadiem zlatě hnědým, vzniká na kavkazských exemplářích rychleji než na schneeberských, na př. za 4—5 dní při velmi suchém a teplém počasí, kdy na schneeberských ukázkách zemdlení lesku bylo jen slabě patrné. Jest možno, že úkaz ten souvisí s vyšším stupněm krystaličnosti u arsenu schneeberského. Lupou nebo mikroskopem můžeme pozorovati lesk a drobně krystalický sloh i na kouscích již naběhlých, jelikož kysličník jest rozložen nepravidelně. Na čerstvém lomu lze stanovit velikost zrna mezi 0·03 a 0·06 *mm*. Zřetelná je štěpnost (0001), podle níž na lomu jest viděti jaksi lamelární sloh; méně zřetelna je štěpnost podle $(01\bar{1}2)$. Na čerstvém lomu arsenu schneeberského pozorujeme zcela týž obraz, jenom velikost zrn není tak stejnoměrná a dosahuje někdy až 0·2 *mm*.

---

[2]) Jak známo, ryzí arsen byl nalezen dosud jen jednou na Urále v Bogoslovském dole, sr. E. S. Fedorov a V. V. Nikitin, Богословский горный округъ, Petrohrad 1901, str. 14.

[3]) Srovn. K. I. Bogdanovič, č. 3, „Серебро, свинец, цинк“ ve IV. dílu „Естественные производительные силы России“, Полезные ископаемые, Petrohrad 1918, str. 34—35.

Tvrdost arsenu chodského odhaduji na 3—3½; ukázky naše i schneeberské rýpají snadno štěpné plochy islandského vápence, ale přirozené plochy (0001), $(10\bar{1}0)$ a $(01\bar{1}2)$ kalcitu andreasberského vůbec ne, klencové plochy kongsberského stěží.[4] Vryp je tmavošedý, skoro černý. Hustota = = 5·78, určena hydrostaticky na 76 *g* hmoty při 29^0 C; je to tedy normální arsen a ne arsenolamprit, pro nějž se udává tvrdost 2 a hustota 5·3—5·5.

Při zahřívání v zavřené rource obdrží se drobně krystalický nálet šedý při samé průbě[5]), dále proužek nahnědlý s barvami náletovými a ještě dále tmavošedé neprůhledné zrcadlo „amorfního" arsenu. Všecky tyto nálety zahřívány snadno těkají. Při zahřívání v pincetě v okysličujícím plameni těká průba a ucházejí bílé páry česnekově páchnoucí, ale nezapaluje se, jak jest význačno pro arsenolamprit. V dusičnanu stříbrném pokrývají se kousky arsenu dendritickou korou stříbra. Antimon, vizmut, stříbro i zlato obvyklými kvalitativními metodami nedokázány; železo je přítomno ve stopách.

Kalcit, jenž provází arsen z Chodského dolu, je hrubozrnný (často 1, ale též až 3—4 *cm*); štěpné plochy bývají zlehka prohnuté. Dvojčatné rýhování je patrno zpravidla jen lupou. T = 3. H = 2·74 při 28^0 (hydrostaticky určeno na 21·58 *g*). S tím souhlasí výsledek rozboru:

CaO	53·50
FeO	2·73
MnO	—
MgO	0·06
BaO, SrO	—
CO_2 vypočteno	43·77
	100·06

čili

$CaCO_3$	95·54
$FeCO_3$	4·40
$MgCO_3$	0·12
	100·00

---

[4] Jak známo, jeví kalcit velké rozdíly tvrdosti v různých směrech. Podle G. de Götzena (Riv. Min. Crist. XXVI, 1901) jedna odrůda kalcitu bleiberského má tvrdost kazivce.

[5] Na těchto krystalcích možno rozeznati spojku dvou klenců; hojná jsou dvojčata, jaká zkoumal G. Rose (v. Hintze, Handb. d. Min. I. 109).

Kvalitativní zkoušky kalcitů z dolu Sadonského taktéž daly dosti mnoho železa a velmi nepatrné podíly hořčíku. Kalcit ten je obyčejně šedobílý, zlehka nahnědlý nebo nazelenalý od příměsi chloritu, zahříván jsa černá.

V Novočerkassku, v listopadu 1921.

Кабинет прикладной геологии и минералогии
Донского Политехнического Института.

Morfologické a fysikální vlastnosti zeuneritu.

Podává

Dr. B. Ježek v Příbrami.

(S 1 obr. v textu.)

(Předloženo dne 27. ledna 1922.)

V mineralogické sbírce vysoké školy báňské v Příbrami vystaven jest zeunerit z dolu Weisser Hirsch u Schneeberku v Sasku, který vyniká velikostí i poměrnou dokonalostí krystalů, dosahujících i ½ *cm* délky. Protože morfologické vlastnosti tohoto vzácného nerostu byly zkoumány již před delší dobou, a z optických vlastností uvádí se jen, že jest zeunerit opticky jednoosý, negativní, měřil jsem několik krystalků goniometricky metodou dvojkruhovou a vykonal i některá zkoumání optická.

Podkladem jest velice zřetelně břidličnatá, značně zkřemenělá hornina. Podle Müllera [1]) jsou schneeberské žíly vyplněny mnohdy úlomky sousedních hornin, někdy zkřemenělých, často též v břidličnatý, rozmačkaný, hlinitý „výškrab" zvětralých. V našem případě jde patrně o podobnou horninu sousední, bezpochyby o přeměněný fylit. Podklad sám jest proniknut světle rezavým hydroxydem železa, který též udává celkovou barvu vzorku. Mezi tvrdé vrstvičky proniká mnoho tmavozelené látky místy zřejmě krystalické, jež kvalitativně odpovídá též zeuneritu.

Na podkladu sedí větší i ½ *cm* dlouhé ostře pyramidální krystaly zeuneritu tmavě smaragdově zelené a na pohled neprůhledné. Jsou to krystaly jednodušší, většinou jen kombinace základní pyramidy druhořadé s nevelkou plochou spodovou. Vedle nich jsou tu krystaly malé, kolem

---

[1]) H. Müller, Der Erzdistrikt von Schneebergim Erzgebirge. Cottas Gangstudien III, 1860.

1 *mm* dlouhé, stejně pyramidálního habitu, ale někdy pěkně průhledné a vždy bohatší plochami.

Že jde o zeunerit, bylo dokázáno shodou měření s nejlepšími dosavadními, a i chemicky zjištěním přítomnosti mědi, uranu, arsenu a vody.

Protože jsou morfologické poměry zeuneritu dosud nejasné, mohl jsem přijmouti z měření v literatuře uváděných pouze měření Weissbachovo[2] a Goldschmidtovo[3] pyramidy (011), jež souhlasí s mým velmi dobře:

	Weissbach 1877:	Goldschmidt 1899:	Ježek 1922:
001 : 011 =	71°3′	70°52′	71°00′.

Zeunerit jest charakteristicky tetragonální jak morfologicky, tak podle štípatelnosti i podle optických vlastností. Vzal jsem uvedenou pyramidu zastoupenou na každém krystalu plným počtem ploch vždy nejrozsáhlejších a nejlepších za základní pyramidu druhořadou 01 (011) a vypočetí elementy z úklonu 001 : 011 = 71° 00′:

$$p^0 = 2'9042\,, \qquad a : c = 2'9042\,.$$

Goldschmidt l. c. upozorňuje na isomorfii s trögeritem a uvádí pro ni: podobnost tvarů a štípatelnosti a rovnoběžný srůst obou těchto nerostů. Kdybychom z Goldschmidtovy prvořadé pyramidy (111) trögeritu učinili druhořadou (011), byla by podobnost úhlů a elementů ještě větší:

	Trögerit (Ježek):	Zeunerit:
	$a : c = 3'053$	$a : c = 2'904$
001 : 011	71°52′	71°00′
: 111	65 9	(64 2)

Ostatně upozorňuji, že Goldschmidt měřil u jednoho z pěti krystalů trögeritu úklon 001 : 011 též 71°00′.

Měřením pěti malých krystalků zjistil jsem přítomnost těchto tvarů, jež pokládám za docela zajištěné:

o 0 (001), *n* 0 (010), *d* 01/3 (013), *y* 01/2 (012), *P* 01 (011) *i* 02 (021).

Mám za to, že jest všechny ostatní tvary uváděné v Gdt. Indexu III., 1891 na str. 329 a ve Winkeltabellen 1897 na str. 371 škrtnouti a čekati nejvýše na jejich potvrzení. Předem všechna udání přejatá z Lévyho,[4] protože není možno dnes zjistiti, měřil-li zeunerit. Goldschmidt sám uznává nutnost takové revise.

---

[2] A. Weisbach, Zeitschr. Kryst., 1877, 1, 394.

[3] V. Goldschmidt, Über Trögerit etc. Zeitschr. Kryst., 1899, 31, 470.

[4] Lévy. Descript, 1837, 3, 291.

K identifikaci tvarů poslouží přehled, v němž jsou u všech tvarů uvedeny symboly, a u tvarů, které autor pozoroval, též ještě jeho signatura a teoretická hodnota posičního úhlu ρ:

Ježek $c = 2'904$			Weisbach 5) $c = 2'912$			Schrauf 6) $c = 1'250$		
Sign.	Symb.	ρ	Sign.	Symb.	ρ	Sign.	Symb.	ρ
	0 1/7		*z*	0 1/7	20°36′		0 1/3	
d	0 1/3	44° 4′		0 1/3			0 7/9	
y	0 1/2	55 27		0 1/2			0 7/6	
	0 4/7		*p*	0 4/7	59 00		0 4/3	
	0 6/7			0 6/7		*r*	0 2	68°12′
P	0 1	71 00	*e*	0 1	71 3		0 7/3	
	0 12/7			0 12/7		*i*	0 4	78 41
i	0 2	80 14	*i*	0 2	80 15		0 14/3	

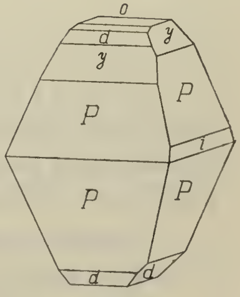
Pásma (001 : 011) jsou velmi přesně tetragonální, jejich posiční úhel φ odchyluje se od 90° málokdy o více než 1′. V přehledu měření posičního úhlu ρ uveden jest počet měřených ploch v závorkách:

Přehled měření posičního úhlu ρ.

Sign.	Gdt. symbol.	Miller	Kryst. I.	Kryst. II.	Kryst. III.	Kryst. IV.	Kryst. V.	Střed:	Vypočteno:
d	0 1/3	013	44°08′(4)	43°15′(1)	—	43°43′(2)	—	43°42′ (7)	44°04′
y	0 1/2	012	53 51 (3)	53 36 (2)	54 08 (1)	53 20 (1)	—	53 54 (71)	55 27
P	0 1	011	71 05 (3)	71 04 (4)	70 55 (7)	70 56 (5)	71 00 (2)	71 00 (21)	71 00
i	0 2	021	78 57 (2)	—	81 35 (2)	—	—	80 16 (4)	80 14

Habitus a vzhled ploch. Habitus všech krystalků jest ostře pyramidální s jedinou nebo převládající *P* (011). Obyčejně jsou krystalky protáhlé podle jedné vedlejší osy tetragonálního kříže takže pak má plocha spodová podobu obdélníka někdy dosti úzkého. Jsou-li přítomny ještě další pyramidy, bývá *y* (012) obyčejně rozsáhlejší než *d* (013), a *i* (021) vždy jen velmi úzká. Všechny plochy pyramidální jsou hruběji nebo i docela jemně rýhovány podle svých pasných hran.

Od teoretické posice uchyluje se nejvíce *y* (012), a to vždy ve směru k ploše spodové, v jednom případu



Obr. 1.

---

5) A. Weisbach, Zeitschr. Kryst., 1877, 1, 394.

6) J. Schrauf, Min. Mitth. 1872, 2, 182.

dokonce o více než 2°, ač to jest plocha poměrně dobrá. Přes to mám za to, že jí přísluší tento jednoduchý symbol 0 1/2 (012). Plocha spodová 0 (001) neschází nikdy a reflektuje většinou znamenitě, stejně, jako některé pyramidy *P* (011) Hranol *n* (010) bývá naznačen jen někdy uzounkou ploškou slabě reflektující.

Jen základní pyramida *P* (011) jest přítomna vždy plným počtem ploch ve smyslu souměrnosti tetragonální, ostatní pyramidy zcela nepravidelně, ale obyčejně *y* (012) a *d* (013) v jednom oktantu pospolu.

Tvary vicinální. Vedle uvedených již tvarů zajištěných byly na měřených krystalech též některé nejisté nebo vicinální, sice ostře ohraničené, ale neskýtající symbolů jednoduchých. Pro úplnost uvádím všechny.

Vicinály k ploše spodové: Na dvou krystalech 3 plochami zastoupená. Posiční úhel ρ byl: 5°31'. 5°47', 5°30' (0 1/30 : 001 = 5°32'). Jedna plocha s posičním úhlem 8°41' (0 1/20 : 001 = 8°16').

Pyramida 02/7 (027). Na dvou krystalech byly tři ostře ohraničené, poměrně dosti široké plochy:

Měřeno:	Vypočteno:
	001 : 027
39°35'	39°41'
39 50	
39 15	

Vicinála k pyramidě základní. Při měření některých pyramid *P* (011) zalesknou se některé partie zdánlivě této pyramidě náležející o něco později. Partie tyto jsou obyčejně úzké až čárkovité, a celý zjev poukazuje na oscilační kombinaci. Vicinály tyto dají se nejlépe vyjádřiti symbolem (0 76), jak jest viděti z přehledu čtyř měření:

Měřeno:	Vypočteno:
	001 : 076
73°46'	73°33 1/2'
73 10	
73 15	
73 30	

Štípatelnost a hustota. Zeunerit jest znamenitě štípatelný podle plochy spodové *o* (001) a dosti dobře též podle hranolu *n* (010). Na štěpných plátcích podle plochy spodové jest dobře viděti ostré, na sobě kolmé trhliny.

Hustota stanovená suspensí v roztoku Rohrbachově jest *h* = 3'28.

Vlastnosti optické. Výborná štípatelnost umožňuje poříditi si destičky, které ukazují v konvergentním polarisovaném světle mezi zkříženými nikoly velmi pěkné obrazy interferenční, jež jsou vždy normální a nikdy se nerozvíraly. Zeunerit jest opticky negativní.

S malým, sotva ½ *mm* velikým krystalkem provedl jsem měření spektrometrické, jež bylo umožněno jenom použitím dvojkruhového goniometru[7]) jako spektrometru. Krystal poskytl dvou hranolků tvořených plochami:

1. $\bar{1}01$ a 101 s lomným úhlem — 37°54′.
2. $0\bar{1}1$ a 011 s lomným úhlem — 37°48′.

Metodou minimální úchylky stanoveny byly jako střední hodnoty z měření obou hranolků indexy lomu světelného při světle Na:

$$\varepsilon = 1'576, \qquad \omega = 1'585, \qquad \omega - \varepsilon = 0'009.$$

Pleochroismus tohoto intensivně smaragdově zbarveného zeuneritu jest silný. Ve směru řádného paprsku (kolmo na osu vertikální *c*) jest sytě smaragdově zelený, ve směru mimořádného paprsku (rovnoběžně s osou *c*) jest modravý, obyčejně špinavě nebo ocelově modravý.

Ke konci připojuji tabulku úhlů a hodnot dvojkruhových.[8])

Zeunerit.

Tetragonální.

$c = p_0 = 2{\cdot}9042$, log $c = 0{\cdot}46303$; log $a_0 = 9{\cdot}53697$, $a_0 = 0{\cdot}3443$.

Sig.	Gdt.	Miller	φ	ϱ	ξ_0	η_0	ξ	η	x	y	d = tg ϱ
o	0	001	0°00′	0°00′	0°00′	0°00′	0°00′	0°00	0	0	0
n	0∞	010	,,	90 00	,,	90 00	,,	90 00	,,	∞	∞
d	0¹/₃	013	,,	44 04	,,	44 04	,,	44 04	,,	0·9679	0·9679
y	0½	012	,,	55 27	,,	55 27	,,	55 27	,,	1·4521	1·4521
P	01	011	,,	71 00	,,	71 00	,,	71 00	,,	2·9042	2·9042
i	02	021	,,	80 14	,,	80 14	,,	80 14	,,	5·8084	5·8084

---

[7]) Upozorňuji na veliké výhody přeměny *dvojkruhového* goniometru na spektrometr. Můžeme užíti krystalku velmi malého, vyhledati na něm vhodnou hranu a v okuláru odstíniti rušivé plochy. Hodí se k tomu každý dvojkruhový goniometr, který má pohyblivý dalekohled. Pro přesnější měření musí míti dalekohled mikrometrický pohyb a kolimátor precisní štěrbinu. Pokud jde o přesnost, jest u starších goniometrů z dílny F. Rheinheimerovy v Heidelberku nejvýše 1′, u nových goniometrů z téže dílny s dělením centesimálním (400 stupňů po 100 minutách) a dvěma odčítacími drobnohledy dosáhne asi 20 vteřin sexagesimálních.

[8]) V Gdt. Winkeltabellen str. 371 udány jsou hodnoty elementů $c = p_0 = 1.288$ a ovšem i a_0 nesprávně. V tabulce jsou pak vypočteny hodnoty pro posiční úhly φ a ϱ atd. z vertikály Schraufovy $c = 1{\cdot}25$ ($a_0 = 0{\cdot}800$).

Dvě anchimonominerální facie západočeského gabbra.

Napsal

F. Slavík.

(Předloženo 24. února 1922.)

Západočeské gabbro, o jehož rozsahu, geologických poměrech a mikroskopické povaze jednotlivých výskytů uveřejnili nověji zprávy Fr. Martin,[1]) W. Bergt[2]) a R. Sokol,[3]) vystupuje na den ve vrších JZ od *Pocínovic* v typickém vývinu; na dvou sousedních místech v této krajině byly v posledních letech při kutacích pracích odkryty zajímavé facie anchimonominerální, t. j. téměř z jediného nerostu složené, o nichž podávám tuto zprávu. Za upozornění na tyto nálezy, laskavý průvod na místě a informace vzdávám díky p. F. Kreysovi, důlnímu podnikateli ve Staňkově a p. Ing. A. Brožovi, báňskému řediteli v Nučicích.

JZ od *Pocínovic* skládá gabbro vrch „*Silberberg*", na němž leží osada *Orlovice,* německy rovněž Silberberg zvaná; vrchol dosahuje nadmořské výšky 729 *m* a na něm nacházíme veliký starý obval, hluboký asi 8 *m* a měřící as 30 × 20 *m.* V severovýchodní stěně obvalu jsou zřetelné stopy starých prací hornických, snad žárových, a na dně jeho jsou roztroušeny balvany jemnozrnné horniny gabbrové, mikroskopickou strukturou podobné beerbachitu a obsahující dosti hojně vtroušený pyrrhotin jako součástku zřejmě primární.

SV od vrcholu nad samotou Krocárem, blízko lesní cesty, byly v gabbru raženy dvě krátké štolky pokusné, jimiž zastiženy nevydatné magmatické shluky železné rudy (magnetovce, ilmenitu) v olivinickém gabbru, středně zrnitém; podle sdělení p. Kreysy obsahovala ruda odtud zkoušená 32·5% Fe a 17·62% SiO_2. Všude v cestách na svazích Silberbergu je splaveno plno písku magnetovcového a ilmenitového, jenž se tu občas vybíral a prodával za posýpátko.[4]) Ve vsi Orlovicích samé nacházíme zašlé haldy a na nich jen rezavě zvětralou horninu gabbrovitou.

---

[1]) Martin, Über Gabbrogesteine in der Umgebung von Ronsperg in Böhmen, Tscherm. Min.-petr. Mitt. XVI (1896), 105—132.

[2]) Bergt, Das Gabbromassiv im bayrisch-böhmischen Grenzgebirge, Stzb. Akad. Berlin 1905, XVIII a 1906, XXII.

[3]) Sokol, Český Les III, R. Č. Ak. 1917 (XXVI), č. 32.

Dále k SZ od Orlovic vystupuje opět všude gabbro, a to ve faciální měně od slohu jemnozrnného až do pegmaticky hrubozrnného. Při cestě, která vede ze *Lhoty u Pocínovic* celkem k J směrem na vrch cô. 736, označený ve speciální mapě (1 : 75.000) jménem „Gewintzy", nacházíme v gabbru dvě facie anchimonominerální: jedna jest složena velkou převahou z *ilmenitu,* druhá z *hortonolithu,* jenž tuto poprvé z Čech konstatován.[5])

Nedaleko severního okraje lesa jest u zmíněné cesty hnána do zvětralého gabbra malá štolka, za mé návštěvy skoro úplně zatopená; zde byly vydobyty kusy horniny velmi bohaté *ilmenitem;* který tvoří hnízda a podlouhlé šmouhy v hornině velmi zvětralé, již sypké anebo sekundárním hnědelem opět stmelené. Ilmenit sám však, jak viděti z analys, podlehl větrání jen nepatrně.

Mimo ilmenit obsahuje hornina, jak zjištěno v prášku, basický plagioklas silně rozložený, a bělavý asbest tremolitový, v mikroskopu čirý, parallelně vláknitý; vznikl patrně uralitisací diallagu.

Shluky složené převahou z ilmenitu byly analysovány v laboratoři Pražské železářské společnosti a daly výsledek:

TiO_2	49·82%	
FeO	42·96	Fe 33·39
MnO	0·59	
MgO	1·41	
CaO	0·15	
Al_2O_3	1·65	
SiO_2	2·77	
P_2O_5	0·16	
	99·51	

Jiná technická analysa dala Fe 39·01, SiO_2 19·1%. Kol. Dr. V. Veselý analysoval ilmenit ručně tříděný a silným magnetem zbavený nepatrné příměsi magnetovcové. Sblížení výsledků jeho analysy s uvedeným rozborem materiálu netříděného ukazuje nejlépe, jak zde magmatická facie gabbrová se velice blíží složení monominerálnímu:

---

[4]) Srovn. R. Sokol, O nových dolovacích pokusech v západních Čechách, Stráž (Plzeň) 1919.

[5]) Předběžnou zprávu o tomto nálezu a o evansitu ze Ptenína u Merklína jsem uveřejnil ve „Vědě přírodní" II. (1920), str. 40: Dva nové české minerály.

		Molek. kvoc.
TiO_2	50·29 %	0·615
FeO	38·16	0·531
Fe_2O_3	6·99	0·044
MnO	0·27	0·004
MgO	1·82	0·046
CaO	2·62	0·046
SiO_2	0·06	0·001
	100·21	

Poměr molekulárních kvocientů jest

$(TiSi)O_2 : (FeMnMgCa)O : Fe_2O_3 = 616 : 627 : 44$
čili přibližně: . . . . 56 : 57 : 4,

t. j. 56 $RTiO_3 . FeFe_2O_3 . 3\,Fe_2O_3$.

Uvážíme-li, že téměř všecky ilmenity obsahují Fe_2O_3 v různém poměru kvantitativním, vidíme, že materiál analysy Dra Veselého byl téměř čistý minerál ilmenit, jehož analytická data jsou vesměs v mezích čísel obdržených jinými rozbory ilmenitů. Zvláštností jest vysoký podíl kysličníku vápenatého, jejž předčí ze 100 rozborů uvedených v kompendiu Hintzeově[6]) toliko ilmenit z Ben Bhreacu ve Skotsku (anal. č. XXXI.), obsahující podle rozboru F. Heddleova 3·14% CaO. To však je nerost druzový z paragenetické společnosti typu alpského.

Od naleziště ilmenitu něco výše a dále k JZ, blízko místa „U Josefa“ (rozcestí jmenované cesty a cesty do Orlovic, s obrázkem sv. Josefa) jsou blízko cesty ze Lhoty dvě jámy ve starých obvalech, z nichž severnější větší obsahuje kamení středně zrnité, tvrdé (T = 6½) a velmi křehké, celkové barvy černohnědé s dosti silným leskem skelným. Jednotlivá zrnka prosvítají světleji hnědě s odstínem do žlutava, vryp je nahnědle bělavý. Hustota horniny kolísá v mezích 3·8—3·95.

Ve výbruse hlavní, daleko převládající součástka se jeví býti nerostem ze skupiny *olivinu*; jest charakteristickým způsobem nepravidelně rozpukán, beze zřetelnější štěpnosti, bezbarvě průhledný, s vysokým lomem světelným i vysokým dvojlomem *negativním* a dispersí $\rho > \upsilon$ jako u jiných dosud zkoumaných *hortonolithů* a u čistého *fayalitu*. Exponent lomu, ve všech průřezech a ve všech polohách vyšší než v jodmethylenu o $n_{Na} = 1{\cdot}740$, taktéž svědčí pro totožnost s hortonolithem, jenž podle S. L. Penfielda a E. H. Forbesa má nejmenší lámavost světelnou $\alpha = 1{\cdot}7684$, dvojlom negativní a dispersi $\rho > \upsilon$.

Mimo hortonolith jest obsažena ve výbrusech jen v malém množství černá neprůhledná ruda železná, jíž jen nepatrný podíl se dá vytáhnouti magnetem; jest to tedy skoro veskrze ilmenit (a snad něco haematitu), čemuž nasvědčuje i dosti vysoké procento kysličníku titaničitého v analysách. Druhotně se vtěsnává mezi zrna hortonolithová zelený nerost chloritický. Největší část rudy vykrystalovala *později* než hortonolith a vyplňuje mezery mezi jeho zrnky. Jiné součástky ve výbrusech nezjištěny.

---

[6]) Hintze, Handbuch der Mineralogie, I. str. 1876—1881.

Hortonolithová šmouha byla analysována dvakráte: I. v laboratoři Pražské železářské společnosti (sdělení p. F. Kreysy), II. Dr. Veselým:

	I.	II.
SiO_2	27·10%	29·08%
FeO	37·00	44·58
MnO	0·88	0·40
MgO	11·77	11·95
CaO	0·36	0·76
Fe_2O_3	11·54	5·00
Al_2O_3	4·15	3·28
TiO_2	7·80	3·16
Na_2O	—	0.64
K_2O	—	0·18
H_2O (hygrosk.)	—	0·39
	100·60%	99·42%

Složení hortonolithu samého nelze ovšem z těchto dat vypočítati přesně, jelikož ilmenit přimíšený, jak ukazují obě předešlé analysy, má složení kolísavé, a nemůžeme též určit podíl haematitu, magnetitu a chloritického nerostu. Dosavadní tři analysy hortonolithu z původního naleziště, Monroe ve státě New Yorku, jedna Mixterem a dvě Penfieldem a Forbesem vykonané, daly poměr (FeMn)O : MgO různý, prvá přibližně 5 : 3, druhé dvě velmi přibližně 2 : 1 s malým přebytkem (FeMn)O. Přesný poměr 2 : 1 vyžadoval by teoreticky: SiO_2 34·88, FeO 41·86, MgO 23·26. Uvážíme-li chemické složení příměsí, jež spolu s hortonolithem analysovanou horninu skládají, vidíme, že také tento hortonolith zajisté nemá daleko k jednoduchému poměru svých isomorfních komponent, 2 : 1.

Výskytem se český hortonolith naprosto liší od původního amerického, jenž byl nalezen v dole na železnou rudu spolu s magnetovcem a kalcitem, tedy zřejmě v associaci skarnové. Magmaticky vzniklý hortonolith, pokud vím, dosud bezpečně zjištěn nebyl, ač H. Rosenbusch ve svém známém díle[7] podotýká (II., str. 334—5), že oliviny gabbrovitých hornin, žlutě neb hnědě průsvitné, zdají se býti často bohaty železnatou komponentou.

---

[7] Mikroskopische Physiographie der massigen Gesteine, III. vyd. 1907.

Hortonolithová facies gabbra pocínovického je zajímava tím, že tvoří odchylku od obecného pravidla, stanoveného J. H. L. Vogtem[8]) na základě četných analys olivinovců a isolovaných olivinů z vyvřelin od čistých dunitů až k pikritům, lherzolitům atd.: ukázalo se, že čím více převládá v magmatu silikát olivinový nade všemi ostatními součástmi, tím více se v něm posunuje poměr obou isomorfních komponent ve prospěch Mg_2SiO_4 a na újmu Fe_2SiO_4. V olivinech z pikritu porýnského a lherzolithu pyrenejského jest poměr $Mg_2SiO_4 : Fe_2SiO_4$ roven 3·7 a 5·7, v pěti olivinech z dunitů a saxonitů od 9 do 10. Zde však máme anchimonominerální magma velmi bohaté olivinovým křemičitanem, v němž dokonce orthosilikát železnatý silně převládá nad hořečnatým. Podmínku této úchylky je na snadě hledati ve vlivu ostatních chemických součástí vyvřeliny, nevstupujících vůbec nebo vstupujících jen nepatrnými podíly ve složení převládajícího křemičitanu. Vogt sám [l. c. str. 25, [1]) pod čarou] poukazuje na možnost, že v takových případech působí jiné sloučeniny železa, na př. magnetovec Fe_3O_4 a že tedy směrem k vyvřelinám magnetovcovým nastávají i v peridotitech poměry odchylné.

Srovnáme-li s tohoto hlediska obě analysy naší vyvřeliny s analysami peridotitů Vogtem sestavenými (l. c. str. 20—21), vidíme, že kysličníky hlinitý, železitý, vápenatý, sodný i draselný v obou našich analysách zůstávají v mezích oněch 43 analys; za to však naše analysa II. a tím více I. značně přesahuje maximální podíl 1·83 kysličníku titaničitého, vykázaný v č. 4 seznamu Vogtova, v amfibolickém pikritu z Montany; a tato hornina má též minimální podíl MgO, 13·75, z něhož ještě velká část připadá na amfibol v hornině konstatovaný, který asi chová v sobě největší část nalezených 10·48% CaO.

Ve shodě s geologickými poměry, t. j. s nedalekým vývinem ilmenitové facie v témže hlubinném tělese vyvřelém, zdá se tedy hojnější příměs hmoty ilmenitové býti podmínkou odchylky od obvyklého poměru obou komponent olivinového silikátu v anchimonominerálním magmatu.

* * *

Tyto závěry potvrdil mi laskavě na můj dotaz prof. J. H. L. Vogt v Trondhjemu v dopise, z něhož uvádím: V peridotitech, v nichž se hromadí pouze olivin, přibývá v tomto typicky Mg_2SiO_4 na újmu Fe_2SiO_4, a to až do molekulárního poměru přibl. 7·5 Fe_2SiO_4 : 92·5 Mg_2SiO_4. Hromadí-li se však zároveň ilmenit a magnetit, jsou oliviny vesměs dosti bohaty Fe_2SiO_4, dokonce až do poměru asi 3 Fe_2SiO_4 : Mg_2SiO_4, ba i nad to.

Isolované oliviny z takovýchto hornin bohatých ilmenitem a magnetovcem nebyly dosud podrobeny výzkumu optickému ani chemickému mimo jediný případ, zde zmíněný níže (3 d); že však hornina zde popsaná má mezi nimi své analogie, o tom svědčí shoda celkových analys některých takových vyvřelin, na něž mne prof. Vogt laskavě upozornil a jež z části cituje též ve starším svém pojednání:9)

---

[8]) Vogt, Über anchi-monomineralische und anchi-eutektische Eruptivgesteine. Videnskab-Selskabets Skrifter I, 1908, No. 10, zvl. str. 4—5, 15—16, 19—25.

	SiO_2	TiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	FeO	MnO	MgO	CaO	Alk.	P_2O_5	H_2O	Souč.
1*a*	27·10	7·80	4·15	11·54	37·00	0·88	11·77	0·36	—	—	—	100·60
1*b*	29·08	3·16	3·28	5·00	44·58	0·40	11·95	0·76	0·82	—	0·39	99·42
2 10)	27·71	2·69	2·92	21·80	15·70	0·22	17·98	6·83	0·19	—	4·05	100·40
3*a*	20·89	9·57	6·93	17·81	26·04	—	15·65	0·96	sl.	—	2·71	100·56
3*b*	19·98	9·76	6·75	19·25	21·42	0·40	16·83	—	sl.	—	4·77	99·16
3*c*	20·85	9·93	5·55	45·62		—	16·49	0·73	—	—	—	99·69
3*d* 11)	22·35	10·11	5·26	14·05	28·84	0·43	16·10	1·17	0·54	0·02	0·42	100·74
4	21·25	6·30	5·55	43·45		0·40	18·30	1·65	—	0·13	2·60	99·66

1*a*—*b* hornina ze Lhoty u Pocínovic.

2 = h. z Caribou, Boulder Co., Colorado, anal. G. Steiger, horninu jako „magnetite peridotite" popsal E. S. Bastin; uvedeno v H. S. Washingtonových „Chemical analyses of igneous rocks," U. S. Geolog. Survey Professional Paper 99 (1917), str. 742—3.

3*a*—*d* hornina z Iron Mine Hill, Cumberland, Rhode Island.

3*c* původní analysa M. E. Wadswortha „cumberlanditu," jejž Vogt l. c. charakterisuje jako „titanomagnetitolivinit"; 3*d* novější analysa téže horniny (C. H. Warren); 3*a b* produkty přeměny cumberlanditu, s převahou nerostu chloritického ve 3*a* a serpentinu ve 3*b*. Olivin čerstvého cumberlanditu byl isolován a rozborem prokázán jako hyalosiderit 2 $Mg_2SiO_4 . Fe_2SiO_4$. Hortonolith zjistil Palache na žilách, tyto produkty přeměny prostupujících, s aktinolithem a klinochlorem.

4 = Vogtův titanomagnetitspinellit ze známého magmatického ložiska rud železných Tabergu ve Švédsku. Horninu tu mi laskavě zaslal prof. Quensel. Má olivinovou součástku opticky negativní.

Naše horniny mají v této řadě maximální procento kysličníku železnatého a minimální hořečnatého při téměř maximálním podílu kysličníku křemičitého a nízkém obsahu titaničitého, hlinitého, vápenatého a alkalií; ze všeho toho jasně plyne jejich přiblížení k monominerálnímu složení olivinovému a převaha orthosilikátu železnatého nad hořečnatým.

---

9) J. H. L. Vogt, Weitere Untersuchungen über die Ausscheidungen von Titan-Eisenerzen in basischen Eruptivgesteinen. Zeitsch. f. prakt. Geologie IX (1901), analysy na str. 16.

10) Mimo uvedené položky ještě 0·22 CO_2, 0.04 S, 0.05 CoO, sledy BaO a SrO.

11) Dále též 0·18 V_2O_5, 0·02 CO_2, 0·38 S, 0·71 Zn, 0·08 Co + Ni, sledy Pb.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 17.

Závislost refrakce kyslíku na tlaku menším jedné atmosfery.

Napsal

PhDr. Jaroslav Šafránek.

(S obrazcem v textu.)

Předloženo dne 10. března 1922.

Studium závislosti refrakce kyslíku na tlaku menším jedné atmosfery provedeno bylo methodou Posejpalovou[1]) týmž experimentálním uspořádáním, kterého on užíval při svých pracech o vzduchu a kysličníku uhličitém, toliko s nepatrnými změnami, jichž si vyžádala výroba kyslíku.

Methoda.

Zmíněná methoda používá při měření Jaminova interferenčního refraktometru ve spojení se spektrálním fotometrem Lummer-Brodhunovým a zakládá se na této úvaze:

Je-li L délka optické trati světla o vlnové délce λ ve vzduchoprázdné trubici Jaminova stroje a je-li s počet proužků, o které se posune interferenční zjev, naplníme-li trubici plynem tlaku p a indexu n, pak jsou optické dráhy ve vakuu L a v plynu $n L$ a každá změna optické dráhy o vlnovou délku posune interferenční zjev o jeden proužek. Platí tedy:

$$L(n-1) = \lambda s$$

$$(n-1) = \frac{\lambda}{L} s. \qquad (1)$$

---

[1]) *a*) Dr. V. **Posejpal:** Kterak závisí refrakce plynů na tlaku menším jedné atmosfery. Rozpravy Čes. Akad. II. tř., roč. XXVI, čís. 61, 1918. — Totéž: Bulletin international de l'Académie des Sciences de Bohême 1918.

b) **Týž:** Annalen der Physik. Bd. 53, 1918, p. 629—646.

c) **Týž:** Rozpravy Čes. Akad. II. tř., roč. XXIX, čís. 13, 1920.

d) **Týž:** Journal de Physique. VI, 2, 1921.

Veličiny s, λ, L lze měřiti, n z nich vypočítati. Měníme-li tlak, najdeme závislost n na p. Při tom však nutno měřiti p a s jednou při velké změně a hned zas při malé změně, při čemž nedostává se nám měřícího prostředku, jenž by vyhověl v obou případech s dostatečnou přesností. Derivujeme-li však rovnici (1), obdržíme relaci:

$$\frac{dn}{dp} = \frac{\lambda}{L} \cdot \frac{ds}{dp}, \tag{2}$$

kde místo závislosti n na p můžeme měřiti funkci $\frac{ds}{dp}$. Tato mění se jen mírně s tlakem, lze tedy měřiti p s přesností menší, za to $d\,s$ a $d\,p$ dlužno měřiti přesně. Při tom je s výhodou podržeti $d\,p$ přibližně stálé (v našem případě $d\,p = 100\,mm$) pro různé tlaky p. To jest umožněno použitím Posejpalova manometru (pojednání sub 1. *a*). Při tom $d\,p$ lze měřiti na setiny milimetru a použitím spektrálního fotometru ve spojení se strojem Jaminovým lze dosíci v odečítání proužků ($d\,s$) přesnosti větší než je setina proužku.[2]

Úprava manometru.

Před vlastní prací byl manometr nově upraven a naplněn. Kohout *o* (viz práci citovanou sub 1. *a*) byl odtaven a plnění pečlivě vyčištěného manometru dálo se 1 *m* dlouhou trubicí přitavenou ke konci *A* (l. c. str. 3 obr. 1.), dole zahnutou a naplněnou rtutí. Doléváním rtuti do této trubice mohlo býti vpraveno do manometru vyčerpaného na Röntgenovo vakuum žádoucí její kvantum. Po skončeném plnění byla tato pomocná trubice odtavena. Pro nově naplněný manometr nalezena byla korrekce 0·25 *mm*, takže tlakový rozdíl počítá se podle vzorce:

$$p = k + 0{\cdot}25 \ (16^0\ \mathrm{C}),$$

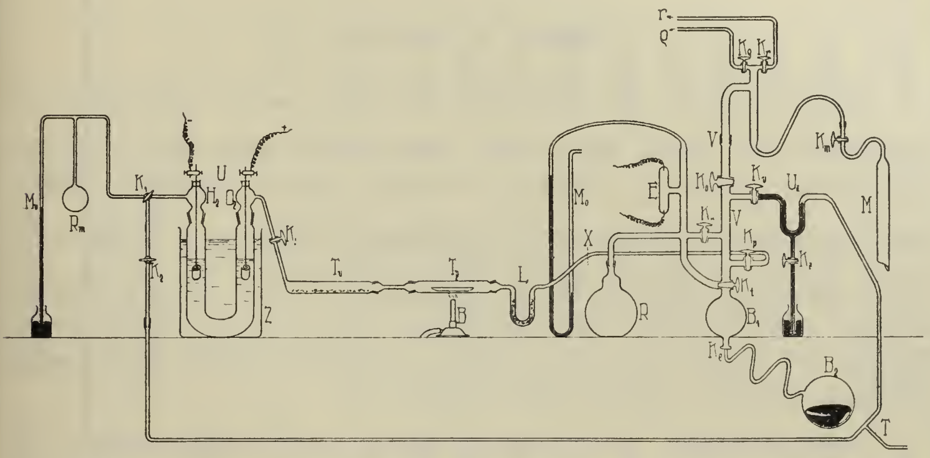
kdež k znamená hodnotu odečtenou kathetometrem.

Výroba kyslíku.

K výrobě použito bylo elektrolyse 11·4%ního roztoku louhu draselného (KOH purissimum, Merck) elektrodami platinovými. Měrná část systemu vymezená kohouty K_p a K_v zůstala nezměněna (viz obraz) z dřívějších prací. Plyn byl vyvíjen ve voltametru U. Kohoutem K_3 vcházel do vodorovné trubice T_v, kde byl vysoušen fosforpentoxydem, vstupoval do trubice T_p ze skla těžko tavitelného, která obsahovala na porcelánovém člunku platinovanou pemzu, jež zahřáta plynovým kahanem asi na 300° C spalovala vodík, jenž mohl snad diffusí vniknouti do trubice kyslíkové. Odtud procházel kyslík v trubici L přes zrnka louhu draselného a kohoutem K_p vcházel do systemu, kde znovu se sušil, jsa ve stálém styku s fosforpentoxydem v recipientu R. Rameno vodíkové spojeno bylo trojcestným kohoutem K_1 jednak s otevřeným pomocným manometrem M_v a $^1/_4$litrovým recipientem R_m, jednak přes kohout K_2 s dlouhým vedením k rozvodu T; k témuž ústila spojka od kohoutu K_v zajištěného rtuťovou uzávěrkou U_z a vývěva olejová s Gaedeho vývěvou rtuťovou. Celá apparatura provedena byla ze skleněných trubek, jež byly do sebe zapuštěny a slepovány piceinem. Všechny kohouty mazány byly kaučukovým mazem Traversovým a kohouty měrného systemu opatřeny nad to rtuťovým těsněním. Správné utěsnění celého systemu vyzkoušeno bylo tak, že celý

---

[2] Dr. V. Posejpal: Užití spektrálního fotometru při interferenčním refraktoru Jaminově. Rozpravy Čes. Akad. II. tř., roč. XXIV, čís. 17, 1915.
Totéž: Annalen der Physik IV, Bd. 49, 419, 1916.



system byl vyčerpán až na napětí nasycených par roztoku KOH současným odssáváním jak přes kohout K_v, tak přes kohout K_2, při čemž bylo nutno opatrně regulovati odssávání manipulací na kohoutech K_1, K_2, K_3, aby hladiny louhu ve voltametru zůstávaly v téže výši. Pak vyčkáno bylo při uzavřených kohoutech K_2 a K_v 24 hodin a stav v systemu nesměl se změniti, zejména hladiny roztoku musely zůstati přesně v téže výši. Pak kohout K_3 byl uzavřen, trojcestná trubice T byla nahražena bezprostředním spojením od kohoutu K_v k vývěvám a celý system až ke kohoutu K_3 byl vyčerpán na tvrdé vakuum Röntgenovo, jež zjišťováno bylo výbojovou trubicí E. Když i toto vakuum udrželo se po dobu 24 hodin, upraveno bylo spojení, jak je na obraze vyznačeno, a započato bylo s plněním. Ve voltametru U vyrobeno bylo tolik plynů až byly pod tlakem 1 atmosfery. To bylo možno tak, že vodík byl zvolna kohouty K_1 a K_2 odssáván. Kohoutem K_3 byl pak pomalu za současného vývoje vpouštěn kyslík do systemu a ihned zase odssáván. K tomu zvolena nejkratší cesta a ostatní části systemu byly příslušnými kohouty odpojeny. Po nějaké době, když první dávka kyslíku byla odstraněna, uzavřen byl na chvíli kohout K_3, cesta, kudy první kyslík procházel, byla vyčerpána, a pak teprve vývoj kyslíku obnoven, a započato bylo s definitivním plněním. Ještě i pak byl naplněn celý system po dvakráte jen na tlak $\frac{1}{4}$ atmosfery, propláchnut a znovu vyčerpán, a teprve třetí plnění provedeno bylo až do tlaku skoro 1 atmosfery. Poslední plnění provedeno asi během 2 hodin proudem o intensitě 6—10 amper. Příprava roztoku dála se tak, že bezprostředně před výrobou byla voda předestilována přímo do voltametru U a teprve v této vodě byl louh draselný rozpuštěn. Spektroskopická zkouška ukázala, že kromě kyslíkových čar není ve spektru stop po jiných plynech. Stejná zkouška provedená po skončeném měření (po 2 měsících) ukázala, že plyn zůstal stejně čistým.

Měření a výpočty.

Měření poměru $\frac{ds}{dp}$ provedena byla pro sedm umenšujících se tlaků, totiž: $p = 699{\cdot}6,\ 591{\cdot}9,\ 492{\cdot}7,\ 360{\cdot}5,\ 292{\cdot}7,\ 190{\cdot}9,\ 89{\cdot}5$ a v každé řadě měření opakována desetkráte. Výsledky podává tabulka I. Měření redukována jsou na teplotu 16° C. Z výsledků jest patrno, že hodnota $\frac{ds}{dp}$ není konstantou, nýbrž vzrůstá se stoupajícím tlakem. Tlaky p jsou vyjádřeny v milimetrech rtuti nulstupňové pro intensitu tíže v Praze. Redukci jich na intensitu tíže normální provedeme násobíce koeficientem 1·000412. Výsledky redukce dává tabulka II.

Předpokládejme, že v prvním přiblížení jest závislost poměru $\frac{ds}{dp}$ na tlaku lineární. Pak můžeme psáti:

$$\frac{ds}{dp} = \alpha_1 + \beta_1 p. \tag{3}$$

Konstanty α_1 a β_1 stanovíme metodou nejmenších čtverců, vycházejíce při tom z hodnot korigovaných v tabulce II. Výpočet dává tyto výsledky:

$$\alpha_1 = 0{\cdot}30721 \pm 0{\cdot}00012,$$
$$\beta_1 = 0{\cdot}00000324 \pm 0{\cdot}00000028.$$

Vypočítejme užívajíce těchto konstant hodnoty pro $\frac{ds}{dp}$ dosazujíce do rovnice (3). Výsledky uvádí tabulka III., kde zároveň jest vypočítána diference $\varDelta$ mezi hodnotou vypočtenou a pozorovanou. Souhlas mezi pozorováním a výpočtem je dobrý, chyby $\varDelta$ nevybočují z mezí středních chyb pozorovacích. Lineární závislost vyjadřuje tedy hledanou funkci v mezích chyb pozorovacích. V předposledním sloupci tabulky III. jest

Tabulka I.

$$\frac{s'}{p'}(1+\beta t)=\left(\frac{ds}{dp}\right)_{16}$$

	I	II	III	IV	V	VI	VII
p mm	699·6	591·9	492·7	360·5	292·7	190·9	89·5
1	0·30829	0·31732	0·30854	0·30836	0·30946	0·30691	0·30512
2	0·30772	0·30936	0·30881	0·30936	0·30014	0·30806	0·30786
3	0·30807	0·30819	0·30993	0·30905	0·30834	0·30763	0·30752
4	0·30667	0·30768	0·30975	0·30896	0·31014	0·30761	0·30775
5	0·30868	0·31077	0·30904	0·30736	0·30909	0·30717	0·30768
6	0·30755	0·30761	0·30962	0·30809	0·31001	0·30768	0·30894
7	0·30940	0·30798	0·30878	0·30830	0·30884	0·30815	0·30696
8	0·31590	0·30893	0·30834	0·31009	0·30855	0·30803	0·30876
9	0·30824	0·30726	0·30864	0·30913	0·30879	0·30830	0·30751
10	0·31033	0·30790	0·30866	0·30835	0·30868	0·30853	0·30861
	0·30949 ± 83	0·30930 ± 95	0·30901 ± 18	0·30875 ± 24	0·30820 ± 92	0·30780 ± 16	0·30767 ± 35

Tabulka II.

Řada	Hodnoty nekorrigované		Hodnoty korrigované	
	p	$\frac{ds}{dp}$	$p \,.\, 1{\cdot}000412$	$\frac{ds}{dp} \,.\, 0{\cdot}999588$
VII	89·5	0·30767	89·6	0·30754
VI	190·9	0·30780	191·0	0·30767
V	292·7	0·30820	292·8	0·30807
IV	360·5	0·30875	360·7	0·30862
III	492·7	0·30901	492·9	0·30888
II	591·9	0·30930	592·2	0·30917
I	699·6	0·30949	699·9	0·30936

Tabulka III.

Řada	p	$\frac{ds}{dp}$	$\left(\frac{ds}{dp}\right)$	$\Delta = \left(\frac{ds}{dp}\right) - \frac{ds}{dp}$
VII	89·6	0·30754	0·30750	— 0·00004
VI	191·0	0·30767	0·30783	+ 0·00016
V	292·8	0·30807	0·30816	+ 0·00009
IV	360·7	0·30862	0·30838	— 0·00024
III	492·9	0·30888	0·30881	— 0·00007
II	592·2	0·30917	0·30913	— 0·00004
I	699·9	0·30936	0·30948	+ 0·00012
	760·0		0·30967	

uvedena zároveň hodnota $\frac{ds}{dp}$ pro tlak 760 *mm* vypočtená použitím konstant α_1 a β_1.

Této poslední hodnoty použijeme k výpočtu refrakce kyslíku způsobem dosud obvyklým, integrací rovnice (2), kde se poměr $\frac{ds}{dp}$ považuje za stálý. Obdržíme:

$$(n_{760} - 1) = \int_0^{760} d\,n = \frac{\lambda}{L} \left(\frac{ds}{dp}\right)_{760} . \, 760.$$

Na teplotu 0⁰ převedeme výsledek násobíce výrazem $(1 + \alpha t)$, tedy:

$$(n_{760} - 1) = \frac{\lambda}{L} \left(\frac{ds}{dp}\right)_{760} . \, 760 \, (1 + \alpha t).$$

Do této rovnice budeme dosazovati za $\left(\frac{ds}{dp}\right)_{760} = 0{\cdot}30967 \pm 0{\cdot}00033$ $\lambda = 0{\cdot}00054623$ *mm*, $L = 494{\cdot}650$ *mm*, $t = 16^0$ C, $\alpha = 0{\cdot}003673$. Dosazením obdržíme:

$10^6 . (n - 1) = 275{\cdot}16 \pm 0{\cdot}29$ pro tlak 760 *mm* rtuti normálních,
$10^6 . (n - 1) = 275{\cdot}27 \pm 0{\cdot}29$ pro tlak 760 *mm* rtuti v Praze.

Jiná měření dávají tyto výsledky: Koch[3]) 270·4, Ahrberg[4]) 270·6, Mascart[5]) 271·2, Cuthbertson[6]) 271·7, Dulong[7]) 272·0, Lorenz[8]) 272·1, Rentschler[9]) 272·5, Jamin[10]) 275·0, Biot a Arago[11]) 280.

Dosaďme do rovnice (2) za $\frac{ds}{dp}$ z rovnice (3) a integrujme v mezích od *0* do *p*, píšíce integrál ve tvaru

$$(n - 1) = K\,p\,(1 + \beta\,p) \tag{4}$$

(tvar Mascartův). Tu jest patrně

$$K = \frac{\lambda}{L}\alpha_1, \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \frac{\beta_1}{\alpha_1} .$$

---

[3]) J. Koch, Ann. d. Phys. 17, 658 (1905); Nova Acta Reg. Soc. Ups., ser. 4, 2 (5), 32 (1909).

[4]) F. Ahrberg, Diss. Halle (1909).

[5]) Dle: H. Dufet, Recueil de Données Numeriques. Optique. Paris 1900.

[6]) C. M. Cuthbertson, Proc. Roy. Soc. (A) 83, 164 (1909).

[7]) Dulong, Ann. ch. phys. (2), 31, 154, 1826.

[8]) L. Lorenz, Wied. Ann. 11, 70 (1880).

[9]) H. C. Rentschler, Astroph. Journ, 28, 435 (1908).

[10]) Jamin, C. R. 45, 892, 1857, Ann. ch. phys. (3) 49, 282, 1857; (3) 52, 171, 1858.

[11]) Biot a Arago, Mém. de l'Acad. 7, 301, 1806. Gilb. Ann. 25, 345, 1807; 26, 79, 1807.

Dosadíme-li do těchto výrazů dosavadní výsledky, tu obdržíme:

$$K = 0{\cdot}33925 \,.\, 10^{-6} \pm 0{\cdot}00013 \,.\, 10^{-6},$$
$$\beta = 527 \,.\, 10^{-8} \pm 47 \,.\, 10^{-8}.$$

Aplikujme tyto hodnoty na rovnici (4), obdržíme pro refrakci kyslíku hodnotu (pro normální tlak a teplotu):

$$(n - 1) \,.\, 10^6 = 274{\cdot}07 \pm 0{\cdot}25,$$

jež je současně definitivním výsledkem našeho měření (tak zv. hodnota korigovaná Posejpalova). Vidíme, že padá v řadě dosavadních výsledků, k nimž se uspokojivě řadí, na stranu čísel větších.

Výsledky této práce potvrzují správnost předpokladu vysloveného Posejpalem, že i pro kyslík platiti budou analogická pravidla jako pro vzduch, že totiž specifická refrakce kyslíku pro tlak pod jednou atmosferou nebude stálou, nýbrž s tlakem poroste, čím dál tím volněji.

Práce tato provedena byla v laboratořích fysikálního ústavu university Karlovy za vedení ředitele ústavu prof. Dr. V. Posejpala, jemuž za cenné rady a blahovolnou ochotu jsem zavázán vřelými díky.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 18.

Ke konstrukci kuželosečky oskulační křivky rovinné.

Napsal

J. Sobotka.

(Předloženo dne 28. dubna 1922.)

1. Jde tu o řešení následujícího problému.

„Pro daný bod P křivky rovinné p buďtež dány 1., 2. a 3. střed křivosti K, K_1, K_2; sestrojiti kuželosečku u, která má s p v bodě P dotyk řádu čtvrtého.“

Konstrukcí tou jsem se již dříve zabýval.[1] Jinou konstrukci odvodil před tím již Mannheim;[2] poukázal jsem k tomu, jak obě ty konstrukce spolu souvisí. Konstrukci Mannheimovu lze ale ještě zjednodušiti, jak k tomu vede následující úvaha.

Učiníme-li vektor $K K_1'$ rovný jedné třetině vektoru $K_1 K$, jest, jak známo, $P K_1'$ průměrem pro všechny kuželosečky, které mají s p v bodě P dotyk řádu třetího.

Převeďme nyní trojúhelník $P K K_1'$ do nekonečně blízké polohy (P) (K) (K_1') pohybem, při němž bod P popisuje křivku p, bod K prvou evolutu k křivky p, již se strana $P K$ ustavičně dotýká, kdežto strana $K K_1'$ se dotýká neustále druhé evoluty k_1 křivky p. Pak jest střed O kuželosečky u průsečíkem přímek $P K_1'$, (P) (K_1'); jest tedy O bod, v němž přímka $P K_1'$ se dotýká své obálky. Při pohybu tom uzavírají nové polohy vektorů $K P$, $K_1 K_1'$ s polohami původními úhly τ, jež se sobě rovnají a mají stejný smysl.

Především můžeme sestrojiti v bodě K_1' normálu $K_1' K_2'$ křivky k', již popisuje bod K_1'. Značí-li K_2' průsečík normály $K_1' K_2'$ s přímkou $K_1 K_2$, jest podle známého vzorce d'Ocagne-ova[3])

---

[1] Zur Krümmung der Kegelschnittevoluten ... Sitzungsber. der k. böhm. Gesell. d. Wissensch. 1902.

[2] A. Mannheim: Principes et développements de géom. cinématique, Paris 1894, p. 51.

[3] Cf. M. d'Ocagne: Cours de géometrie pure et appliquée, T. I., p. 123 a násl.

$$d\,\overline{K_1 K_1'} = \overline{K_2 K_2'}\, d\,\tau$$

a obdobně jest

$$d\,\overline{K_1 K} = \overline{K_2 K_1}\, d\,\tau.$$

Poněvadž jest ale pro každou polohu

$$\overline{K_1 K_1'} = \tfrac{4}{3}\,\overline{K_1 K},$$

plyne z těchto rovnic

$$\overline{K_2 K_2'} = \tfrac{4}{3}\,\overline{K_2 K_1}.$$

Učiníme-li tedy

$$\overline{K_1 K_2'} = \tfrac{1}{3}\,\overline{K_2 K_1},$$

obdržíme v $K_1'K_2'$ normálu žádanou.

Označíme-li $d\,s$ differenciál oblouku libovolné křivky s, můžeme dle jiného vzorce d'Ocagne-ova¹) vyjádřiti

$$d\,k' = \overline{K_1' K_2'}\, d\,\tau.$$

Seče-li kolmice v O k přímce $P\,K_1'$ normálu $K_1'\,K_2'$ křivky k' v bodě L, normálu $P\,K$ křivky p v bodě M, jest dle téhož vzorce d'Ocagneova

$$\frac{d\,p}{d\,k'} = \frac{P\,M}{K_1'\,L}.$$

Poněvadž ale $d\,p = \overline{P\,K}\,d\,\tau$, proto obdržíme rovnosti

$$\frac{d\,p}{d\,k'} = \frac{P\,K}{K_1'\,K_2'} = \frac{P\,M}{K_1'\,L}.$$

Se zřetelem na smysl pohybu jest orientace oblouků $d\,p$, $d\,k'$ stejná; hodnoty posledních dvou zlomků nutno proto bráti kladně, takže jest

$$\frac{\varepsilon\,P\,K}{\varepsilon\,K_1'\,K_2'} = \frac{\varepsilon'\,P\,M}{\varepsilon'\,K_1'\,L},$$

kde ε a rovněž tak ε' má libovolnou z hodnot $+1$, -1. Z toho plyne, že dělící poměry $(K\,M\,P)$, $(K_2'\,L\,K_1')$ se sobě rovnají, následkem čehož přímky $K P$, $K_2'\,K_1'$, $K\,K_2'$, $M\,L$, $P\,K_1$ jsou tečnami jisté paraboly. Tím nabýváme výsledku:

„Přímky, na nichž leží strany jednoduchého čtyřúhelníku $P\,K\,K_2'\,K_1'$, stanoví jakožto tečny parabolu, a pata její tečny kolmé k přímce $P\,K_1'$ jest středem O kuželosečky u."

2. K témuž výsledku jsme vedeni též následující úvahou.

Kolem K_2' jakožto středu opišme kružnici a poloměrem $K_2'\,K_1'$ a kolem K jako středu kružnici b poloměru $K\,P$. Ke každému bodu A na a přidružme bod B na b tak, aby i co do smyslu $\sphericalangle\,K_1'\,K_2'\,A = \sphericalangle\,P\,K\,B$, pak spojnice $A\,B$ budou v důsledku úměry

$$dp : dk' = P\,K : K_1'\,K_2'$$

---

¹) Cf. M. d' Ocagne. Cours de géometrie pure et appliquée T. L., p. 123 a násl.

obalovati křivku dotýkající se přímky $P K_1'$ v bodě O. Považujme kružnice a, b za průměty parallelní do roviny M křivky p dvou kružnic (a), (b) v rovinách rovnoběžných k M. Pak budou přímky (A) (B) spojující ony body na (a) a (b), jež se promítají do A a B popisovati jednodílný hyperboloid H Libovolná další rovina rovnoběžná s M bude hyperboloid H protínati v kružnici (c) a bude děliti úsečky na přímkách jeho mezi kružnicemi (a) a (b) v stálém poměru. Středy kružnic (a), (b), (c) budou ležeti na přímce, a střed kružnice (c) bude děliti vzdálenost středu kružnic (a) a (b) v témže poměru. Mezi kružnicemi c bude jedna c_0, která se dotýká přímky $K_1' P$. Pro tu jest bod dotyku patrně hledaný bod O. Neboť rovina tečná hyperboloidu H v příslušném bodě (O) jest promítající. Je-li C_0 střed kružnice c_0, jest tudíž $C_0 O \perp K_1' P$, a platí úměra

$$P O : K_1' O = K C_0 : K_2' C_0,$$

čímž jest důkaz prve uvedené věty proveden.

načíme přimky $K_2' K_1'$, $K_1' P$, $P K$, $K K_2'$, $L M$ a nekonečně vzdálenou ímku roviny po řadě číslicemi 1, 2, 5, 6, 3, 4, pak vede Brianchonův šestistran 1 2 3 4 5 6 k následující konstrukci:

„K přímce $K P$ vedeme bodem K_1' rovnoběžku, již protneme kolmicí s bodu K_2' na $K_1' P$ spuštěnou v bodě N; pak protíná přímka $K N$ přímku $P K_1'$ v žádaném středu O.“ (1)

Kdybychom si vytkli Brianchonův šestihran 216534, pak bychom obdrželi konstrukci tuto:

Kolmicí s K_2' na $P K_1'$ protneme rovnoběžku bodem K k $P K_1'$ vedenou v bodě E a s průsečíku přímky $E K_1'$ s $K P$ spusťme kolmici na $P K_1'$. Pata této kolmice jest žádaný střed O.

Konstrukce tato jest složitější nežli prve uvedená. Jest to právě ona konstrukce, k níž jinou cestou dospěl Mannheim. Z konstrukce (1) bychom obdrželi snadno též konstrukci, k níž jsem v prve uvedeném pojednání dospěl.

3. Máme-li křivku p a řadu jejích evolut $k, k_1, \ldots$, orientujme nejprv tečnu její x v bodě P tak, aby při kladné orientaci normály y ve smyslu od bodu P k bodu K byla soustava pravoúhlá $(P \,.\, x y)$ kladně orientována, takže poloměr křivosti r v bodě P pro křivku p béřeme kladně. Pro evolutu k ponecháme orientaci tečny $P K$ a orientujeme normalu $K K_1$ tak, aby soustava pravoúhlá o osách $x_1 = P K$, $y_1 = K K_1$ byla taktéž kladně orientována, takže poloměru $r_1 = K K_1$ přísluší znaménko $+$ nebo $-$ dle toho, leží-li na kladné části osy y_1 nebo na záporné. Stejným způsobem jsme vedeni k orientaci normály $K_1 K_2$ a k znaménku poloměru $r_2 = K_1 K_2$.

Vyjádříme-li se zřetelem k tomuto označení uvedenou konstrukci (1) analyticky v soustavě $(P \,.\, x y)$, obdržíme pro souřadnice ξ, η středu O snadno výrazy

$$\xi = \frac{3\,r^2\,r_1}{9\,r^2 - 3\,r\,r_2 + 4\,r_1^2}, \qquad \eta = \frac{9\,r^3}{9\,r^2 - 3\,r\,r_2 + 4\,r_1^2}.$$

Můžeme snadno též vyvoditi rovnici kuželosečky u v soustavě $(P\,.\,x\,y)$.

Poněvadž má u v počátku P poloměr křivosti r, lze její rovnici dáti tvar

$$2\,r\,y = x^2 + 2\,A\,x\,y + B\,y^2\,.$$

Jelikož z této rovnice plynou pro souřadnice středu rovnice

$$\xi + A\,\eta = o\,,\quad A\,\xi + B\,\eta - r = o\,,$$

obdržíme tu jednoduchým výpočtem A a B, takže rovnice křivky u jest

$$(9\,r^2 - 3\,r r_2 + 4\,r_1^2)\,y^2 + (3\,r\,x - r_1\,y)^2 - 18\,r^3\,y = o\,.$$

Je-li naopak kuželosečka u daná, poskytuje uvedená konstrukce k bodu P příslušné body K_1, K_2.

Aby kuželosečka u byla rovnoramennou hyperbolou, musí součet součinitelů při x^2 a y^2 v této rovnici býti roven nulle. To dává podmínku

$$r_2 = 6\,r + \frac{5\,r_1^2}{3\,r},$$

z níž obdržíme mimo to následující zvláštní konstrukci třetího středu křivosti rovnoramenné hyperboly u příslušného danému bodu P na ní.

Protneme rovnoběžky bodem K_1' a K_1 k normále $P\,K$ kolmicí v O k přímce $O\,K_1'$ vztýčenou. Buďtež L a Q_0 body průsečné.

Kružnice středu L, která prochází bodem Q_0 protne $K_1\,Q_0$, ještě v bodě Q. Pak jest $K_1\,K_2 = 3\,K_1\,Q$.

O správnosti této konstrukce se snadno přesvědčíme, použijeme-li vlastnosti, že průměr $O\,L$ hyperboly rovnoramenné u jest sdružený k normále $P\,K$ a že normála tato vytíná z u tětivu, jejíž absolutní délka se rovná $2\,r$.

4. Uveďme ještě jednoduché zevšeobecnění evoluty křivky rovinné takové, že nahradíme body kruhové v nekonečnu v M libovolnými dvěma body J_1, J_2 roviny M. Je-li t tečna křivky p v bodě P, pak odpovídá normále v úvahách předcházejících přímka $P\,K$ harmonicky od t oddělená dvojicí bodovou $J_1\,J_2$. Nazveme nyní přímku $P\,K$ quasinormálou křivky p pro bod P, a křivku k, již $P\,K$ obaluje, když P popisuje křivku p, nazveme první quasievolutou křivky p. Označme K bod, v němž se $P\,K$ křivky k dotýká. Quasinormály $K\,K_1$ křivky k obalují křivku k_1, která nechť se dotýká v bodě K_1 přímky $K\,K_1$. Obdobně odveďme křivku k_2, již obalují quasinormály $K_1\,K_2$ křivky k_1 a budiž K_2 bod dotyku přímky $K_1\,K_2$.

Známe-li bod K_1 sestrojíme na přímce $K\,K_1$ bod K_1' tak, aby $(K\,U\,K_1\,K_1') = -3$, když znamená U průsečík přímky $K\,K_1$

s přímkou $J_1 J_2$, pak kuželosečka, která se přímky $J_1 J$ v bodě na $P K_1'$ dotýká a oskuluje p v bodě P, má v bodě tomto s křivkou p dotyk řádu třetího.

Známe-li ještě bod K_2, sestrojíme na $K_1 K_2$ bod K_2' tak, aby $(K_1 V K_2 K_2') = -3$, když značíme V bod, v němž $K_1 K_2$ a tedy i $P K$ protíná $J_1 J_2$; dále vedeme bodem K_2' přímku g tak, aby její průsečík a průsečík přímky $P K_1'$ s přímkou $J_1 J_2$ byly od sebe body J_1, J_2 harmonicky odděleny. Protne-li g přímku $K_1' V$ v bodě N, pak přímka $K N$ protíná $P K'$ v bodě O, a kuželosečka, která oskuluje p v bodě P a pro niž jest O pólem přímky $J_1 J_2$, má s p v bodě P dotyk řádu čtvrtého.

Bod O obdržíme též, když ke kuželosečce stanovené tečnami $K P$, $P K_1'$, $K_1' K_2'$, $K_2' K$ a $J_1 J_2$ vedeme další tečnu bodem, v němž g protíná přímku $J_1 J_2$. Tečna ta protíná $P K_1'$ v bodě O.

Abychom správnost těchto konstrukcí seznali, odvoďme si k útvarům zde uvedeným útvary kollinearní tak, aby bodům $J_1 J_2$ příslušely body kruhové v nekonečnu, čímž přejdeme ke konstrukci dříve odvozené.

Potenční řady s přirozenou hranicí a jejich pokračování ve smyslu Borelově.

Napsal

M. Kössler.

(Předloženo dne 28. dubna 1922.)

E. Borel sestrojil arithmetický výraz

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - e^{i\beta_n}}$$

pro jisté analytické funkce, které mají přirozenou hranici splývající s konvergenční kružnicí příslušného rozvoje mocninného.[1]

Nebyly však dosud uveřejněny — pokud jest mi známo — mocninné řady, které by skutečně připouštěly transformaci ve výraz Borelův. Sestrojuji v tomto pojednání transformační formuli A, která jest jistým zobecněním výrazu Borelova, neboť připouští také hromadění se jiných singularit nežli polů na přirozené hranici. Při tom představuje levá strana rovnice jednoduchou, avšak dosti obecnou potenční řadu.

Omezuji se však pro tentokráte na vyšetřování hromadících se polů libovolných řádů a dospívám k obecným větám I., II., III. a IV., z nichž poslední jest nejdůležitější.

Rovnice (9), (10) a (11) předvádějí nejjednodušší příklady potenčních řad, které mají Borelovo pokračování vně své přirozené hranice.

O hromadění se singularit podstatných a algebraických, jakož i o některých obecnějších otázkách hodlám pojednati jindy.

* * *

1. Všechny úvahy tohoto pojednání spočívají na jisté transformační formuli, vztahující se ke dvěma libovolným funkcím analytickým. Definujme je řadami mocninnými

---

[1] Émil Borel: Leçons sur les fonctions monogènes. Paříž 1917. G. V. První myšlenky té věci se týkající obsahuje these Borelova: Sur quelques points de la théorie des fonctions. Paříž 1894.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad |z| < R_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; (1a)$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots \qquad |z| < R_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (1b)$$

Zvolme si nyní dvě komplexní konstanty α a y hovící nerovninám

$$|\alpha| \leqq 1, \qquad |y| < R_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

a utvořme analytickou funkci komplexní proměnné x, definovanou řadou

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(y\,\alpha^n)\, b_n\, x^n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Dosadíme-li do tohoto rozvoje místo $f(z)$ řadu (1a), obdržíme řadu dvojnou

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_n\, x^n\, a_k\, \alpha^{nk}\, y^n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

(sčítá se napřed podle k), o níž dokážeme, že konverguje absolutně pokud $|x| < R_2$.

K důkazu utvořme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k\, z^k| < M,$$

která pro $|z| \leqq |y| < R_1$ jistě splňuje napsanou nerovninu, v níž M jest konstanta na z nezávislá. Protože pak podle (2) jest

$$|y\,\alpha^n| \leqq |y|,$$

bude i

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k\, \alpha^{nk}\, y^k| \leqq M \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

pro libovolný index n.

Ježto také řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \,.\, |b_n\, x^n|$$

konverguje pokud $|x| < R_2$, bude a fortiori podle (5) konvergovati i

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n\, x^n| \,.\, \sum_{k=0}^{\infty} |a_k\, \alpha^{nk}\, y^k| \qquad \text{s. e. d.}$$

Jest tedy dovoleno v dvojné řadě (4) zaměniti pořádek sčítání, aniž se změní hodnota součtu. Tak obdržíme vzhledem k (1)

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x\,\alpha^k)\, a_k\, y^k \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3_1)$$

Srovnáním s (3) dostáváme základní vzorec transformační

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(y\,\alpha^n)\, b_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} g(x\,\alpha^n)\, a_n\, y^n, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

který byl odvozen za podmínek

$$|x| < R_2, \quad |y| < R_1, \quad |\alpha| \leqq 1.$$

Význam vzorce tohoto pro další vyšetřování spočívá v tom, že pravá strana může za jistých podmínek konvergovati v oboru širším než levá strana. Vzorce použijeme v tomto pojednání vždy tak, že α a y budeme považovati za konstanty, x za komplexní proměnnou.

2. Druhé omezení, které si pro tentokráte ukládáme, spočívá v tom, že zvolíme za $g(z)$ funkci buď lomenou racionálnou nebo meromorfní. Její poly seřazené podle velikosti absolutních hodnot

$$x_0, \; x_1, \; x_2, \; \ldots$$

nechť jsou všechny od nully různé; pokládejme je za známé a rovněž tak některý z arithm. výrazů, které definují $g(z)$ v celé rovině jako na př. Mittag-Lefflerův rozvoj v parciální zlomky. Funkci $f(z)$ při tom *nijak* v obecnosti neomezujeme.

Za těchto předpokladů dokážeme o analytické funkci $F(x)$ definované řadou (3) tyto čtyři věty:

I. Řada (3) má týž poloměr konvergence jako řada pro $g(z)$.

II. Jestliže $|\alpha| < 1$, představuje pravá strana rovnice (A) analytické pokračování funkce $F(x)$ platné v celé rovině s výjimkou spočetné množiny isolovaných bodů ($\mathfrak{M}$)

$$x_k \, \alpha^{-l}, \quad k, \; l = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Tyto body jsou poly funkce $F(x)$.

III. Jestliže $\alpha = e^{i\beta}$ a β jest číslo souměřitelné s π, platí totéž co v případě II.

IV. Jestliže $\alpha = e^{i\beta}$ a β jest vhodně volené číslo nesouměřitelné s π, jest konvergenční kružnice řady (3) její přirozenou hranicí ve smyslu Weierstrassově. Avšak ve smyslu Borelově připouští funkce $F(x)$ pokračování v celé rovině, které jest sprostředkováno pravou stranou rovnice (A); při tom jsou singularity nahromaděny na kružnicích, které mají střed v počátku a procházejí body $x_0 \;\; x_1 \;\; x_2 \ldots$

3. Důkaz prvých tří vět jest tak jednoduchý, že zajisté postačí jeho stručné naznačení.

Funkce $g(x\,\alpha^n)$ jest omezená v každém konečném oboru K roviny x, který neobsahuje ani uvnitř ani na své hranici žádný z bodů množiny $\mathfrak{M}$. Jest tedy pro všechna x oboru K

$$g(x\,\alpha^n) \leqq N,$$

kdež N jest konečná konstanta. Z toho plyne stejnoměrná konvergence řady (3_1) v oboru K; řada tedy definuje funkci proměnné x analytickou v tomto oboru.

1*

Protože pak každá kružnice se středem v počátku a s poloměrem menším než R_2 jest podle (1_b) oborem typu K, kdežto kružnice s poloměrem R_2 jím není, jest konvergenční poloměr řady (3_1) a tedy i řady (3) nejméně roven číslu R_2.

Věta II. jest pouhým důsledkem stejnoměrné konvergence řady (3_1) a té okolnosti, že body množiny $(\mathfrak{M})$ se nikde v konečnu nehromadí, jestliže $|\alpha| < 1$. To pak má ten následek, že singularity funkce $F(x)$ jsou identické se singularitami jednotlivých sčítanců v rozvoji (3_1) specielně se singularitami prvého členu $g(x)$. Jest tedy pro $|\alpha| < 1$ poloměr konvergence řady (3) skutečně roven R_2.

Jestliže pak $\alpha = e^{i\beta}$, kdež $\beta = \dfrac{2\pi p}{q}$ a p, q jsou celistvá nesoudělná čísla, bude mezi čísly α^n jen q od sebe různých $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{q-1}, 1$. Rovnice (3_1) dostane tvar

$$F(x) = \sum_{k=0}^{q-1} A_k \, g(x\,\alpha^k),$$

kdež A_k jsou konstanty závislé na y. Tím jest dokázána věta III.

Důkaz věty IV. provedeme podrobněji. Základní jeho myšlenky shodují se v podstatě s důkazem, který podal Borel pro funkci uvedenou na první straně tohoto článku, opíraje se o práci Goursat-ovu.²)

Podle předpokladů o funkci $g(z)$ leží na konvergenční kružnici řady (1_b) jen konečný počet polů. Nechť jsou to

$$x_k = R_2 \,.\, e^{i\varphi_k}, \; k = 0, 1, 2, \ldots s; \; \varphi_k < 2\pi;$$

jejich řády označme $\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_s$. Lze tedy psáti $g(z)$ ve tvaru

$$g(z) = \sum_{n=0}^{s} \frac{P_n(z)}{(z - x_n)^{\nu_n}} + g_1(z). \;\; \ldots\ldots\ldots \;\; (6)$$

Při tom jest $P_n(z)$ polynom stupně nižšího než ν_n a $g_1(z)$ funkce analytická a tedy *omezená* uvnitř a na obvodě kružnice

$$|z| \leq R_3 > R_2.$$

Rovněž všechna $P_n(z)$ jsou v tomto oboru *omezena*. Analytický výraz těchto vět jest vystižen v nerovninách

$$|P_n(z)| < P, \quad |g_1(z)| < S,$$

kdež P a S jsou konstanty nezávislé na z a n.

Zvolme si nyní číslo $\beta = 2\pi\gamma$ nesouměřitelné s číslem π a se všemi čísly spočetné množiny³)

$$2\pi k \pm (\varphi_p - \varphi_q), \; p, q = 0, 1, \ldots s.$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

---

²) E. Borel, l. c. p. 57—70.
M. Goursat, Bulletin des sc. math. t. XI. et XVII.

³) To jest vždy možno, neboť množina irracionálných čísel jest nespočetná, kdežto všechna čísla souměřitelná se shora uvedenými tvoří množinu spočetnou.

Pak jsou body spočetné množiny $(\mathfrak{m})$

$$x_k e^{-in\beta}, \; k = 0, 1, \ldots s; \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

všechny od sebe různé a pokrývají všude hustě obvod kružnice R_2. Různost bodů uvažovaných vyplývá z toho, že rovnice

$$x_p e^{-in\beta} = x_q e^{-im\beta}$$

by měla následek

$$2\pi (m - n) \gamma = (\varphi_q - \varphi_p) \pm 2\pi k,$$

kdež n, m, k jsou čísla celistvá. To však jest podle předpokladů o β vyloučeno. Hustota uvažované množiny jest pak pouhým důsledkem známého faktu, že množina bodů

$$m\gamma - [m\gamma], \; m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

při irracionálném γ pokrývá všude hustě interval $(0, 1)$, značíme-li symbolem $[x]$ největší celistvé číslo obsažené v x.

Zvolme si nyní z polů funkce $g(z)$ ležících na kružnici R_2 ten anebo jeden z těch, jimž odpovídá největší ν. Budiž to na př. x_0. V množině $(\mathfrak{m})$ budou mu odpovídati body

$$\xi_n = x_0 e^{-in\beta}, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

které pokrývají kružnici R_2 všude hustě. Dokážeme si větu:

Jestliže se blížíme k jednomu z těchto bodů po přímce spojující jej s počátkem, vzrůstá hodnota $|F(x)|$ nad všechny meze. Z toho plyne, že kružnice R_2 jest přirozenou hranicí funkce $F(x)$ ve smyslu W.

Abychom to dokázali, uvažme, že

$$g(x) = \frac{A_0}{(x - x_0)^{\nu_0}} + \frac{Q(x)}{(x - x_0)^{\nu_0 - 1}} + \sum_{n=1}^{s} \frac{P_n(x)}{(x - x_n)^{\nu_n}} + g_1(x),$$

kdež $Q(x)$ jest polynom stupně $(\nu_0 - 2)$ho. Můžeme tedy podle (3_1) psát

$$F(x) = \frac{A_0 a_p y^p}{(x e^{i\beta p} - x_0)^{\nu_0}} + \frac{Q(x e^{i\beta p}) a_p y^p}{(x e^{i\beta p} - x_0)^{\nu_0 - 1}} + F_1(x) +$$
$$+ F_2(x) + F_3(x) + F_4(x) + F_5(x).$$

Zde značí

$$F_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_1(x^{i\beta k}) a_k y^k; \; F_2(x) = \sum_{k=0}^{h} \sum_{n=1}^{s} \frac{P_n(x e^{i\beta k}) \,.\, a_k y^k}{(x e^{i\beta k} - x_n)^{\nu_n}};$$

$$F_3(x) = \sum_{k=0}^{h}{}' \frac{P_0(x e^{i\beta k}) a_k y^k}{(x e^{i\beta k} - x_0)^{\nu_0}}; \; F_4(x) = \sum_{k=h}^{\infty} \frac{P_0(x e^{i\beta k}) a_k y^k}{(x e^{i\beta k} - x_0)^{\nu_0}};$$

$$F_5(x) = \sum_{k=h}^{\infty} \sum_{n=1}^{s} \frac{P_n(x e^{i\beta k}) a_k y^k}{(x e^{i\beta k} - x_n)^{\nu_n}}.$$

Při tom jest h jisté dosud neurčené číslo celistvé a čárka při Σ značí, že vypuštěn jest sčítanec příslušný $k = p$. Funkce $F_1(x)$, $F_2(x)$ a $F_3(x)$ jsou analytické a konečné v kružnici R_2 a v jistém okolí bodu $x = x_0 e^{-i\beta p}$.

Zkoumejme, jak se mění ostatní výrazy, když x se blíží z počátku po *přímce* k bodu $x_0 e^{-i\beta p}$. Patrně

$$\left| \frac{Q(x e^{i\beta p}) a_p y^p}{(x e^{i\beta p} - x_0)^{\nu_0 - 1}} \right| < \frac{Q_1 \,.\, |a_p y^p|}{|x e^{i\beta p} - x_0|^{\nu_0 - 1}} \,;$$

Q_1 jest největší hodnota, které nabývá $|Q(x)|$ v oboru $|x| \leqq R_2$.

$$|F_4(x)| < \frac{P}{|x e^{i\beta p} - x_0|^{\nu_0}} \,.\, \sum_h^\infty |a_k y^k|$$

$$|F_5(x)| < \frac{s P}{|x e^{i\beta p} - x_0|^{\nu_0}} \sum_h^\infty |a_k y^k| \,.$$

Jest tedy

$$|F(x) - F_1(x) - F_2(x) - F_3(x)| >$$

$$\frac{|A_0|\, |a_p y^p| - (s+1) P \sum\limits_h^\infty |a_k y^k|}{|x e^{i\beta p} - x_0|^{\nu_0}} - \frac{Q_1\, |a_p y^p|}{|x e^{i\beta p} - x_0|^{\nu_0 - 1}} \,.$$

Zvolíme-li číslo h tak veliké, že

$$|A_0| \,.\, |a_p y^p| > (s+1) P \sum_h^\infty |a_k y^k| \,,$$

což následkem absolutní konvergence řady

$$\Sigma\, a_k y^k$$

jest vždy možné, bude patrně výraz uvažovaný vzrůstati nad všechny meze, když x bude probíhati shora definovanou přímkovou dráhu. Protože pak $F_1(x)$, $F_2(x)$ a $F_3(x)$ jsou čísla konečná v okolí bodu $x = x_0 e^{-i\beta p}$, musí $|F(x)|$ blížiti se k ∞. To pak platí pro každé celistvé číslo p. Jsou tedy body $x_0 e^{-i\beta p}$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ singulárními body funkce $F(x)$ a poněvadž pokrývají kružnici R_2 všude hustě, jest tato přirozenou hranicí funkce $F(x)$ s. e. d.

Při této úvaze jsme mlčky předpokládali, že všechna a_p jsou od nully různa. Není-li tomu tak, musíme předpokládati aspoň, že body $x_0 e^{-i\beta p}$, příslušné k a_p od nully různým, pokrývají kružnici R_2 všude hustě. Tím omezujeme do jisté míry obecnost funkce $f(z)$.

4. Zbývá dokázati druhou část věty IV. Z důvodů stručnosti učiníme tak pro speciální případ, kdy všechna čísla φ_p jsou souměřitelna s π a pro určitě zvolené

$$\beta = 2\pi(\sqrt{2} - 1).$$

Ke konci pak naznačíme, jak toto omezení dá se odstraniti.

Sledujme, jak se mění funkce daná arithm. výrazem (3_1), když x probíhá body přímky spojující počátek s bodem

$$x = R_3 e^{-\frac{2\pi p_1}{q_1} i} \,,$$

kdež $p_1 < q_1$ jsou nesoudělná celistvá čísla.

Je-li x bod na této přímce a A bod na kružnici R_2, bude vždy

$$|x - A| \geqq R_2 \frac{\psi}{4},$$

značí-li ψ obloukovou vzdálenost obou bodů měřenou z bodu O obloukem menším než π.

Zvolíme-li za A bod množiny (m), t. j.

$$A = x_k e^{-im2\pi(\sqrt{2}-1)},$$

bude

$$\psi = 2\pi \left| m\sqrt{2} - m - E - \frac{p}{q} - (1) \right|,$$

kdež nesoudělná čísla $p < q$ jsou stanovena vztahem

$$\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} + \varphi_k - \left[\frac{p_1}{q_1} + \varphi_k\right],$$

$$E = [m\sqrt{2} - m];$$

jednotka v závorce (1) se odčítá jen tehdy, když bez ní by ψ bylo větší než π. Nyní lze snadno nalézti dolní mez pro ψ. Jest totiž celé číslo

$$|2q^2m^2 - \{mq + Eq + p + (q)\}^2| \geqq 1.$$

Protože pak

$$mq\sqrt{2} + mq + [m\sqrt{2} - m]q + p + (q) < 4mq + 2q,$$

bude

$$\left| m\sqrt{2} - m - E - \frac{p}{q} - (1) \right| > \frac{1}{2q^2(2m+1)}$$

a tedy

$$|x - x_k e^{-im2\pi(\sqrt{2}-1)}| = |x e^{im2\pi(\sqrt{2}-1)} - x| > \frac{\pi R_2}{4q^2(2m+1)} = \frac{C}{2m+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Zde závisí q a tedy i C na volbě x_k. Protože těchto x_k jest pouze $(s + 1)$, bude nerovnina právě napsaná platiti pro každé k, když zvolíme v ní za q největší z čísel, která přísluší různým x_k.

Podle (6), (7) a (8) jest však

$$|g(x e^{im\beta})| < P \cdot \sum_{k=0}^{s} \frac{(2m+1)^{\nu_k}}{C^{\nu_k}} + S$$

a tedy podle rovnice (3_1)

$$|F(x)| < a_0 g(x) + P \sum_{k=0}^{s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+1)^{\nu_k}}{C^{\nu_k}} |a_m y^m| + S \sum_{k=0}^{\infty} |a_k y^k| .$$

Při tom musí x ležeti na přímce spojující počátek s bodem shora vytčeným na kružnici R_3.

Z toho plyne, že řada (3_1) jest na každém vnitřním úseku této přímky stejnoměrně konvergentní a definuje tam tedy spojitou funkci proměnné x.

Doslova táž věta platí o každé řadě vzniklé opětovaným derivováním řady (3_1) člen za členem. Protože pak $R_3 > R_2$, vidíme, že řada (3_1) představuje Borelovo přímkové pokračování funkce $F(x)$ dané potenční řadou (3) za její přirozenou hranici.

Tím jest dokázána věta IV. pro zvláštní formu irracionality γ. Avšak důkaz dá se rozšířiti i na jiné formy této irracionality týmž postupem, jehož užil Borel v citovaných Leçons p. 66 (Remarque). Proto upouštím od podrobného provedení.

5. Uvedu nejjednodušší řady uvažovaného typu. Volím

$$f(z) = \frac{1}{1-\varrho z}, \quad g(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \varrho = \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}; \quad a > b.$$

Transformační vzorec (A) dává

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1-\varrho e^{in\beta} y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^n y^n}{1-e^{in\beta} x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Levá strana jest potenční řada konvergující v kruhu $|x| < 1$ a mající jej za přirozenou hranici, kdežto pravá strana jest výraz typu Borelova, jehož „poly“ hromadí se na jednotkové kružnici.

Kladu-li $y = 1$ a pokládám-li na okamžik x, ϱ za čísla reálná, obdržím separací částí reálných a imaginárných řadu ještě jednodušší

$$\sqrt{a^2-b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a-b\cos n\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{b+\sqrt{a^2-b^2}}\right)^n \frac{1-x\cos n\beta}{1-2x\cos n\beta+x^2}. \quad (10)$$

Řada tato má tytéž vlastnosti jako (9). Za β mohu voliti na př. úhel v Pythagorejském trojúhelníku daný vztahem

$$p^2+q^2=r^2, \ \cos\beta = \frac{q}{r},$$

kdež $p < q < r$ jsou celistvá nesoudělná čísla a mohu tedy koëficienty řady (10) učiniti racionálnými, zvolím-li také a, b racionálně.[4])

Jiný jednoduchý příklad vznikne, kladu-li

$$g(z) = z \operatorname{cotg} z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} z^{2n},$$

$$A_{2n} = \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!}.$$

Tak dostanu řadu

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{2n} z^{2n}}{a-b\cos 2n\beta}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

která představuje funkci schopnou Borelova pokračování v celé rovině. „Poly“ se hromadí při tom na kružnicích se středem v počátku a o poloměrech π, 2π, 3π, ...

O některých dalších příkladech pojednám snad jindy.

---

[4]) Irracionalitu podílu $\frac{\beta}{\pi}$ dokáži jinde.

Příspěvek k Laguerrovým posloupnostem.

Napsal

K. ČUPR.

Předloženo dne 28. dubna 1922.

Konvergují-li polynomy

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots f_n(x),$$

stupně vesměs m, v určitém oboru stejnoměrně k polynomu $f(x)$ (stupně patrně nejvýše m), konvergují k němu dle věty Vitaliho stejnoměrně v celé rovině.

Nullová místa všech polynomů $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ nechť leží na spojité křivce dané parametricky:

$$x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),$$

kdež φ_1, φ_2 jsou funkce spojité. Tato nullová místa tvoří množinu, jejímiž limitními body dle věty Hurwitzovy (Math. Annal. XXXIII., p. 249) jsou nullová místa limitního polynomu $f(x)$. Snadno nahlédneme, že i tyto limitní body musí ležeti na křivce $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$; neboť jest

$$\begin{aligned} lim\ \varphi_1(t_n) &= \varphi_1(lim\, t_n) \\ lim\ \varphi_2(t_n) &= \varphi_2(lim\, t_n). \end{aligned}$$

Uvažována byla zejména posloupnost polynomů, majících nullová místa jen na ose X, nebo jen na ose Y. Případ, kdy nullová místa jsou na kružnici $x = cos\, t$, $y = sin\, t$, snadno převede se na první určitou lineární lomenou transformací, jíž se převádí obvod jednotkové kružnice v osu X.

2. Budiž dána rovnice algebraická $f(x, t) = 0$ stupně $n^{tého}$ dle x mající jen reálná nullová místa pro t v intervalu $a \ldots b$. V intervalu tom nechť jsou všechny kořeny současně stoupajícími nebo klesajícími funkcemi t. Jen reálné kořeny má i rovnice $f(x_1, t_0 + \varDelta t_0) = 0$, při čemž $a < t_0 + \varDelta t_0 < b$. Volme $\varDelta t_0$ tak malé, aby kořeny rovnice $f(x) = 0$ — značme

je $x_1, x_2, \dots x_n$ — separovaly kořeny rovnice druhé — značme je $\xi_1\, \xi_2 \dots \xi_n$. Do rovnice

$$f(x_1, t_0 + \Delta t_0) - f(x_1, t_0) = 0$$

dosaďme $x = x_1, x_2, \dots x_n$; obdržíme tak n hodnot vykazujících $(n-1)$ měn; poslední rovnice jest stupně buď n nebo $n - 1$ — má tedy všechny reálné kořeny; jen reálné kořeny má i rovnice

$$\frac{f(x, t_0 + \Delta t_0) - f(x, t_0)}{\Delta \mathrm{t}_0} = 0$$

i limitní rovnice pro $\lim \Delta t_0 = 0$, t. j. rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = 0, \quad t = t_0,$$

předpokládaje, že derivace v bodě $t = t_0$ existuje.

Při tomto důkaze jsme mlčky předpokládali vlastně, že $f(t, x) = 0$ pro $a < t < b$ má kořeny vesměs různé. Předpokladu toho snadno se zprostíme.

Budiž

$$f(x) = \varphi(t, x) \,.\, \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} [x + \alpha_1 (1 + \varkappa \varepsilon)];$$

α_1 budiž funkcí t derivace schopnou, ε konstanta reálná.

Pak $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial t} = 0$, má též jen reálné kořeny pro všechna ε i pro $\lim \varepsilon = 0$; tak dojdeme rovnice

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} (x + \alpha_1)^n + n \varphi(t_1 x) (x + \alpha_1)^{n-1} \alpha_1' = 0,$$

což jest týž výsledek, jako kdybychom byli přímo derivovali rovnici

$$(x + \alpha)^n \varphi(t, x) = 0.$$

Budiž $f(x, t) = 0$ rovnice splňující svými kořeny uvedené podmínky v okolí bodu $t = t_0$; stoupají-li, volme ve dvojčlenu

$$\lambda x + \varepsilon t$$

$\varepsilon = -1$, klesají-li, volme $\varepsilon = +1$. Derivujeme dle parametru rovnice

$$(\lambda x + \varepsilon t)^\varkappa f(x, t) = 0$$
$$(\varkappa \lambda x + \varepsilon t)^\varkappa f(x, t) = 0,$$

$\varkappa$ celistvé.

Jen reálné kořeny mají potom i rovnice

$$\varkappa f + (\lambda x + \varepsilon t) \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad t = t_0,$$

$$f + \left(\lambda x + \frac{\varepsilon t}{\varkappa}\right) \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad t = t_0,$$

pro všechna celistvá kladná $\varkappa$. Nechme $\varkappa$ vzrůstat do nekonečna přirozenou řadou číselnou máme, že totéž platí i o rovnici

$$f + \lambda x \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad t = t_0.$$

3. Rovnice $f(t) \equiv a_0 + a, t + \dots + a_m t^m = 0$ mějž jen reálné kořeny vesměs různé; pak reálné vesměs různé kořeny má rovnice $f'(t) = 0$ i rovnice

$$f(t) + \alpha_1 x f'(t) = 0$$

$$f(t) + \alpha_1 x f'(t) + \alpha_2 x [f'(t) + \alpha_1 x f''(t)] =$$

$$f(t) + (\alpha_1 + \alpha_2) x f'(t) + \alpha_1 \alpha_2 x^2 f''(t) = 0, \quad \text{atd.};$$

tak dospějeme k větě Waringově, kterou lze formulovati takto: je-li $f(t) \equiv a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m = 0$ rovnice jen o reálných nullových místech *vesměs různých* a má-li rovnice $\varphi \equiv b_0 + b_1 t x + b_2 t^2 x^2 + \dots + b^n t^n x^n = 0$ jen reálná nullová místa, má jen reálná a vesměs různá nullová místa rovnice v t

$$F(t_1 x) = b_0 f(t) + b_1 x f'(t) + \dots + b^n x^n f^{(n)} t = 0.$$

Značme tuto rovnici symbolicky

$$\varphi(D) f(t) = 0.$$

Tažme se, kdy tato rovnice má jen reálné kořeny dle x.

Má-li $f(t) = 0$ dle t jen reálné kořeny, má je i rovnice dle y

$$f(y + t) = f(t) + \frac{y}{1!} f'(t) + \frac{y^2}{2!} f''(t) + \dots = 0.$$

Schur odvodil tuto větu: jsou-li $c_{\nu-1}$, c_ν, $c_{\nu+1}$ tři za sebou jdoucí koefficienty rovnice o jen reálných kořenech, platí

$$\nu\, c_\nu^2 - (\nu + 1)\, c_{\nu+1}\, c_{\nu-1} > 0;$$

tedy v poslední rovnici jest

$$\frac{\nu\, [f^{(\nu)}(t)]^2}{\nu!\ \nu!} - \frac{(\nu + 1)\, f^{(\nu+1)}(t)\, f^{(\nu-1)}(t)}{(\nu - 1)!\ (\nu + 1)!} > 0$$

čili

$$[f^{(\nu)}(t)]^2 - f^{(\nu+1)}(t)\, f^{(\nu-1)}(t)] > 0.$$

Má-li rovnice $\varphi(D) f(t) = 0$ míti dle x jen reálné kořeny, stačí dle věty de Gua

$$b_\varkappa^2 f^{(\varkappa)}(t)^2 > b_{\varkappa+1} f^{(\varkappa+1)}(t) \,.\, b_{\varkappa-1} f^{\varkappa-1}(t,)$$

kterážto nerovnina bude jistě splněna, když $b_{\varkappa+1}$ a $b_{\varkappa-1}$ jsou téhož znamení, což nastane jistě tenkráte, když $\varphi(t)$ má kořeny téhož znamení.

Geometricky lze interpelovati takto:

Křivka $F(t_1, x) = 0$ má n reálných průsečíků vesměs různých s každou přímkou rovnoběžnou s osou T. Křivka ta skládá se z n tahů nikde se neprotínajících a nemajících žádnou tečnu rovnoběžnou s osou T, sice by musilo býti současně

$$F(t_1, x) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t} F(t_1, x) = 0,$$

což jest proti předpokladu.

To znamená, že oněch n tahů buď ustavičně zároveň stoupá nebo zároveň klesá; v průsečících s osou X mají všechny tahy touž směrnici a to $\frac{-b_1}{b_0}$. Můžeme tedy t považovati za parametr a derivovati dle něho v každém místě.

Tedy jen reálné kořeny mají i rovnice

$$\varphi(D) f'(t) \equiv \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = b_0 f'(t) + b_1 x f''(t) + \ldots + b^n x^n f^{(n+1)}(t) = 0$$
$$\varphi(D) f''(t) \equiv \frac{\partial^2 F(t_1 x)}{\partial t^2} = b_0 f''(t) + b_1 x f'''(t) + \ldots + b^n x^n f^{(n+2)}(t) = 0$$
$$\varphi(D) f^{(\varkappa)}(t) \equiv \frac{\partial^\varkappa F(t, x)}{\partial t^\varkappa} = b_0 f^{(\varkappa)}(t) + b_1 x f^{(\varkappa+1)}(t) \ldots + b^n x^n f^{(n+\varkappa)}(t) = 0.$$

K celistvé transcendentě

$$\psi(t) = e^{-a t^2 + b t} \prod_1^\infty \left(1 + \frac{t}{\alpha_\varkappa}\right) e^{-\frac{t}{\alpha^\varkappa}},\ a \geqq 0, \ldots \text{I.}$$

lze se stejnoměrně blížiti polynomy mající jen reálná nullová místa:

$$\psi_m = \left(1 - \frac{a t^2}{m}\right)^m \left(1 + \frac{b t}{m}\right)^m \prod_1^m \left(1 + \frac{t}{\alpha_\varkappa}\right) \left(1 - \frac{t}{\alpha_\varkappa m}\right)^m.$$

Jen reálná nullová místa má i rovnice

$$\varphi(D) \psi_m^{(\varkappa)}(t) = 0 \quad \text{dle } x$$

a tudíž i rovnice pro $\lim m = \infty$, t. j. rovnice dle x

$$b_0 \psi^{(\varkappa)}(t) + b_1 \psi^{(\varkappa+1)}(t) \,.\, x + b_2 \psi^{(\varkappa+2)}(t) \,.\, x^2 + \ldots + b_n \psi^{(\varkappa+n)}(t) \,.\, x^n = 0.$$

Dospěli jsme tohoto výsledku:

„Je-li

$$\varphi(x) \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0$$

rovnice mající nullová místa téhož znamení a $\psi(t)$ celistvá transcendenta tvaru I., má reálná nullová místa i rovnice dle x

$$b_0 \psi^{(\varkappa)}(t) + b_1 \psi^{(\varkappa+1)}(t) \,.\, x + \ldots + b_n \psi^{(\varkappa+n)}(t) \,.\, x^n = 0,$$

$\varkappa = 0, 1, 2, 3, \ldots$“

Již Laguerre vyhledával posloupnosti čísel

$$c_1,\ c_2,\ c_3 \ldots,\ \ c_\nu \ldots$$

takové, aby — má-li $\varphi(x) = 0$ jen reálné kořeny, měla je též rovnice

$$c_\varkappa b_0 + c_{\varkappa+1} b_1 x + \ldots + \ldots + c_{\varkappa+n} b_n x^n = 0\,.$$

Zde jsme pro případ, že $\varphi(x) = 0$ má kořeny téhož znamení, dospěli k posloupnosti velmi obecné:

$$\psi(t),\ \psi'(t),\ \psi''(t),\ \psi'''(t) \ldots.$$

Volme $\psi(t) = \sin t$ a máme posloupnost

$$1,\ \mathrm{ctg}\, t,\ \ -1,\ -\mathrm{ctg}\, t,\ 1,\ \mathrm{ctg}\, t,\ -1,\ -\mathrm{ctg}\, t, \ldots \quad (t \neq k\pi.)\,;$$

když $\psi(t) = \cos t$, máme

$$1,\ -\mathrm{tg}\, t,\ -1,\ \mathrm{tg}\, t,\ 1,\ -\mathrm{tg}\, t,\ -1,\ \mathrm{tg}\, t, \ldots \ \left(t \neq \frac{2k+1}{2}\pi.\right).$$

Položme ve výrazu pro ψ_m

$$a = 0, \quad b = 1, \quad t = 0$$

a obdržíme posloupnost

$$\psi_m(0),\ \psi'_m(0),\ \psi''_m(0), \ldots$$

a tudíž pro $\lim m = \infty$ (oprávněnost limitního přechodu jest na snadě)

$$1,\ \frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!} \ldots \frac{1}{m!} \ldots,$$

je-li $b = 0$, $a = 1$, $t = 0$, obdržíme podobnou posloupnost

$$1,\ 0,\ -\frac{1}{1!},\ 0,\ \frac{1}{2!},\ 0,\ -\frac{1}{3!},\ 0,\ \frac{1}{4!}, \ldots$$

Jsou-li $c_1, c_2, c_3 \ldots, c'_1, c'_2, c'_3 \ldots$ dvě posloupnosti uvedené vlastnosti, jest takovou i posloupnost

$$c_\varkappa c'_m,\ c_{\varkappa+1} c'_{m+1},\ c_{\varkappa+2} c'_{m+2}, \ldots,$$

zejména tedy i posloupnost

$$\frac{\psi(t)}{1},\ \frac{\psi'(t)}{1!},\ \frac{\psi''(t)}{2!}, \ldots \frac{\psi^{(\varkappa)}(t)}{\varkappa!}\,.$$

Případem $t = 0$ zabývali se Schur a Pólya (Crelle 144); je-li $\psi(t)$ polynom, dospíváme k větě Schurově a Maloově.

4. Ku konci zmíněného pojednání slibují autoři, že pojednají o posloupnostech, při kterých rovnicím jen o komplexních kořenech zůstávají opět jen kořeny komplexní. Pokud nám známo, nestalo se tak dosud, i ne-

bude od místa, uvésti takové posloupnosti. Konstrukce posloupností takových jest velmi jednoduchá.

Rovnice

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2\varkappa} x^{2\varkappa} = 0$$

nechť má jen komplexní kořeny; jen komplexní kořeny má i rovnice

$$f(t) \left\{ a_0 + x \,.\, a_1 \varphi(t) + \ldots x \,.\, a_{2\varkappa} [\varphi(t)]^{2\varkappa} \right\} = 0,$$

kdež $f(t)$ buď v daném intervalu $\alpha \ldots \beta$ znaménka stejného. Pak ani

$$\int_\alpha^\beta f(t) \left[a_0 + a_1 \varphi(t) \,.\, x + \ldots + a_{2\varkappa} \,.\, x^{2\varkappa} [\varphi(t)]^{2\varkappa}\right] d\,t =$$

$$\left[a_0 + a_1 \varphi(t_1)\, x + \ldots + a_{2\varkappa} [\varphi(t_1)]^{2\varkappa}\right] \int_\alpha^\beta f(t)\, d\,t,$$

$\alpha < t_1 < \beta_2$, nemůže pro žádné reálné x státi se 0. Předpokládáme ovšem, že příslušné integrály existují.

Budiž $f(t) = e^{-at}$, $\varphi(t) = e^{-bt} \,.\, t^c$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$; tak obdržíme posloupnost

$$c_\varkappa = \frac{\Gamma(c\varkappa + 1)}{(a + \varkappa b)^{ck+1}}$$

a odsud pro $c = 1$, $a = 0$, $b = 1$, posloupnost

$$c_\varkappa = \frac{\varkappa!}{\varkappa^{\varkappa+1}} \,.$$

Jak Hermite dokázal, nemá $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$ reálných kořenů, nemá jich tedy ani rovnice

$$1 + \frac{x}{2^3} + \frac{x^2}{3^4} + \frac{x^3}{4^5} \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n+1)^{\cdot 2n+2}} = 0.$$

Položme $f(t) = \left[l \frac{1}{t}\right]^q$, $\varphi(t)^\varkappa = t$; tak obdržíme posloupnost

$$c_\varkappa = \int_0^1 \left(l \frac{1}{t}\right)^q . \, t^\varkappa \, d\,t = \frac{\Gamma(q+1)}{(\varkappa+1)^{q+1}} \,;$$

protože nemá rovnice $1 + x + \ldots x^{2n} = 0$ reálných kořenů, nemá jich ani

$$\frac{1}{1^{q+1}} + \frac{x}{2^{q+1}} + \frac{x^2}{3^{q+1}} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n+1)^{q+1}} = 0 \,.$$

Vyložíme ještě methodu jinou, pomocí níž dojdeme analogických vět k větě Waringově.

Nemění-li $f(t)$ v intervalu $\alpha \ldots \beta$ znaménka a má-li $\varphi(x + t)$ dle x jen kořeny komplexní, pak ani

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, \varphi(x+t)\, dt = 0$$

nemá než kořeny komplexní — z týchž důvodů jako prve. Jest však

$$\varphi(x+t) = \varphi(x) + \frac{t}{1!}\varphi'(x) + \frac{t^2}{2!}\varphi''(x) + \dots$$

takže lze psáti

$$F(x) = \varphi(x)\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt + \varphi'(x)\int_{\alpha}^{\beta} t\, f(t)\, dt + \dots + \varphi^{2\varkappa}(x)\int_{\alpha}^{\beta} t^{2\varkappa} f(t)\, dt = 0\,.$$

Položme*) $m = 0$, $n = \infty$, $f(t) = e^{-at}$, $a > 0$ a máme, že

$$\varphi(x) + a\,\varphi'(x) + a^2\varphi''(x) + \dots + a^{2n}\varphi^{(2\varkappa)}(x) = 0$$

nemá než kořenů komplexních. Je-li $\varphi(x) \equiv x^{2n} + (2\varkappa)!\, s$, $s > 0$, $a = 1$, obdržíme větu podobnou větě Hermiteově:

$$s + 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^{2\varkappa}}{(2\varkappa)!} = 0$$

nemá pro $s > 0$ reálných kořenů.

Je-li $f(t) = e^{-\frac{t^2}{4}}$, $a = -\infty$, $b = \infty$, obdržíme rovnici

$$\varphi(x) + \frac{\varphi''(x)}{2!} + \frac{\varphi^{IV}(x)}{4!} + \dots + \frac{\varphi^{(2\varkappa)}(x)}{(2\varkappa)!} = 0.$$

Budiž $f(t) = \left(l\,\frac{1}{t}\right)^q$, $a = 0$, $b = 1$; tak obdržíme rovnici

$$\varphi(x) + \frac{\varphi'(x)}{2^{q+1}} + \frac{\varphi''(x)}{3^{q+1}} + \dots + \frac{\varphi^{2\varkappa}(x)}{(2\varkappa+1)^{q+1}} = 0.$$

Jiná kategorie rovnic majících jen komplexní kořeny, z věty, jíž jsme použili v odstavci 3. Má-li $f(x)$ jen reálné různé kořeny, jest

$$f^{(\nu)}(x)^2 - f^{\nu-1}(x)\,.\,f^{\nu+1}(x) > 0$$

pro všechna x; to jest rovnice

$$f^{(\nu)}(x)^2 - f^{(\nu-1)}(x)\, f^{(\nu+1)}(x) = 0$$

má jen kořeny komplexní.

---

*) Substitucí $e^{-t} = \tau$ přejdeme k integrálům o konečných mezích.

Vektorový počet v prostoru o libovolném počtu rozměrů.

Napsal

Dr. J. Žďárský.

(Předloženo dne 28. dubna 1922.)

1. Základní pojmy a operace početní.

Uvažujme řadu libovolně zvolených pojmů

$$A,\ B,\ C,\ \dots$$

a zaveďme addiční operaci $+$, které předepíšeme *principy associace a kommutace* a multiplikační operaci $.$, která říditi se bude principem *associace a distribuce.*

$$A+B=B+A,\quad (A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C,\quad A+0=A$$
$$(A\,.\,B)\,.\,C=A\,.\,(B\,.\,C)=A\,.\,B\,.\,C,\quad (A+B)\,.\,C=A\,.\,C+B\,.\,C,$$
$$A\,.\,(B+C)=A\,.\,B+A\,.\,C,\quad A\,.\,0=0.$$

Tyto součty a součiny uvažujme zatím jako ryze formální, bez určitého významu; bude-li se jednati o pojmy geometrické, bude dovoleno přiřknouti jim takový geometrický význam, který bude ve shodě s definicí pojmů a s předepsanými principy.

V geometrii a ve fysice vyjadřujeme veličiny číslem s připojeným pojmenováním, které představuje zpravidla přesně definovanou jednotku. Veličiny se společnou jednotkou zovou se „skaláry“ a počítání s nimi redukuje se na počítání s čísly.

Počtářskou representací skaláru jest vždy číslo. Úsečka určité délky a určitého směru nazývá se „vektor“. Při počítání smíme každý vektor nahraditi jiným, stejně dlouhým a téhož směru — vektor připouští libovolnou translaci. K označení vektorů užiji malé latinské a k označení skalárů (čísel) řecké abecedy.

Operujeme-li jen se skaláry, můžeme zavedené operace $+$ *a* $.$ *uvažovati* — úplně ve shodě s předepsanými principy — *jako obyčejnou addici a multiplikaci arithmetickou.*

V daném ν rozměrném prostoru Ω_ν vytkněme pevný bod O, který nazveme „počátek“, načež poloha libovolného bodu M určena bude vektorem $\overline{OM} = m$. Veďme počátkem ν vzájemně kolmých jednotek vektorových $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$. Orthog. průmět libovolného vektoru m do hrany i_ϱ dá se co do velikosti a smyslu vyjádřiti číslem α_ϱ a vektor m můžeme počtářsky definovati symbolem

$$m = \sum_{\varrho=1}^{\nu} \alpha_\varrho \, . \, i_\varrho \, , \tag{1}$$

což jest v úplném souhlasu s předepsanými principy a s geometrickou definicí vektoru. (α_ϱ jsou pravoúhlé souřadnice bodu M.)

Geometrický význam součtu vektorů bude týž jako v prostoru třírozměrném i se všemi důsledky z toho plynoucími, rovněž násobení vektoru číslem bude se říditi týmiž pravidly jako v prostoru třírozměrném.

Přejděme nyní k součinu vektorů, definujíce

$$i_\varrho \, . \, i_\varrho = i_\varrho^2 = 1, \quad i_\varrho \, . \, i_\sigma = - \, i_\sigma \, . \, i_\varrho, \text{ pokud } \sigma \neq \varrho, \tag{2}$$

při čemž ϱ, σ jsou celá čísla od 1 do ν. Pomocí těchto rovnic lze v každém součinu ze základních jednotek vektorových i_ϱ a skalárů, ku př.

$$i_3 \, . \, i_1 \, . \, \alpha \, . \, i_5 \, . \, i_5 \, . \, \beta \, . \, i_2 \, . \, i_5 \tag{a}$$

všechny skalárné činitele převésti na začátek a následující potom součin vektor. jednotek dá se upraviti — třeba vzestupně dle indexů — tak, aby všechny činitele měly vesměs různé indexy. Součin (a) přejde ve tvar

$$\alpha \, . \, \beta \, . \, i_1 \, . \, i_2 \, . \, i_3 \, . \, i_5 .$$

Ať provedeme tuto úpravu jakýmkoli způsobem, v jakémkoli pořádku, dostaneme pokaždé týž výsledek a pouhým důsledkem toho jest, že *bude možno podržeti předepsané principy zcela obecně za současné platnosti rovnic* (2).

Jsou-li α^ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots, \nu$) směrové kosiny vektorové jednotky m vzhledem k základnímu ν hranu, jest, jak známo, $\sum\limits_{\varrho=1}^{\nu} \alpha_\varrho^2 = 1$ a ježto $m = \sum\limits_{\varrho=1}^{\nu} \alpha_\varrho \, . \, i_\varrho$, dostáváme

$$m^2 = 1. \tag{b}$$

Čtverec každé jednotky vektorové $=$ *kladné jednotce číselné.*

Jsou-li m, n vzájemně kolmé jednotky vektorové, jest $m \, . \cos\varphi + n \, . \sin\varphi$ opět vektorová jednotka a musí tudíž pro všecka φ

$$(m \, . \cos\varphi + n \, . \sin\varphi) \, . \, (m \, . \cos\varphi + n \, . \sin\varphi) = 1.$$

Odtud

$$m \, . \, n = - n \, . \, m. \tag{c}$$

Součin dvou vzájemně kolmých jednotek vektorových tvoří jednotku dvourozměrnou čili čtvercovou, která změní znaménko, vyměníme-li oba činitele.

Rovnice (b, c) praví, že všecky směry v prostoru Ω_ν jsou geometricky i počtářsky rovnocenné. Ježto

$$(m \, . \cos \varphi + n \, . \sin \varphi) \, . \, (- m \, . \sin \varphi + n \, . \cos \varphi) = m \, . \, n,$$

platí věta: *Čtvercová jednotka se nemění, pohybuje-li se ve své vlastní rovině. Čtvercová jednotka definuje směr a orientaci roviny.*

Překlopíme-li čtvercovou jednotku znovu do její roviny, změní znaménko. Dvě sobě rovné čtvercové jednotky leží v téže nebo v rovnoběžných rovinách a mají stejnou orientaci.

Systém λ vzájemně kolmých vektor. jednotek, při kterém dbám také pořadu hran, budu zváti „*normálný λ hran*“; součin hran (utvořený v předepsaném pořadu) tvoří λ rozměrnou jednotku „příslušící norm. λ hranu“.

Jednotka λ rozměrná se nezmění přemístěním ve svém vlastním prostoru Ω_λ (při kterém prostor Ω_λ neopustí). Je-li a_ϱ hrana λ rozm. jednotky a b_ϱ její nová poloha, jest

$$a_1 \, . \, a_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, a_\lambda = b_1 \, . \, b_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, b_\lambda.$$

Důkaz: Supponujme, že platí věta pro $\lambda - 1$ rozměrné jednotky. Prostory určené $\lambda - 1$ rozměrnými jednotkami

$$a_1 \, . \, a_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, a_{\lambda-1}, \quad b_1 \, . \, b_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, b_{\lambda-1}$$

mají společný prostor $\Omega_{\lambda-2}$ a každou z nich lze — dle supposice — přemístiti tak, aby $\lambda - 2$ hran zapadlo do $\Omega_{\lambda-2}$, i můžeme psáti

$$\left.\begin{aligned} a_1 \, . \, a_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, a_{\lambda-1} &= c_1 \, . \, c_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, c_{\lambda-2} \, . \, a'_{\lambda-1} \\ b_1 \, . \, b_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, b_{\lambda-1} &= c_1 \, . \, c_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, c_{\lambda-2} \, . \, b'_{\lambda-1} \end{aligned}\right\} . \tag{d}$$

Jednotky $a'_{\lambda-1}$, $b'_{\lambda-1}$ a rovněž a_λ, b_λ jsou absolutně kolmé k $\Omega_{\lambda-2}$ a leží tedy v téže rovině, pročež

$$a'_{\lambda-1} \, . \, a_\lambda = b'_{\lambda-1} \, . \, b_\lambda.$$

(O dvou prostorech pravím, že stojí na sobě absolutně kolmo, stojí-li každý vektor jednoho prostoru kolmo na každém vektoru druhého prostoru.)

Znásobíme-li první z rovnic (d) vektorem a_λ a druhou b_λ, budou — vzhledem k poslední rovnici — pravé a tedy i levé strany stejné, t. j. bude

$$a_1 \, . \, a_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, a_\lambda = b_1 \, . \, b_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, b_\lambda.$$

Dle toho, platí-li věta pro $\lambda - 1$ rozměrnou jednotku, platí také pro λ rozměrnou jednotku a ježto platí pro $\lambda = 2$, má platnost obecnou.

Nyní dokážeme obrácenou větu: *Normálné* λ *hrany* (vycházející z počátku) *se společnou* λ *rozměrnou jednotkou leží v témž prostoru* λ *rozměrném* Ω_λ *a dají se pouhým přemístěním v prostoru* Ω_λ *sjednotiti.*

Budiž

$$a_1 \,.\, a_2 \,.\, \ldots \,.\, a_\lambda = b_1 \,.\, b_2 \,.\, \ldots \,.\, b_\lambda. \tag{e}$$

Jednotky $a_1 \,.\, a_2 \,.\, \ldots \,.\, a_{\lambda-1}$, $b_1 \,.\, b_2 \,.\, \ldots \,.\, b_{\lambda-1}$ mají společný prostor $\Omega_{\lambda-2}$ a můžeme je v jejich vlastních prostorech přemístiti tak, aby platily rovnice (d). Vložíme-li do (e), dostaneme

$$a'_{\lambda-1} \,.\, a_\lambda = b'_{\lambda-1} \,.\, b_\lambda.$$

Čtvercová jednotka po pravé straně dá se však pouhým přemístěním ve své vlastní rovině sjednotiti se čtvercovou jednotkou po levé straně rovnice, a tohoto přemístění ostatní hrany se neúčastní. Tím jest důkaz proveden.

Jednotky λ rozměrné

$$a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, \ldots \,.\, a_\lambda, \quad a_2 \,.\, a_1 \,.\, a_3 \,.\, \ldots \,.\, a_\lambda$$

liší se pouze znaménkem a pravíme o nich, že jsou opačně orientovány. Tyto jednotky nelze ve společném jejich prostoru Ω_λ přemístiti tak, aby se souhlasné hrany kryly, můžeme je však přivésti ke krytí, překlopíme-li jeden z obou λ hranů v $\lambda + 1$ rozměrném prostoru zpět do prostoru Ω_λ. Jest totiž

$$a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, \ldots \,.\, a_\lambda \,.\, a_{\lambda+1} = a_2 \,.\, a_1 \,.\, a_3 \,.\, \ldots \,.\, a_\lambda \,.\, (- a_{\lambda+1}).$$

Tyto dvě $(\lambda + 1)$ rozměrné jednotky lze přemístěním sjednotiti a při tom přikryjí se souhlasné hrany dříve uvažovaných opačně orientovaných $\lambda - 1$ hranů.

Jednotka λ *rozměrná definuje — až na translaci — určitý* λ *rozměrný prostor a jeho orientaci.*

2. **Operace multiplikační.**

Zaveďme nové operace multiplikační definované rovnicemi

$$A \wedge B = \tfrac{1}{2}(A \,.\, B + B \,.\, A), \quad A \times B = \tfrac{1}{2}(A \,.\, B - B \,.\, A), \tag{3}$$

kde A, B značí libovolné veličiny. Z definice plyne, že *operace* $\wedge$ *jest kommutativní, kdežto při operaci* $\times$ *výměna obou činitelů změní znaménko součinu. Obě operace jsou distributivné.*

$$A \wedge B = B \wedge A, \; A \times B = - B \times A, \; A \,.\, B = A \wedge B + A \times B. \tag{4}$$

Značí-li C další libovolnou veličinu, dostaneme z identit

$$(A . B \mp B . A) . C - C . (A . B \mp B . A) = (B . C \pm C . B) . A + A . \\ . (B . C \pm C . B) - (C . A \pm A . C) . B - B . (C . A \pm A . C)$$

základní vzorce vektorové násobilky

$$A \times B \times C = B \wedge C \wedge A - C \wedge A \wedge B, \tag{I}$$

$$A \wedge B \times C = B \times C \wedge A - C \times A \wedge B, \tag{II}$$

kterými veškeré neodvislé vztahy mezi operacemi $\wedge$ a $\times$ jsou vyčerpány.

Ježto

$$i_1 . (cos\, \vartheta . i_1 + sin\, \vartheta . i_2) = cos\, \vartheta + sin\, \vartheta . i_1 . i_2,$$

dostaneme pro součin libovolných dvou vektorů a, b svírajících úhel ϑ

$$a \wedge b = |\, a \,| . |\, b \,| . cos\, \vartheta, \quad a \times b = |\, a \,| . |\, b \,| . sin\, \vartheta . Q, \tag{5}$$

kde $|\, a \,|$ značí délku vektoru a a Q čtvercovou jednotku v rovině (a, b).

Stojí-li vektory a, b na sobě kolmo, jest $a \wedge b = 0$ a naopak. Jsou-li vektory a, b rovnoběžné, jest $a \times b = 0$ a naopak.

Značí-li A libovolný výraz a α libovolné číslo, jest $\alpha . A = A . \alpha$, t. j.

$$\alpha . A = \alpha \wedge A, \quad \alpha \times A = 0.$$

Součin skaláru a jednotky λ rozměrné nazvu „*těleso λ rozměrné*“. Sčítáním a násobením vektorů dospěji zřejmě k mnohočlenu z těles. Mnohočlen z těles stejně rozměrných nazvu „homogenní“. Značí-li A_λ homogenní mnohočlen λ rozměrný a a libovolný vektor, jest

$$A_\lambda . a = A_{\lambda-1} + A_{\lambda+1},$$

neboť znásobíme-li součin $i_1 . i_2 . \ldots . i_\mu$ vektorovou jednotkou v součinu obsaženou, sníží se počet rozměrů o jeden, kdežto, násobíme-li vektor. jednotkou, která není v součinu obsažena, rozměrnost se o jednu zvýší. Jeden z obou výrazů v pravo vznikne operací $\wedge\, a$, zbývající operací $\times\, a$. Každou z těchto operací přejde výraz homogenní opět v homogenní. Značí-li b další libovolný vektor, jest $a \wedge b$ skalár a fundamentální rovnice (I) podává

$$V_\lambda \times a \times b = a \wedge b . V_\lambda - V_\lambda \wedge b \wedge a.$$

Nepíši-li žádných závorek, jest nutno operace prováděti v tom pořadu, v jakém jsou psány. Ježto levá strana jest homogenní, musí býti takovou i pravá strana, t. j. operací $\times\, a \times b$ nebo $\wedge\, a \wedge b$ přejde výraz λ rozměrný opět v λ rozměrný. Dle toho *součin z libovol. vektorů a_ϱ*

$$\left.\begin{aligned} V_{2\lambda} &= a_1 \times a_2 \wedge a_3 \times \ldots . \wedge a_{2\lambda-1} \times a_{2\lambda} \\ V_{2\lambda+1} &= a_1 \times a_2 \wedge a_3 \times \ldots . \times a_{2\lambda} \wedge a_{2\lambda+1} \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

ve kterém se znaménka ×, ∧ stále střídají, *představuje těleso* 2λ *resp.* $2\lambda + 1$ *rozměrné.* Každé těleso V_λ dá se vyjádřiti jako součin z příslušné λ rozměrné jednotky J_λ a skaláru $| V_\lambda |$, který se nazývá *absolutní hodnota tělesa.*

$$V_\lambda = | V_\lambda | . J_\lambda. \tag{7}$$

Dle (5) absolutní hodnota součinu $V_2 = a_1 \times a_2$ rovná se ploše rovnoběžníka z vektorových činitelů.

Absolutní hodnota tělesa $V_\lambda = a_1 \times a_2 \wedge \ldots\ldots \overset{\wedge}{\times} a_\lambda$ *podává objem rovnoběžníka* (λ *rozměrného*) *z vektorových činitelů.*

Důkaz této věty dá se provésti úplnou indukcí. Supponujme, že platí věta pro index λ. Pak jest

$$V_\lambda = | V_\lambda | . i_1 . i_2 . \ldots . i_\lambda,$$

kde i_ϱ jsou vektorové jednotky vzájemně kolmé a $| V_\lambda |$ objem rovnoběžníka z vektorů $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$. Značí-li $i_{\lambda+1}$ vektorovou jednotku v prostoru tělesa

$$V_{\lambda+1} = V_\lambda \overset{\wedge}{\times} a_{\lambda+1}$$

absolutně kolmou k prostoru V_λ, lze psáti

$$a_{\lambda+1} = \alpha_1 . i_1 + \alpha_2 . i_2 + \ldots + \alpha_\lambda . i_\lambda + \alpha_{\lambda+1} . i_{\lambda+1} \tag{a}$$

a tedy

$$V_{\lambda+1} = \alpha_{\lambda+1} . | V_\lambda | . i_1 . i_2 . \ldots . i_\lambda . i_{\lambda+1} .$$

Dle (a) značí však $\alpha_{\lambda+1}$ vzdálenost bodu $A_{\lambda+1}$ od prostoru V_λ a $\alpha_{\lambda+1} . | V_\lambda |$ jest tedy objem rovnoběžníka z vektorů $a_1, a_2, \ldots a_\lambda, a_{\lambda+1}$. Dle toho, platí-li věta pro index λ, platí také pro index $\lambda + 1$ a ježto platí pro $\lambda = 2$, má platnost obecnou.

$V_\lambda = 0$ *tehdy a jen tehdy, leží-li všechny vektor. činitele v témž prostoru* $\lambda - 1$ *rozměrném.*

Jsou-li a, b libovolné vektory, podává rovnice (II)

$$a \wedge b \times V_\varrho = - V_\varrho \times b \wedge a - V_\varrho \times a \wedge b;$$

$a \wedge b$ jest skalár, proto levá strana vymizí, takže

$$V_\varrho \times b \wedge a = - V_\varrho \times a \wedge b. \tag{8}$$

Součin V_λ změní jen znaménko, vyměníme-li mezi sebou libovolné dva sousední činitele. *Sudý počet přestav činitelů nezmění hodnotu tělesa, lichý počet přestav změní jen znaménko tělesa.* Těleso V_2 budu zváti „*kvadrát*“.

Pomocí fundam. rovnic (I, II) dá se součin dvou těles $V_\lambda \wedge V_\mu$ nebo $V_\lambda \times V_\mu$ upraviti v součet těles. Tuto úpravu provedl jsem zcela obecně, o čemž pomlčím a pojednám pouze o součinu tělesa a vektoru. Pomocí (I, II) získáme vzhledem k (6) snadno

$$V_2 \quad \times m = V_{2\lambda-1} \times a_{2\lambda} \times m = m \wedge a_{2\lambda} \,.\, V_{2\lambda-1} - V_{2\lambda-1} \wedge m \wedge a_{2\lambda}\,,$$
$$V_{2\lambda-1} \wedge m = V_{2\lambda-2} \wedge a_{2\lambda-} \quad \wedge m = m \wedge a_{2\lambda-1} \,.\, V_{2\lambda-1} - V_{2\lambda-2} \times m \times a_{2\lambda-1}\,.$$

Pokračujíce takto dále a dosazujíce vždy z následující rovnice do předcházející, dospějeme ke vzorcům:

$$\left.\begin{array}{c} (a_1 \times a_2 \wedge \ldots \wedge a_{2\lambda-1} \times a_{2\lambda}) \times m = \\ \sum\limits_{\varrho=1}^{2\lambda} [(-1)^{\varrho} \,.\, m \wedge a_{\varrho} \,.\, a_{\varrho+1} \times a_{\varrho+2} \wedge \ldots \times a_{\varrho-2} \wedge a_{\varrho-1}] \\ (a_1 \times a_2 \wedge \ldots \times a_{2\lambda} \wedge a_{2\lambda+1}) \wedge m = \\ \sum\limits_{\varrho=1}^{2\lambda+1} [m \wedge a_{\varrho} \,.\, a_{\varrho+1} \times a_{\varrho+2} \wedge \ldots \wedge a_{\varrho-2} \times a_{\varrho-1}] \end{array}\right\} \tag{9}$$

3. Lineárná forma čili tensor.

Lineárná forma jest lineárná, vektorová, homogenní funkce běžného vektoru x:

$$F\,x = \sum_{\varrho=1}^{\nu} (x \wedge b_{\varrho} \,.\, a_{\varrho}), \tag{10}$$

kde a_{ϱ}, b_{ϱ} jsou známé vektory a F symbol funkční. $F\,x$ představuje affinní transformaci prostoru Ω_{ν} a má tyto vlastnosti

$$F\,(x + y) = F\,x + F\,y,\; F\,(\lambda \,.\, x) = \lambda \,.\, F\,x,\; d\,(F\,x) = F\,dx. \tag{11}$$

Forma F', pro kterou platí identicky

$$y \wedge F\,x = x \wedge F'\,y,$$

nazývá se „*sdružená*“ s formou F. Forma f identická se svou sdruženou formou nazývá se „*samodružná*“. Z (10) plyne

$$F'\,x = \sum_{\varrho=1}^{\nu} (x \wedge a_{\varrho} \,.\, b_{\varrho}),$$

načež

$$F'\,x - F\,x = \sum_{\varrho=1}^{\nu} (x \wedge a_{\varrho} \,.\, b_{\varrho} - x \wedge b_{\varrho} \,.\, a_{\varrho}) = \left[\sum_{\varrho=1}^{\nu} (b_{\varrho} \times a_{\varrho})\right] \times x$$

a označíme-li součet kvadrátů po pravé straně písmenem P:

$$F'\,x - F\,x = P \times x. \tag{12}$$

Součet kvadrátů není obecně kvadrátem, t. j. nedá se vždy vyjádřiti ve tvaru $m \times n$. Vektor t, kterému lze přiřaditi číslo δ tak, aby

$$F\,t = \delta \,.\, t, \tag{13}$$

nazveme „*osa formy* F“. Jsou-li a_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots, \nu$) libovolně zvolené vektory, které neleží v témž prostoru $\nu - 1$ rozměrném, dostaneme ze (13) operací $\wedge\, a_\varrho$

$$t \wedge (F' a_\varrho - \delta \,.\, a_\varrho) = 0, \quad \varrho = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{14}$$

Vektory vyjádřené výrazem v závorce stojí kolmo na témž vektoru t, t. j. zapadají do téhož prostoru $\nu - 1$ rozměrného, takže musí

$$(F' a_1 - \delta \,.\, a_1) \times (F' a_2 - \delta \,.\, a_2) \wedge \ldots \overset{\wedge}{\times} (F' a_\nu - \delta \,.\, a_\nu) = 0, \tag{15}$$

kde znaménka $\times$, $\wedge$ se stále střídají. Zkrátíme-li po vynásobení ν rozměrnou jednotkou obsaženou ve všech členech, dostaneme pro δ číselnou rovnici ν-tého stupně t. zv. „*charakteristickou rovnici formy* F“. Každému kořenu této rovnice korresponduje jedna osa formy F, jejíž směr — vzhledem k rovnicím (14) — snadno vypočteme; jest totiž kolmý k vektorům $F' a_\varrho - \delta \,.\, a_\varrho$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, \nu - 1$).

Je-li t' osa formy F' sdružené s formou F a korrespondující kořenu δ', jest

$$F' t' = \delta' \,.\, t'.$$

Operací $\wedge\, t$

$$(\delta' - \delta) \,.\, t \wedge t' = 0,$$

tedy buď $\delta' = \delta$ nebo $t \wedge t' = 0$. *Formy sdružené mají společnou charakt. rovnici a osové ν hrany jsou polárné* (každá hrana jednoho ν hranu stojí absolutně kolmo na příslušné $\nu - 1$ rozměrné stěně druhého ν hranu); v rovnici (15) můžeme dle toho akcenty vynechati.

Důsledky: *Má-li charakt. rovnice λ násobný kořen, existuje λ rozměrný prostor, jehož každý vektor jest osou formy. Osový ν hran samodružné formy jest orthogonálný.*

Inverse formy: Z rovnice $x' = F x$ plyne operací $\wedge\, a_\varrho$

$$x' \wedge a_\varrho = x \wedge F' a_\varrho, \quad \varrho = (1, 2, \ldots, \nu).$$

Těmito rovnicemi jest x jednoznačně určeno jen tehdy, neleží-li vektory $F' a_\varrho$ v témž prostoru $\nu - 1$ rozměrném, t. j. (15), *je-li absolutní člen ω_ν charakt. rovnice různý od nuly*. Je-li $\omega_\nu = 0$, jest možno vyhledati skaláry α_ϱ tak, aby

$$\alpha_1 F a_1 + \alpha_2 F a_2 + \ldots + \alpha_\nu F a_\nu = 0,$$

t. j.

$$F (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_\nu \,.\, a_\nu) = 0.$$

Je-li absol. člen charakt. rovnice = 0, existuje vektor, který formu annuluje.

4. Přemístění tuhého systému v prostoru Ω_ν.

Jednotka $i_1 . i_2$ se nezmění, přemístíme-li tuhou soustavu jednotek i_1, i_2 v rovině obou jednotek. Dle toho můžeme tuhým systémem v prostoru Ω_ν pohybovati tak, aby určitý $\nu - 2$ rozměrný prostor $\Omega_{\nu-2}$ zůstal v klidu. Takový pohyb nazveme „*rotace kolem prostoru* $\Omega_{\nu-2}$“. Bod mimo prostor $\Omega_{\nu-2}$ pohybuje se v rovině absolutně kolmé k prostoru $\Omega_{\nu-2}$ („rovina rotační“) a opisuje kružnici, jejíž střed jest v patě kolmice spuštěné z bodu na prostor $\Omega_{\nu-2}$.

Jsou-li a_ϱ, b_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots, \nu$) normálné, stejně orientované ν hrany, x vektor běžného bodu X, jest $x \wedge a_\varrho$ složka vektoru x ve směru a_ϱ a rovnice

$$x' = \sum_{\varrho=1}^{\nu} x \wedge a_\varrho . b_\varrho = F x$$

představuje přemístění tuhého systému X kolem pevného počátku do polohy X'. Má-li forma $F x$ představovati pouhé přemístění tuhého systému, musí se libovolný ν hran a_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots, \nu$) transformovati v ν hran stejně orientovaný, t. j. musí

$$F a_1 \times F a_2 \wedge \ldots . \overset{\wedge}{\times} F a_\nu = a_1 \times a_2 \wedge \ldots . \overset{\wedge}{\times} a_\nu,$$

kde znaménka $\times$, $\wedge$ se střídají. *Absolutní člen charakt. rovnice formy F musí se rovnati kladné jednotce číselné.* Dále musí identicky

$$F x \wedge F y = x \wedge y.$$

Odtud

$$F' F = F F' = 1, \quad F' t = \frac{1}{\delta} . t . \tag{16}$$

Je-li t osa formy F korrespondující kořenu δ charakt. rovnice, jest

$$F t = \delta . t, \quad F' t = \frac{1}{\delta} . t . \tag{17}$$

Ježto sdružené formy mají společnou charakt. rovnici, praví poslední dvě rovnice, že tato *charakt. rovnice musí býti reciprokou.*

Zdvojmocníme-li první z rovnic (17), dostaneme

$$(\delta^2 - 1) . t^2 = 0, \text{ t. j. } \delta = \pm 1 \text{ nebo } t^2 = 0.$$

Kořenu $\delta = 1$ přísluší osa invariantní. Rovnici $t^2 = 0$ vyhovují dvě sdružené osy délky nulové, které korrespondují kořenům $e^{\pm\sqrt{-1}\cdot\varphi}$ charakt. rovnice. Kořeny -1 ($\varphi = 180^0$) mohou se vyskytnouti jen podvojně. Značí-li ve zvl. případě $F x$ rotaci kolem prostoru $\Omega_{\nu-2}$, jest každý vektor v $\Omega_{\nu-2}$ invariantní osou, t. j. kladná číselná jednotka jest $\nu - 2$ násobným kořenem charakt. rovnice, která má mimo to kořeny $e^{\pm\sqrt{-1}\cdot\varphi}$, kde φ jest úhel, o který bylo otočeno. Příslušné osy délky nulové leží v rotační rovině Ω_2 absolutně kolmé k prostoru $\Omega_{\nu-2}$.

Charakt. rovnice formy, která definuje rotaci kolem prostoru $\Omega_{\nu-2}$, má $\nu - 2$ násobný kořen $= 1$ a dva soujemné sdružené $e^{\pm\sqrt{-1}\cdot\varphi}$, kde φ značí úhel otočení. Rovina rotační určena jest osami délky nulové.

Uvažujme zase obecné přemístění $x' = F x$ kolem pevného počátku a zaveďme samodružnou formu

$$F + F' = 2 f.$$

Dle (17) každá osa formy F jest též osou formy F' a tedy i f a dvojici kořenů $e^{\pm\sqrt{-1}\cdot\varphi}$ přísluší dvojný kořen $\cos\varphi$ charakt. rovnice formy f. Dvojnému kořenu $\cos\varphi$ korresponduje rovina, jejíž každý vektor jest osou formy f a do které zapadnou sdružené osy formy F délky nulové. Kořenům $= 1$ charakt. rovnice formy f přísluší invariantní osy určující invariantní prostor. Celý osový systém formy f skládá se z invariantního prostoru a rovin Σ a jest vzhledem k samodružnosti formy f absolutně orthogonálný, t. j. každá rovina Σ jest absolutně kolmá k ostatním a rovněž k invariantnímu prostoru. Při otočení φ kolem prostoru $\Omega_{\nu-2}$ absolutně kolmého k rovině Σ zůstává celý ostatní osový systém (zapadaje do $\Omega_{\nu-2}$) invariantní. Je-li $\nu = 2\lambda$ nebo $2\lambda + 1$, má charakt. rovnice formy f nejvýš λ dvojných kořenů různých od 1 i můžeme vysloviti větu:

Obecné přemístění tuhého systému kolem pevného počátku v prostoru Ω_ν ($\nu = 2\lambda$ nebo $2\lambda + 1$) *dá se provésti nejvýš λ rotacemi s rotačními rovinami vzájemně absolutně kolmými. V prostoru o lichém počtu rozměrů musí alespoň jedna osa býti invariantní.*

Obecné přemístění: Jest zřejmo, že obecné přemístění provésti lze rotacemi kolem pevného počátku a translací. Je-li u translace, X původní a X' nová poloha tuhého systému, jest

$$x' = u + F x. \tag{18}$$

Existuje-li invariantní bod S, musí

$$s = u + F s, \tag{a}$$

t. j.

$$s = (1 - F)^{-1} u.$$

Jediný invariantní bod existuje jen tehdy, je-li inverse formy $1 - F$ jednoznačná, t. j. není-li žádná z os formy F při transformaci $F x$ invariantní a to jest možné jen *v prostorech o sudém počtu rozměrů*. Je-li t osa invariantní vzhledem k F, dostaneme z (a) operací $\wedge\, t$

$$t \wedge u = 0, \tag{b}$$

pak jest ale rovnice (a) splněna pro všecka λ, píšeme-li $s + \lambda t$ místo s.

Je-li translace u absolutně kolmá k invariantnímu prostoru Ω_ϱ formy F, existuje ϱ rozměrný prostor rovnoběžný s Ω_ϱ, který jest při přemístění (18) invariantní.

Není-li splněna podmínka (b), dostaneme z (18) operací $\wedge\, t$:

$$(x' - x) \wedge t = u \wedge t.$$

Obecné přemístění (18) provésti lze rotacemi kolem téhož bodu a translací zapadající do invariantního prostoru formy F; tato výsledná translace rovná se orthog. průmětu translace u do invar. prostoru formy F (analogon šroubového pohybu v prostoru třírozměrném).

Dodatky.

Změníme-li v součinu $i_1 . i_2 \ldots\ldots i_\nu$ znaménko sudého počtu činitelů, nezmění se součin; útvary ν rozměrné souměrné dle prostoru $\Omega_{\nu-2\lambda}$ jsou stejně orientovány a dají se přemístěním sjednotiti, kdežto souměrné dle prostoru $\Omega_{\nu-2\lambda-1}$ nikoli.

Budiž m daná jednotka vektorová, x vektor běžného bodu X a X' bod souměrný s bodem X dle osy $\overline{OM} = m$. Pak jest

$$x' . m = m . x, \text{ t. j. } x' = m . x . m. \qquad (c)$$

Tato rovnice představuje přemístění tuhého systému X jen v prostoru o lichém počtu rozměrů, v prostoru o sudém počtu rozměrů převede systém v systém opačně orientovaný. Dvě po sobě následující transformace typu (c) skládají vždy přemístění tuhého systému

$$x' = n . m . x . m . n, \qquad (19)$$

kde n značí novou jednotku vektorovou. Pro všecka x kolmá současně k vektor. jednotkám m, n smíme pořad činitelů $m . x$ zaměniti, změníme-li současně znaménko součinu, takže

$$x' = - n . x . m . m . n = - n . x . n = x . n . n = x.$$

Při přemístění (19) zůstanou všecky vektory v prostoru $\Omega_{\nu-2}$ absolutně kolmém k rovině (m, n) invariantní. Vložíme-li do rovnice (19) m za x, dostaneme

$$m' = n . m . n, \text{ t. j. } m' . n = n . m \text{ a tedy } \widehat{m\, m'} = 2\, \widehat{m\, n}.$$

Transformace (19) představuje otočení tuhého systému kolem ($\nu - 2$) rozměrného prostoru $\Omega_{\nu-2}$ jdoucího počátkem, absolutně kolmého k rovině (m, n) o úhel rovný dvojnásobné odchylce vektorových jednotek m, n.

5. Infinitesimálné přemístění.

Je-li J čtvercová jednotka v rovině jednotek m, n a ϑ úhel otočení, jest

$$m . n = \cos\frac{\vartheta}{2} + J . \sin\frac{\vartheta}{2}.$$

Pro infinitesimálné otočení $\delta\,\vartheta$

$$x' = (1 - \tfrac{1}{2} . J . \delta\,\vartheta) . x . (1 + \tfrac{1}{2} J . \delta\,\vartheta)$$
$$= x - \tfrac{1}{2} . J . x . \delta\,\vartheta + \tfrac{1}{2} x . J . \delta\,\vartheta,$$

t. j.

$$x' = x + x \times J . \delta\,\vartheta. \tag{20}$$

Pro obecné infinitesimálné přemístění kolem pevného počátku dostaneme tedy

$$x' = x + \delta\,\tau . x \times V, \tag{21}$$

kde V jest homogenní mnohočlen dvourozměrný. Výraz V není obecně kvadrátem, t. j. nedá se vždy vyjádřiti ve tvaru $a \times b$. Vyjádříme-li V základními jednotkami vektorovými, pak, má-li V býti kvadrátem, musí V^2 býti skalár, t. j. ve výrazu V^2 musí členy čtyrrozměrné vymizeti. Uvažujeme-li jeden z těchto členů, ku př.

$$\alpha_{14} . \alpha_{23} . i_1\, i_2 . i_3 . i_4,$$

kde α_{14} značí koeficient při $i_1 . i_4$ ve výrazu V, dostaneme ostatní členy v témž prostoru čtyrrozměrném permutacemi indexů, takže

$$\alpha_{14} . \alpha_{23} + \alpha_{24} . \alpha_{31} + \alpha_{34} . \alpha_{12} = 0$$

a obecně

$$\alpha_{\lambda,\,\tau} . \alpha_{\mu,\,\varrho} + \alpha_{\mu,\,\tau} . \alpha_{\varrho,\,\lambda} + \alpha_{\varrho,\,\tau} . \alpha_{\lambda,\,\mu} = 0$$

pro všecka λ, μ, ϱ, τ od 1 do ν.

Ježto obecné přemístění kolem pevného počátku v prostoru Ω_ν ($\nu = 2\,\lambda$ nebo $2\,\lambda + 1$) provésti lze λ rotacemi s absolutně kolmými rotačními rovinami, *dá se každý homogenní dvourozměrný mnohočlen upraviti v součet λ vzájemně absolutně kolmých kvadrátů.*

6. **Počet differenciálný.**

V prostoru Ω_ν můžeme definovati differenciační operace analogické divergenci a rotaci v prostoru třírozměrném. Buďtež λ_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots, \nu$) pravoúhlé souřadnice běžného bodu X vzhledem k základním osám i_ϱ a těleso V budiž funkcí vektoru $x = \overline{OX}$. Definujeme-li

$$\nabla = \sum_{\varrho=1}^{\nu} \frac{\partial}{\partial\,\lambda_\varrho} . i_\varrho \tag{22}$$

jest význam $\nabla \wedge V$, $\nabla \times V$, $\nabla . V$ patrný

$$\nabla^2 V = \sum_{\varrho=1}^{\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial\,\lambda_\varrho^{\,2}}\,, \tag{23}$$

$$\nabla^2 V = \nabla \wedge (\nabla \wedge V) + \nabla \times (\nabla \times V), \tag{24}$$

$$\nabla \wedge (\nabla \times V) = 0, \quad \nabla \times (\nabla \wedge V) = 0. \tag{25}$$

Dle (6, 9):

$$\nabla \wedge V_{2\lambda} = V_{2\lambda+1}, \quad \nabla \times V_{2\lambda+1} = V_{2\lambda+2},$$
$$\nabla \times V_{2\lambda} = A_{2\lambda-1}, \quad \nabla \wedge V_{2\lambda+1} = A_{2\lambda},$$

kde V značí těleso a A homogenní mnohočlen.

Výtah z pojednání.

V pojednání odvozeny základy vektorového počtu v prostoru o libovolném počtu rozměrů způsobem podstatně odlišným od způsobu obvyklého v učebnicích vektor. počtu třírozměrného. Vyšed od associačně distributivné operace, označené tečkou, dospívám k obvyklým operacím multiplikačním definicemi

$$A \wedge B = \tfrac{1}{2}(A \,.\, B + B \,.\, A), \quad A \times B = \tfrac{1}{2}(A \,.\, B - B \,.\, A).$$

Z nich vyplynou takřka bezprostředně fundamentální rovnice

$$A \times B \times C = B \wedge C \wedge A - C \wedge A \wedge B,$$
$$A \wedge B \times C = B \times C \wedge A - C \times A \wedge B,$$

kde A, B, C jsou zcela libovolné veličiny. S těmito dvěma rovnicemi multiplikační algebra vektorová úplně vystačí. Součin vektorů

$$V_\lambda = a_1 \times a_2 \wedge a_3 \times \dots \genfrac{}{}{0pt}{}{\wedge}{\times} a_\lambda,$$

ve kterém se znaménka $\times$, $\wedge$ stále střídají, nazván „těleso $\boldsymbol{\lambda}$ rozměrné“ a ukázáno, že jeho absolutní hodnota $| V_\lambda |$ představuje objem rovnoběžníka z vektorových činitelů. Dále pojednáno o theorii lineárné formy (tensorové algebře) a v § 6 definovány differenciační operace $\nabla \wedge$, $\nabla \times$ analogické divergenci a rotaci; rovněž odvozeny základní relace mezi těmito operacemi. Jako applikace vektorové methody provedena analysa obecného přemístění tuhého systému v obecném prostoru $\boldsymbol{\nu}$ rozměrném, která vede k větám:

Přemístění tuhého systému kolem pevného počátku v prostoru $\boldsymbol{\Omega_\nu}$ ($\boldsymbol{\nu} = 2\,\boldsymbol{\lambda}$ nebo $2\,\boldsymbol{\lambda} + 1$) dá se provésti nejvýš $\boldsymbol{\lambda}$ rotacemi s rotač. rovinami absolutně kolmými. Obecné přemístění provésti lze buď jen rotacemi nebo pohybem analogickým šroubovému pohybu v prostoru třírozměrném.

Transformace

$$x' = n \,.\, m \,.\, x \,.\, m \,.\, n,$$

kde m, n jsou vektor. jednotky, představuje rotaci a obecné infin. přemístění tuhého systému v prostoru $\boldsymbol{\nu}$ rozměrném vyjádřeno jest rovnicí

$$x' = x + \boldsymbol{\delta\,\tau} \,.\, x \times V,$$

kde $\boldsymbol{\delta\,\tau}$ jest infin. číslo a V homogenní dvourozměrný mnohočlen.

Methody užité v tomto pojednání k odvození základů dá se velmi prospěšně užiti také k odvození základů vektorového počtu třírozměrného.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 22.

Poznámka ku ploše naplněné ohnisky parabol na hyperbolickém paraboloidu.

Napsal

Dr. Vladimír Mašek,
profesor vys. školy zemědělské v Brně.

Předloženo dne 28. dubna 1922.

1. V článku pojednávajícím o této ploše*) uvažovali jsme plochu P^4 4. řádu naplněnou ohnisky parabolických řezů na hyp. paraboloidu H, jenž byl dán rovnicí

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Rovnice plochy P^4 měla tvar

$$4\,(x^2 b^2 - y^2 a^2)^2 - 4\,z\,a^2 b^2\,(x^2 b^2 - y^2 a^2) - a^2 b^2\,(x^2 b^4 + y^2 a^4) = 0. \quad (1)$$

Bylo uvedeno, že plocha P^4 jest plochou Steinerovou. Obdržíme ji, pošineme-li všechny paraboly hyp. paraboloidu H, jež leží v rovinách jdoucích jeho osou, směrem osy tak, by jejich ohniska se ztotožnila s bodem F nacházejícím se na ose z paraboloidu ve výši $\frac{a^2 - b^2}{4}$ nad průmětnou (x, y).

Pro další úvahy jest výhodné zavésti do rovnice plochy P^4 souřadnice klinogonálné tak, by novými osami x' a y' byly hlavní přímky h_1 a h_1' daného hyp. paraboloidu H a osa z zůstala nezměněna. Pak rovnice plochy P^4 vztažené k těmto novým osám zní

$$64\,x^2 y^2 - 16\,x\,y\,z\,(a^2 + b^2) - (x^2 + y^2)\,(a^2 + b^2)^2 + 2\,x\,y\,(a^4 - b^4) = 0. \quad (2)$$

V článku dřívějším bylo uvedeno, že plocha P^4 obsahuje tři dvojné přímky, totiž osu z a přímky u_∞ a v_∞ dané směry řídících rovin hyp.

---

*) Rozpravy: Roč. XXX. Tř. II. Č. 33.

paraboloidu H. Dále bylo uvedeno, že rovina tečná protíná plochu obecně ve dvou hyperbolách.

Vyšetřme blíže vlastnosti hyperbolických řezů plochy vedených dvojnou přímkou u_∞, jež jest dána směrem roviny $(x' z)$.

Rovina $y = n$ protne plochu P^4 v hyperbole h; z příslušné rovnice jejího průmětu h_2' směrem osy y' do roviny $(x' z)$ plynou co souřadnice středu tohoto průmětu hodnoty $x_0 = 0$, $z_0 = \frac{a^2 - b^2}{8}$. Platí tudíž: *Středy hyperbol, v nichž protínají plochu* P^4 *roviny procházející dvojnou přímkou* u_∞ *leží v prostoru na přímce rovnoběžné s osou* y' *ve vzdálenosti* $z = \frac{a^2 - b^2}{8}$ *nad průmětnou* $(x' y')$.

Pošineme-li počátek os souřadných do středu hyperboly h_2' a vztáhneme-li ji známým způsobem k jejím osám co osám souřadným, obdržíme její rovnici ve tvaru

$$\frac{64\,\xi^2}{(a^2 + b^2)^2} - \frac{\zeta^2}{n^2} = 1. \tag{3}$$

Pro souřadnice vrcholů plyne z rov. (3): $\xi = \pm \frac{a^2 + b^2}{8}$. Přicházíme tedy ku větě: *Roviny jdoucí dvojnou přímkou* u_∞ *plochy* P^4 *protínají tuto v hyperbolách, jichž vrcholy leží v prostoru na šikmém kruhovém válci o ose rovnoběžné s* y'. Snadno seznáme, že kružnice k_2', ve které rovina $(x' z)$ tento válec protíná, prochází kuspidálními body V a V′ plochy P^4, jež jsou totožny s vrcholy parabol této plochy ležícími v hlavních rovinách hyp. paraboloidu daného.

Z rovnice hyperboly h_2' jde dále přímo, že osa z jest jednou asymptotou této hyperboly. Stanovíme-li známým způsobem rovnice os hyperboly h_2', obdržíme

$$z = \frac{8\,n}{a^2 + b^2}\,x; \quad z = -\frac{a^2 + b^2}{8\,n}\,x. \tag{4}$$

Osu reálnou podává druhá z těchto rovnic. Vztyčíme-li ku ose z co asymptotě v průsečících jejích s kružnicí k_2' kolmice, procházejí tyto ohnisky hyperboly h_2'. Ohniska tato leží tedy na přímkách $z = \pm \frac{a^2 + b^2}{8}$ a na ose reálné $z = -\frac{a^2 + b^2}{8\,n}\,x$. Řešením plyne pro ohniska $x = \pm\, n$. Z výsledku tohoto soudíme:

Ohniska průsečných hyperbol plochy P^4 *s rovinami jdoucími dvojnými jejími přímkami* u_∞ *resp.* v_∞ *leží v prostoru na vrcholových tečnách parabol plochy ležících v hlavních rovinách hyp. paraboloidu* H.

2. Opišme ploše P^4 válec z libovolného bodu přímky u_∞. Je-li φ úhel sklonu povrchových přímek tohoto válce s rovinou $(x' y')$ a položíme-li počátek os souřadných do středu O' hyperboly h_2', jest uvažovaný opsaný válec dán rovnicí

$$64\,(z - x\,tg\,\varphi)^2 + 64\,y^2 - 16\,y\,(a^2 + b^2)\,tg\,\varphi - (a^2 + b^2)^2 = 0\,.$$

Rovnici průsečné křivky válce s rovinou $(y' z)$ obdržíme po vhodné úpravě ve tvaru

$$\left[y - \frac{(a^2 + b^2)\,tg\,\varphi}{8}\right]^2 + z^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2\,sec^2\,\varphi}{64}\,. \tag{5}$$

Vidíme, že rovina $(y' z)$ protíná uvažovaný válec v *kružnici*. Označme ji l_3. Pro $y = 0$ plyne z rov. (5) $z = \pm \frac{a^2 + b^2}{8}$. Kružnice l_3 prochází tudíž kuspidálními body V a V'. Mění-li se úhel φ, obdržíme všechny válce dotyčné opsané ploše P^4 z bodů dvojné přímky u_∞. Tyto dotyčné válce protnuty jsou rovinou $(y' z)$ ve svazku kružnic o základních bodech V a V'. Rovina $(y' z)$ jest tedy směrem jedné soustavy cyklických rovin těchto válců. Podobně jest rovina $(x' z)$ čili rovina udávající polohu dvojné přímky u_∞ směrem jedné soustavy cyklických rovin válců opsaných ploše P^4 z bodů dvojné přímky v_∞.

V článku dřívějším jsme odvodili, že roviny udávající polohu dvojných přímek u_∞ a v_∞ jsou směry cyklických rovin kuželů opsaných ploše P^4 z bodů dvojné přímky z. Platí tudíž vzhledem ku právě odvozeným výsledkům:

Opíšeme-li ploše P^4 *plochy kuželové resp. válcové z bodů ležících na dvojných přímkách* z, u_∞ a v_∞, *jsou tyto plochy dotyčné 2 st. a roviny přímek* u_∞ a v_∞ *udávají směry obou soustav cyklických rovin opsaných ploch kuželových a směr jedné soustavy cyklických rovin opsaných ploch válcových.*

3. Vedeme-li středem $S\left(y_0 = \frac{a^2 + b^2}{8}\,tg\,\varphi\,; z_0 = 0\right)$ kružnice l_3 dané rov. (5) osu uvažovaného opsaného válce, jest tato dána rovnicemi

$$\left\{\begin{aligned} y &= \frac{a^2 + b^2}{8}\,tg\,\varphi, \\ z &= x\,tg\,\varphi\,. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Eliminací $tg\,\varphi$ z rov. (6) plyne

$$x\,y = \frac{a^2 + b^2}{8}\,.\,z. \tag{7}$$

Z rov. (7) vidíme, že konoid naplněný osami válců opsaných ploše P^4 z bodů dvojné přímky u_∞ jest *hyperbolickým paraboloidem.*

Přetransformujeme-li rov. (7) hyp. paraboloidu $\mathcal{H}$ do původních pravoúhlých souřadnic x, y, z přejde tato do tvaru

$$z = \frac{2\,x^2}{a^2} - \frac{2\,y^2}{b^2} + \frac{a^2 - b^2}{8}\,. \tag{8}$$

Srovnáme-li rov. (8) s rovnicí geom. místa středů všech ∞^2 kuželoseček na ploše P^4 ležících, jež byla odvozena v článku na počátku uvedeném, shledáme, že obě rovnice se shodují. Platí tudíž zajímavý výsledek:

Osy ploch válcových opsaných ploše P^4 *z bodů dvojných přímek* u_∞ a v_∞ *naplňují obě soustavy povrchových přímek hyperbolického paraboloidu* $\mathcal{H}$, *jenž jest zároveň geom. místem středů všech* ∞^2 *kuželoseček plochy* P^4.

Hyperbolický paraboloid $\mathcal{H}$ jest též totožný s hyperbolickým paraboloidem naplněným imaginárními osami průsečných hyperbol plochy P^4 s rovinami jdoucími dvojnými přímkami u_∞ a v_∞, jak snadno plyne z příslušných rovnic.

Sestrojení kvadratické variety ze 14 bodů ve čtyřrozměrném prostoru.

Napsal

Ph. Dr. Václav Hlavatý.

Předloženo dne 28. dubna 1922.

Trojrozměrná varieta kvadratická ve čtyřrozměrném prostoru určena je $\frac{n\,(n+3)}{2} = 14$ body, z nichž vždy jen čtyři nalézají se obecně v témž (trojrozměrném) prostoru. Dvě variety pronikají se ve zvláštní ploše ${}^4\Phi$ biquadratické. Neboť libovolný prostor protíná obě variety ve dvou plochách kvadratických, jichž průsek je právě biquadratická prostorová křivka, průsečná křivka prostoru s plochou Φ. Plocha Φ určena je 13 body, neboť libovolný z ∞^3 prostorů čtrnáctým bodem určuje tímto bodem a právě zmíněnou křivkou jednu kvadratickou plochu variety.

Třinácti body možno proložiti $\binom{13}{2}$ přímkových variet, neboť dva body možno spojiti površkou a na ní zvoliti bod čtrnáctý. Dvě z takových variet pronikají se v ploše Φ, procházející danými 13 body.

První naší úlohou bude tedy sestrojení přímkové kvadratické variety ze 13 bodů. Body ty označím $a_1 \ldots a_4$, $b_1 \ldots b_4$, $c_1 \ldots c_3$, $d_1\, d_2$. Spojnice $\overline{d_1\, d_2} \equiv D$ nechť je površkou. Prostory $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, určené body „a“ resp. „b“, protínají ji v bodech a^d, b^d, jež ovšem hledané varietě patří. Prostory $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ ji protínají ve dvou kvadratických plochách, které se protínají v kuželosečce v rovině $\alpha \equiv \mathfrak{A}\,,\,\mathfrak{B}$. (Dvě plochy, nepatřící téže varietě, protínají se ve čtyřech bodech.) Dá se dokázati věta: Pěti body a_k resp. b_k ve dvou různých prostorech $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ mohu proložiti ∞^1 ploch kvadratických A (v $\mathfrak{A}$) resp. B (v $\mathfrak{B}$) tak, že každé dvě plochy A B protínají se v téže kuželosečce v rovině $\alpha \equiv \mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{B}$. Důkaz: V rovině α zvolím bod „e“. Body „a_k“ a šestým bodem „e“ určena je prostorová křivka kubická ${}^3K_a$, která protne rovinu α ještě v bodech $f_a\, g_a$. Šesti body v prostoru $\mathfrak{B}$, t. j.

„b_k a „e“, určena je rovněž kubická křivka ^3K_b, protínající α v bodech $f_b\, g_b$.

Křivkou ^3K_a resp. ^3K_b možno proložiti ∞^2 ploch kvadratických A resp. B. Každá z nich protíná rovinu α v kuželosečce ^2K_a resp. ^2K_b body $e\, f_a\, g_a$ resp. $e\, f_b\, g_b$ proložené. Mají-li se obě takové plochy $A\, B$ protínati v kuželosečce K, musí $\begin{matrix} {}^2K_a \\ {}^2K_b \end{matrix}$ procházeti body $e \begin{matrix} f_b\, g_b \\ f_a\, g_a \end{matrix}$ čili $^2K_a \equiv {}^2K_b \equiv {}^2K \equiv$ $\equiv (e\, f_a\, f_b\, g_a\, g_b)$. Jest tedy jedním bodem „e“ určena jediná kuželosečka ^2K tak, že každým bodem „e“ na ^2K je jenom tato opět určena. Tím jest hoření věta dokázána, a možno z ní odvodit tento důsledek:

Ony prostorové bikvadratiky, jimiž zmíněné dva jednomocné svazky ploch procházejí, protínají se na „α“ ve čtyřech bodech, jež jsou základními body jednomocného svazku kuželoseček ^2K. Pomocí dvou kuželoseček ^2K a $^2K'$, patřících bodům (libovolným) „e“ a „e'“, snadno ony body sestrojíme a po té i obě bikvadratické křivky ^4K_a a ^4K_b.

Rovina bodů $c_1\, c_2\, c_3$, v níž leží určitá kuželosečka ^2K_c variety — procházející body $c_1\, c_2\, c_3$ — protíná prostor $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ v přímce C_a resp. C_b. Průsečíky přímek $C_a\, C_b$ s varietou patří ovšem kuželosečce ^2K_c, jakož i plochám A resp. B. Biquadratika ^4K_a indukuje na C_a bodovou involuci párů $c_a\, c_a'$. Každý pár její určuje s body $c_1\, c_2\, c_3$ kuželosečku $^2K_c{}^*$. Jednomocný svazek těchto kuželoseček indukuje na C_b involuci bodovou párů $^ac\; {}^ac'$. Ale bikvadratika ^4K_b indukuje na téže přímce C_b involuci o párech $c_b\, c_b'$. Společný pár $c_4\, c_5$ obou involucí určuje tedy s body $c_1\, c_2\, c_3$ kuželosečku hledanou ^2K_c, jež leží na žádané přímkové varietě a protíná C_a v bodech plochy A. Bikvadratickou křivkou ^4K_b a body $c_4\, c_5$ (lineárně závislými) jest plocha B určena. Kuželosečkou $^2K \equiv (B\, \alpha)$ a body „a“ určena je plocha A, takže nepotřebujeme ani bodů $c_a\, c_a'$ a tudíž kuželosečky K_c.

Po té čtrnáctým bodem „h“ proložíme tři prostory $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$. Každý z nich protne přímku D v jednom bodě a plochy $A\, B$ ve dvou kuželosečkách, ve dvou bodech se protínajících. V každém prostoru můžeme tedy sestrojiti po jedné ploše resp. M, N, P přímkové variety. Přeskupíme-li nyní prvých třináct bodů, můžeme obdobně sestrojiti jinou přímkovou varietu (resp. její plochy $A'\, B'$ a přímku D'), která protíná prostory $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ v plochách $M'\, N'\, P'$. Plochy $M\, M'$, $N\, N'$, $P\, P'$ protínají se ve třech bikvadratických křivkách plochy Φ. Určují tedy tyto s bodem h“ tři plochy žádané variety, určené čtrnácti body. Každé dvě protínají se v kuželosečce. — Další konstrukce středu a sdružených průměrů variety je jednoduchá.

Úlohu: „Sestrojiti trojmocný svazek sborcený — prostorů — druhé třídy **P** (jehož obálkou je bodová varieta druhého řádu) ze čtrnácti prostorů“ řešíme duálně. Třinácti prostory určeno je $\binom{13}{2}$ dvojmocných sborcených svazků rovinových druhé třídy,*) neboť patří-li rovina průsečná dvou prostorů právě řečenému svazku, mohu jí proložiti čtrnáctý prostor. Každý takový svazek rovinový **R** může býti pokládán za zvláštní případ svazku prostoru **P**. Dva z oněch $\binom{13}{2}$ svazků **R** pronikají se ve sborceném dvojmocném svazku prostorovém $^4\Psi$ čtvrté třídy. Neboť libovolnou přímkou možno proložiti kužel druhého druhu (o vrcholu — přímce) kvadratický k libovolnému svazku **R**. Dva takové kužele protínají se ve čtyřech prostorech. Sestrojíme-li $^4\Psi$, pak ve čtrnáctém prostoru $\mathfrak{P}$ zvolím libovolný bod „p“, jímž proložím kužel ^4K (obalený prostory svazku $^4\Psi$) čtvrté třídy ku svazku $^4\Psi$. (Každý prostor protne tento kužel v ploše čtvrté třídy, neboť i průsek prostoru s $^4\Psi$ je plocha čtvrté třídy.) Bodem „p“ vedu libovolnou přímku P v prostoru $\mathfrak{P}$, kterouž proložím čtyři tečné prostory ku ^4K. Tyto a prostor $\mathfrak{P}$ určují kužel kvadratický druhého druhu přímkou P. To opakuji třikráte. — Abychom sestrojili kvadratický kužel prvního druhu (o vrcholu „p“) patřící hledanému svazku **P**, vedeme vrcholem „p“ libovolnou přímku P' mimo prostor $\mathfrak{P}$ a proložíme jí ku třem právě zmíněným kuželům šest (lineárně závislých) prostorů, jež určují kužel druhého druhu přímkou P' jako vrcholem. Všechny takové kužele obalují kužel prvního druhu — hledaný. Ke třem vrcholům „p“, „q“, „r“ prostoru $\mathfrak{P}$ sestrojím stejným způsobem tři kužele prvého druhu, patřící svazku **P**. Libovolným bodem „v“ sestrojím kužel prvého druhu svazku **P** ze tří kuželů druhého druhu o přímkách — vrcholech $\overline{v\,r}$, $\overline{v\,p}$, $\overline{v\,q}$. Soubor těchto kuželů tvoří svazek **P**, proložený čtrnácti danými prostory.

Svazek $^4\Psi$ sestrojím takto: Dané prostory seskupím tak, že bodem $\begin{matrix}a\\b\end{matrix}$ procházejí prostory $\begin{matrix}\mathfrak{A}_1\ldots\mathfrak{A}_4\\\mathfrak{B}_1\ldots\mathfrak{B}_4\end{matrix}$, tři prostory $\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2\,\mathfrak{C}_3$ určují přímku a dva $\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{D}_2$ rovinu δ rovinového svazku **R**. Bodem $\begin{matrix}„a“\\„b“\end{matrix}$ prochází celkem pět prostorů, stanovíme-li i prostor $\begin{matrix}a\,\delta\equiv\mathfrak{A}_d\\b\,\delta\equiv\mathfrak{B}_d\end{matrix}$. Těmito a libovolným prostorem $\mathfrak{E}$ přímkou $a\,b\equiv A$ proloženým určen je kužel třetí třídy s bodem $\begin{matrix}„a“\\„b“\end{matrix}$

---

*) jehož obálkou je přímková kvadratická varieta. Každou z ∞^2 površek P této variety mohu proložiti ∞^1 tečných prostorů, jichž svazek je projektivním se svazkem příslušných dotyčných bodů na P a má tudíž za základnu rovinu π přímkou P procházející. Tato rovina π jest jediná z ∞^2 rovin přímkou P, jež protíná varietu jen ve — dvojnásob počítané — přímce P. Obdržím ji jako tečnou rovinu, přímkou P ke kuželi, v němž protíná libovolný tečný prostor, přímkou P proložený, varietu. Všech ∞^2 rovin π tvoří svrchu zmíněný svazek dvojmocný. — Samostatné jeho vytvoření je toto: Ve dvou rovinách „α“ a „β“ (protínajících se v bodě) stanovím reciproké systémy bodů „a“ (v „α“) a přímek B (v „β“). Roviny $(a\,B)$ patří svazku.

jako vrcholem,**) k němuž možno přímkou A proložiti ještě dva tečné prostory $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{F}_a\ \mathfrak{G}_a}{\mathfrak{F}_b\ \mathfrak{G}_b}$. Pěti prostory $(\mathfrak{E}\ \mathfrak{F}_a\ \mathfrak{F}_b\ \mathfrak{G}_a\ \mathfrak{G}_b)$ přímkou A určen je kužel druhé třídy druhého druhu s přímkou A jako vrcholem. Každým prostorem $\mathfrak{E}$ určen je jediný takový kužel. Možno jich proložiti celkem ∞^1 a protínají se ve čtyřech prostorech (jimiž prochází právě oněch ∞^1 kuželů). Tyto a pak pět (lineárně s nimi závislých) prostorů $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ určuje bodem $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b}$ ∞^1 kuželů prvého druhu o vrcholu $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b}$, jež procházejí kuželem čtvrté třídy $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^4K_a}{{}^4K_b}$, určeným právě oněmi devíti závislými prostory.†)

Průsečná přímka prostorů $\mathfrak{E}_1\,\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_3$ určuje s vrcholem $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b}$ rovinu $\genfrac{}{}{0pt}{}{\gamma_a}{\gamma_b}$, na níž indukuje $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^4K_a}{{}^4K_b}$ involuci prostorů o párech $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{E}_a\ \mathfrak{E}_a'}{\mathfrak{E}_b\ \mathfrak{E}_b'}$. Prostory ty a $\mathfrak{E}_1\,\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_3$ určují kvadratický kužel druhého druhu (vrcholem je přímka $(\mathfrak{E}_1\,\mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_3)$, k němuž možno rovinou $\genfrac{}{}{0pt}{}{\gamma_b}{\gamma_a}$ vésti prostory $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^a\mathfrak{E}\ {}^a\mathfrak{E}'}{{}^b\mathfrak{E}\ {}^b\mathfrak{E}'}$, jež tvoří pár určité involuce. Společný pár této s involucí prve zmíněnou párů $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{E}_a\ \mathfrak{E}_a'}{\mathfrak{E}_b\ \mathfrak{E}_b'}$ určuje s ${}^4\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^4K_a}{K_b}$ kužel druhé třídy prvého druhu $\genfrac{}{}{0pt}{}{{}^2K_a}{{}^2K_b}$. Ovšem, že oba kužele ${}^2K_a$, ${}^2K_b$ mají společný kužel druhého druhu o vrcholu — přímce A, a patří tedy témuž svazku **R**, jakož i kužel druhého druhu, určený prostory $\mathfrak{E}$. Libovolným bodem „m“ stanovím kužel patřící **R**, když přímkami $\overline{m\,a}$, $\overline{m\,b}$ proložím po jednom kuželi druhého druhu ke kuželům prvého druhu ${}^2K_a\,{}^2K_b$. Tyto a prostor $(m\,\delta) \equiv \mathfrak{M}$ určují hledaný kužel o vrcholu „m“. Jejich soubor pak svazek **R**. — Proměníme-li nyní seskupení třinácti prostorů, obdržíme svazek **R**′, načež $\mathbf{R}\,.\,\mathbf{R}' \equiv {}^4\Psi$.

Louny, v březnu 1922.

**) Průsečné roviny prostoru $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}$ s ostatními prostory $\mathfrak{A} + \mathfrak{E}$ určují kvadratický kužel v prostoru $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2}$. Oba kužele nejsou ve stejném prostoru, mají však společný vrchol „a“ a rovinu tečnou $\alpha = \mathfrak{A}_1\,.\,\mathfrak{A}_2$. Každou přímkou P, vedenou bodem „a“, v rovině „α“, možno proložiti ještě po jedné tečné rovině k oběma kuželům. Obě určují prostor. Souhrn těchto prostorů určuje nahoře zmíněný kužel třetí třídy.

†) Jest obálkou právě ∞^1 prostorů a jedním takovým prostorem prochází pouze jediná tečná rovina.

O určité ploše třetího řádu ve čtyřrozměrném prostoru.

Napsal

Ph. Dr. Václav Hlavatý.

(Předloženo dne 28. dubna 1922.)

Buďtež dány dva kolineární rovinné systémy ϱ_1 a ϱ_2. Promítnutím systému $\genfrac{}{}{0pt}{}{\varrho_1}{\varrho_2}$ z přímky $\genfrac{}{}{0pt}{}{S_1}{S_2}$ mimoběžné s rovinou ϱ a přímkou $\genfrac{}{}{0pt}{}{S_2}{S_1}$ obdržíme dva kollineární svazky rovinové o osách S_1 resp. S_2. Geometrické místo samodružných bodů obou svazků je určitá plocha Π třetího řádu. Neboť libovolný lineární trojrozměrný prostor (krátce prostor) protíná plochu v prostorové kubické křivce ${}^3K$, která je geometrickým místem samodružných bodů průsečných kollineárních přímkových svazků.

Plochu Π možno „znázorniti" v libovolné rovině φ_0 tak, že libovolnému bodu a_0 přiřadím projektivně roviny α_1 resp. α_2 ve svazcích $S_1(\alpha_1\ldots)$ resp. $S_2(\alpha_2\ldots)$, které se protínají v bodě „a" plochy Π. Dá se snadno dokázati, že přímé řadě bodové ${}^2K_0$ odpovídají projektivně dva svazky rovin v prostorech $\mathfrak{K}_1$ resp. $\mathfrak{K}_2$. Jejich průsečná rovina protíná osy S_1 a S_2 v bodech s_1 a s_2; jest tedy geometrickým místem samodružných bodů takové roviny kuželosečka ${}^2K$ body s_1 a s_2. Neboť rovina ta protne oba rovinové svazky jednak v bodech s_1 a s_2 a jednak ve dvou projektivních svazcích paprskových o vrcholech s_1 resp. s_2. *Jest tedy každá přímka ${}^2K_0$ v rovině φ_0 obecně položená obrazem určité kuželosečky ${}^2K$ na ploše Π.* Ježto každý prostor protíná Π v kubické křivce, pak musí prostor $\mathfrak{S} \equiv (S_1 S_2)$, (který není samodružný) protínati plochu ještě v přímce X, kterou obdržíme takto: Prostoru $\mathfrak{S}_1 \equiv (S_1 S_2)$ přiřadím prostor $\mathfrak{S}_2$. Rovině $\sigma_2 \equiv \mathfrak{S}_1 . \mathfrak{S}_2$ najdu sdruženou σ_1. Ježto obě roviny jsou v témž prostoru $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}_1$, protínají se v přímce X, která protíná mimoběžky $S_1 S_2$. Přiřadím-li bodu x_0 roviny σ_1 resp. σ_2, *jest obrazem přímky X bod x_0.* Rovinami $(X S_1)$ resp. $(X S_2)$ mohu proložiti ∞^1 sdružených prostorů $\mathfrak{P}_1$ resp. $\mathfrak{P}_2$, které se protínají v ∞^1 rovinách π přímkou X. Každá rovina π protne oba svazky v bodech s_1 resp. s_2 a dvou projektivních svazcích o vrcholech s_1 resp. s_2 a samodružném paprsku $\overline{s_1 s_2} \equiv X$. Kuželosečka, ve které rovina π plochu Π protíná, jest tedy degenerovaná ve dvě přímky X a P. Obraz této kuželosečky je přímka P_0 bodem x_0. Ježto x_0 je obrazem přímky X, je P_0 obrazem přímky P: *Každá přímka P_0 bodem x_0 zobrazuje jednu površku P.* Z vyobrazení je zřejmo, že přímky P mimo X se protínati nemohou. Leč každým bodem na přímce X prochází jen jediná přímka P, neboť X, jsouc částí kubické křivky $S_1 X S_2$, musí býti jednoduchá. — Můžeme tedy na základě tohoto znázornění prosloviti následující: *Plocha Π jest přímková. Její površky P, vzájemně mimoběžné, protínají přímku X. Každá určena je jedním bodem. Na ploše leží ∞^2 kuželoseček ${}^2K$, z nichž každá je určena dvěma body. Jedním bodem prochází ∞^1 kuželoseček. Každá kuželosečka protíná jinou kuželosečku libovolnou nebo libovolnou přímku P v jednom bodě. Žádná však neprotíná přímku X. Křivé řady, ve kterých površky protínají všechny kuželosečky, jsou projektivné.*

Kuželosečkou ${}^2K$ a jedním bodem „a“ na ploše určen je prostor, který protne Π v kubické křivce degenerované v kuželosečku ${}^2K$ a určitou površku bodem a. Obraz této průsečné křivky jsou přímky ${}^2K_0$ a $P_0 \equiv a_0 x_0$.

Přímkou X mohu ovšem proložiti ještě roviny „μ“, které nejsou však průsekem dvou sdružených prostorů. Abych obdržel další samodružný element v rovině μ, stanovím ku prostoru $\mathfrak{M}_1 \equiv (S_1 \mu)$ sdružený $\mathfrak{M}_2$. Ježto průsečná rovina $(\mathfrak{M}_1 . \mathfrak{M}_2)$ prochází přímkou X, jest další samodružný element na X: *Roviny „μ“, které přímkou X procházejí, nejsou však průsekem sdružených prostorů, protínají plochu Π jen v přímce X.*

Zvolme čtyři libovolné body $a^{(i)}$ $(i = 1 \ldots 4)$, neležící v téže rovině. (Jejich obrazy $a_0{}^{(i)}$ neleží na téže přímce.) Prostor $\mathfrak{A}$ jimi určený protíná X v bodě $a^{(5)}$, který leží ovšem na průsečné kubické křivce $(\mathfrak{A}\, \Pi) \equiv {}^3K$. Její obraz ${}^3K_0$ musí procházeti body $a^{(i)}$ a bodem $a_0{}^{(5)} \equiv x_0$. Ježto každá přímka P protíná prostor $\mathfrak{A}$ v bodě kubické křivky ${}^3K$, musí P_0 protínati ${}^3K_0$ kromě bodu x_0 ještě v jednom bodě: *Obrazem křivky kubické ${}^3K$ na ploše Π jest kuželosečka, procházející bodem x_0.*

Plocha Π protíná úběžný prostor v úběžné křivce ${}^3K^{(u)}$. Jejím obrazem nechť je kuželosečka ${}^3K_0{}^{(u)}$. I můžeme tvrditi následující: *Celkem na ploše existuje ∞^4 křivek ${}^3K$. Čtyřmi body prochází jediná ${}^3K$. Třemi body prochází ∞^1 těchto křivek. Tento svazek indukuje na každé kuželosečce ${}^2K$ involuci bodovou,* neboť každá ${}^3K$ protíná každou ${}^2K$ ve dvou bodech (a přímku P libovolnou v jednom bodě). *Křivku ${}^3K$ možno vytvořiti na ploše průsečíky přímek P s projektivně jim přiřazenými kuželosečkami, jedním bodem procházejícími.* [Je-li $X\ (P \ldots) \overline{\wedge}\ a\ ({}^2K \ldots)$, pak kuželosečky určené body $(P^{(1)} . {}^2K^{(2)})$ a $(P^{(2)}\ {}^2K^{(1)})$ atd. procházejí jedním bodem na ploše, jímž možno vésti jednu přímku P protínající ${}^3K$ právě v bodě přímky X a jednu kuželosečku křivky ${}^3K$ se dotýkající.] A dále z obrazu ${}^3K_0{}^{(u)}$: *Na ploše existuje jediná površka $P \parallel X$ (P_0 je tečnou ku ${}^3K_0{}^{(u)}$). Každým bodem* *na ploše* (vyjímaje body právě řečené přímky P) *možno vésti dvě paraboly (celkem ∞^1), které tvoří přechod mezi hyperbolami a elipsami na Π.*

Kuželosečce ${}^3K_0$ bodem x_0 odpovídá kubická křivka ${}^3K$. Co odpovídá kuželosečce ${}^4K_0$ bodem x_0 neprocházející? Ježto ${}^4K_0$ protíná každou ${}^3K_0$ ve čtyřech bodech, a tudíž i prostor, ve kterém ${}^3K$ leží ve čtyřech bodech: *Kuželosečka ${}^4K_0$, která bodem x_0 neprochází, jest obrazem křivky čtvrtého řádu ${}^4K$ ve čtyřrozměrném prostoru.* (${}^4K$ jest průsečná křivka tří kvadratických variet druhé species,*) jichž vrcholové přímky leží v téže rovině): *Existuje na ploše ∞^5 křivek ${}^4K$. Každá je určena 5 body. Protíná resp. ${}^3K$ ${}^2K$ P ve resp. 4, 2, 2 bodech, neprotíná však přímku X. Na ploše ji vytvoříme, když stanovíme průsečíky dvou svazků projektivních kuželoseček, procházejících dvěma body.* (Opět kuželosečky určené dvěma průsečíky (${}^2K^{(1)}$ ${}^2K^{(II)}$), (${}^2K^{(2)}$ ${}^2K^{(I)}$) kuželoseček nesdružených procházejí jedním bodem.) Každým bodem možno vésti dvě kuželosečky křivky ${}^4K$ se dotýkající. Obecně možno vésti čtyři paraboly dotyčné ${}^2K$ ku křivce ${}^4K$. (${}^2K_0$ jsou společné tečny kuželoseček „${}^2K_0^{(u)}$“ a „${}^4K_0$“.) Každá ${}^4K$ má 4 body (reálné neb imaginárné) úběžné. V případě čtyř reálných mohou býti seskupeny takto: 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$. Jsou-li dva imaginárné: $2+{}^i1+{}^i1$, $1+1+{}^i1+{}^i1$. Je-li křivka uzavřená: ${}^i1+{}^i1+{}^i1+{}^i1$, ${}^i2+{}^i2$. — *Čtyřmi body prochází ∞^1 křivek ${}^4K$, které indukují na libovolné přímce P neb kuželosečce ${}^2K$ involuci bodovou.*

Ze zobrazení je zřejma i tato konstrukce plochy Π: Bodům na přímce X přiřadíme jedno-jednoznačně řadu bodovou na kuželosečce ${}^2K$, jejíž rovina přímku X neprotíná. Spojnice sdružených bodů jsou površky P. Přiřazení provedeme tak, že rovinou, — která protíná rovinu kuželosečky právě v jednom jejím bodě a přímku X neprotíná — proložíme ∞^1 prostorů. Jich průsečíky s X resp. ${}^2K$ jsou body přiřazené.

Louny, v březnu 1922.

---

*) t. j. kvadratických trojdimensionálných kuželů o vrcholu-přímce.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 25.

Brakteolární úponky rodů Antigonum a Brunichia (Polygonaceae).

Napsal

Univ. docent Dr. František Schustler.

(S obrázkem v textu.

(Předloženo dne 26. května 1922.)

Jest dobře známou skutečností, že kterýkoliv orgán rostlinný může býti ustrojen k zastávání určité funkce. Metamorfosa listů ukazuje nejlépe tuto schopnost, jež umožňuje, aby fylogeneticky týž orgán zastával zcela rozdílné úkoly životní. Právě tak ovšem známe případy, kde u různých typů rostlinných k vykonávání téže funkce ustrojeny jsou orgány fylogeneticky rozdílné.

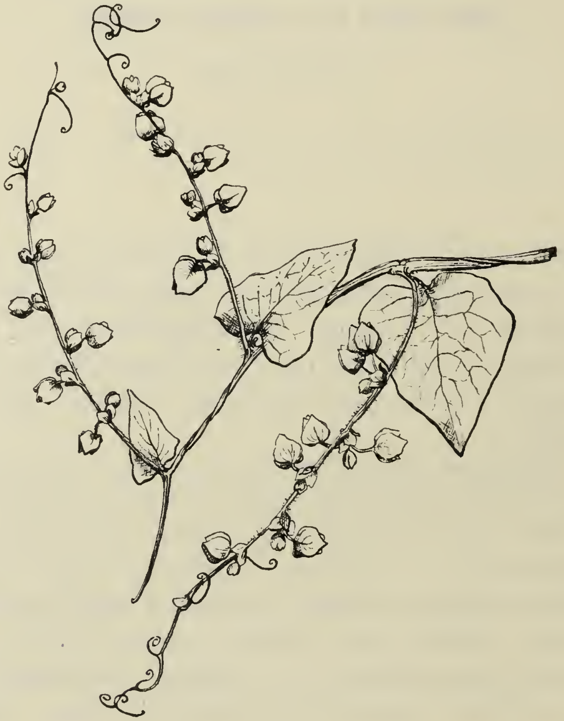
Velmi markantním příkladem tohoto zjevu jsou útvary úponkové. Srovnávací morfologie odvozuje tyto orgány od nejrůznějších prvků. Známe úponky osní (Vitis a příb., Passiflora a j.) i listové (Lathyrus, Vicia, Pisum, Cobaea, Bignoniaceae), ba dokonce i trichomy (resp. emergence) jsou schopny přejmouti úponkovou funkci (Smilax). Častým zjevem jsou i úponky kombinované, částečně osou tvořené, větvené, kde „větévky“ jsou přetvořenými listy (Cucurbitaceae a j.). Konečně i květenství bývá schopno ovíjení nebo vytváření úponkových větévek (Serjania, Brunichia, Landolphia a p.).

Zajímavou kombinaci tohoto — v základě osního — případu s úponkovými útvary listovými (fyllomovými) zjistil jsem u popínavých typů rdesnovitých (Polygonaceae—Coccolobeae) *Antigonum a Brunichia.*

U všech druhů těchto rodů vidíme dobře onu tendenci přetvořiti květenství v orgány úponkové, při čemž ovšem hlavní roli hraje osa květenství, avšak upínací funkci přejímají i brakteje (tedy fyllomy) hořejších (zpravidla abortovaných) květů.

Druh *Antigonum cordatum* Mart. et Gal. (již. Amer.) má dlouhé popínavé lodyhy s ± deltoidickými listy, z jichž paždí v hoření části lodyhy vyrůstají štíhlé, řídké hrozny (v dolejší části složené, ježto v paždí brakteje vyrůstají zpravidla 2—3květá dichasia). Dolejší $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$ nesou normálně plodné květy v úžlabí úzce šupinkovitých braktejí. Hořejší polovina osy květenství jest přetvořena v úponku, na spodu ještě květy nesoucí, jejichž brakteje stávají se ± šidlovité, protahují se, a u nejhořejších květů nabývají podoby krátké, spirálně stočené úponky. Nejhořejší část osy je dokonalá, jednoduše zpeřeně větvená úponka, jejíž větévky však jsou zřejmě dalšími přeměněnými listeny, jejichž úžlabní květy abortovaly úplně.

Podobně má se věc u *Antigonum leptopus* Hook. et Arn. a *Brunichia cirrhosa Banks* (záp. Indie). Zde máme květenství bohatě latovitě větvené, částečně úplně nedotčené, částečně s některými větvemi úponkovitě přetvořenými, při čemž hořejší brakteje květní přecházejí znenáhla v útlé, prodloužené úponky. U *Brunichia cirrhosa* mění se některé větve úplně v úponky, při čemž květy vesměs abortují, avšak jenom vrcholové brakteje se mění v dokonalé úponkové spirály.



Antigonum cordatum **Mart. et Gal.**
Viděti poznenáhlou přeměnu květenství v úponku, při čemž brakteje mění se v úponkové „větévky“.
Ploché šupiny na spodu stopek květních (resp. plodních) jsou listence (profylla). Originál.

U *Brunichia africana* Welw. (trop. Afrika) shledáváme extrémní případ, kde úponkové větve zůstávají vůbec sterilní, přejímají funkci upínací úplně. Vyrůstají mimo oblast květní z úžlabí listů jako silné drátovité útvary, jež se na konci zpravidla větví ve 2 ramena (obě povahy osní), jimiž se dovedou pevně ovíjeti. Fyllomové (resp. brakteolární) útvary nedají se na nich zjistiti, pouze jedno z ramen bývá podepřeno nepatrnou, záhy oprchavou šupinkou. Máme zde tedy normální osní úponky jako u Vitis a p.

Zajímavým zjevem jest kombinovaná osně-brakteolární úponka zmíněných typů zejména z toho ohledu, že přeměňuje se tu hořejší část osy květenství v úponku, tedy ona část, jež vždy vykazuje postupně slabší a slabší schopnost větvení, ale že funkci postranních větví přejímají k tomu zvlášť transformované brakteje. U r. Serjanie, Passifloracei a p., kde shledáváme se též s ovíjivými osami květenství, jest v úponku přeměněna dolní část jejich, schopná větvení, takže tam funkci příchytných orgánů zastávají postranní (sterilní) větve květenství.

Co se týče brakteolárních úponek samotných, zdají se tyto býti přeměněnou řapíkovou částí fyllomu (která ovšem jinak u braktejí abortuje), kdežto poševní oddíl (brakteu květní tvořící) se čím blíže k vrcholu, tím více redukuje. Ostatně i řapíky listů lodyžních jeví do jisté míry ovíjivé schopnosti, takže využití této části fyllomu k ovíjecí funkci jest i u braktejí pochopitelno.

Nejblíže stojí úponkovým útvarům těchto Polygonaceí úponky Cucurbitaceí, jež rovněž představují kombinaci osy a listů — ovšem bez bližších vztahů ke květenství.

Vztah křivky strikční hyperboloidu k jeho kruhovým řezům a konstrukce z toho plynoucí.

Napsal

Dr. Ant. Pleskot, profesor v Plzni.

S obr. v textu.

(Předloženo dne 26. května 1922.)

Křivka strikční trojosého hyperboloidu má k jeho kruhovým řezům velmi zajímavý jednoduchý vztah, takže vlastnosti té lze použiti ke konstrukcím týkajícím se této křivky.

Ze vztahu toho odvodíme v úvaze své novou konstrukci křivky té a jejích tečen.

Krátký rozbor rovnice křivky strikční uvede nás k cíli.

Rovnici křivky té uvedeme ve formě poněkud odlišné od tvaru jak obyčejně se uvádí. Určíme totiž souřadnice jako funkce souřadnic ξ, η, bodů hrdelní ellipsy, jež jsou vztaženy na osy této ellipsy.

Rovnice hyperboloidu v obvyklé formě budiž:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

při čemž $a > b$ jest.

Jsou-li ξ, η, o, souřadnice bodu A hrdelní ellipsy, již označíme e, pak rovnice površky jdoucí bodem A soustavy, již nazveme prvou, lze psáti ve tvaru:

$$x = \xi - z\eta \frac{a}{bc},$$

$$y = \eta + z\xi \frac{b}{ac}.$$

Jsou-li nyní x, y, z souřadnice centrálního bodu této površky, pak snadno určíme:

$$\begin{aligned} x &= \xi \frac{a^2 (b^2 + c^2)}{c^2 (\xi^2 + \eta^2) + a^2 b^2} \\ y &= \eta \frac{b^2 (a^2 + c^2)}{c^2 (\xi^2 + \eta^2) + a^2 b^2} \\ z &= \xi \eta \frac{(b^2 - a^2)\, c^3}{b\, a\, [c^2 (\xi^2 + \eta^2) + a^2 b^2]}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Kdybychom hledali centrální bod na površce druhé soustavy jdoucí týmž bodem A, tu platily by pro souřadnice x a y tytéž rovnice jako v soustavě (1) a souřadnice z byla by až na znaménko též táž, což znamená, že površky různých soustav jdoucí týmž bodem A (ξ, η, o) mají příslušné centrální body souměrné k rovině ellipsy e.

Poněvadž úvaha naše vztahuje se na první průmět křivky strikční t. j. do roviny rovnoběžné s rovinou ellipsy e, stačí vzíti v úvahu pouze dvě prvé rovnice systemu (1) a výsledky další platí pro strikční křivky obou systemů površek.

Z prvých dvou rovnic soustavy (1) plyne:

$$\frac{y}{x} = \frac{\eta}{\xi} \frac{b^2}{a^2} \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2}\,;$$

konstanta

$$\frac{b^2}{a^2} \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \cos^2 \gamma,$$

značí-li γ úhel, jejž tvoří roviny kruhových řezů hyperboloidu s rovinou ellipsy e.

Zavedeme-li tento úhel do rovnice předchozí, dospíváme k rovnici:

$$\frac{y}{x} = \frac{\eta}{\xi} \cos^2 \gamma\,. \tag{2}$$

Volíme-li nyní obvykle za první průmětnu rovinu rovnoběžnou s rovinou ellipsy e, pak osa x promítne se v osu x_1, osa y v y_1, ellipsa e v e_1, bod A v A_1 a površka g jdoucí bodem A v tečnu g_1 ku e_1, procházející bodem A_1 (obr. 1.).

Průmět c_1 centrálního bodu c bude na g_1 a současně na přímce, jejíž rovnice jest (2). Poněvadž přímka tato prochází bodem o_1, průmětem to středu hyperboloidu, stačí k určení jejímu ještě jeden její bod P_1 a ten volme tak, že jeho $x_1 = \xi$; pak příslušné y_1 jest:

$$y_1 = \eta \cos^2 \gamma = A_0 P_1\,,$$

značí-li A_0 patu kolmice s bodu A_1 na osu x_1 spuštěné. Budiž b přímka procházející bodem o_1 a uzavírající s osou x_1 úhel γ, jejž známým způsobem sestrojíme.

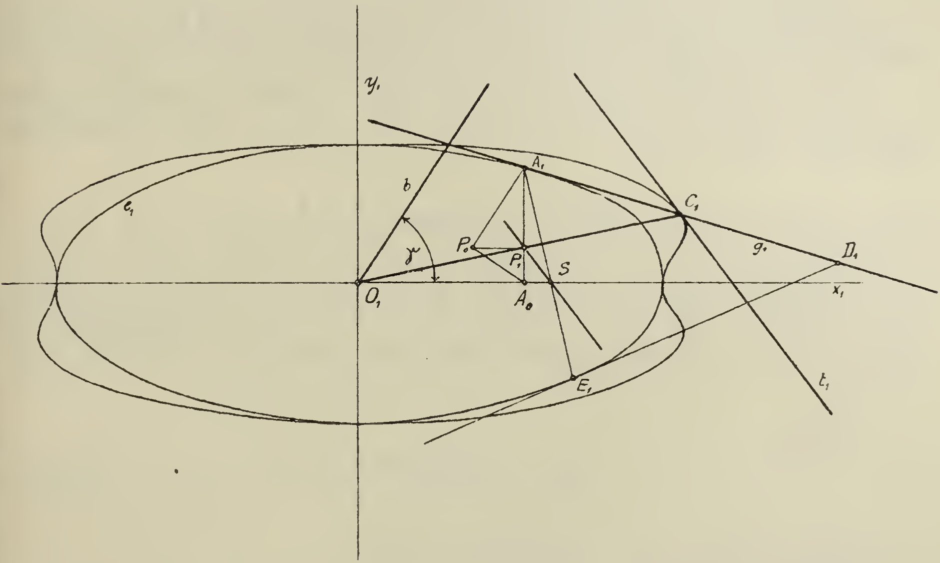
Bod P_1 určíme tak, že bodem A_1 vedeme rovnoběžku s přímkou b a bodem A_0 kolmici ku b; průsečík těchto přímek označme P_0. Kolmice bodem P_0 ku $A_0 A_1$ vedená protíná $A_0 A_1$ v bodě P_1, neboť:

$$A_0 P_1 = y_1 = A_0 A_1 \cos^2 \gamma = \eta \cos^2 \gamma.$$

Jest tedy průsečík C_1 přímky $O_1 P_1$ s tečnou g_1 prvým průmětem centrálního bodu C_1; druhý průmět C_2 na rovinu $x\,z$ určíme známým způsobem znajíce druhý průmět g_2 površky.

Je-li tedy přímka b jednou stanovena, lze obrazy centrálních bodů rychle a snadno stanoviti.

(Obr. 1.)



Kdybychom obvyklým, způsobem jak se to v deskriptivní geometrii činí, průmět C_1 stanovili, pak jak z obrazce (1) patrno, byl by tím stanoven i úhel γ a pro ostatní površky mohli bychom stanoviti centrální body způsobem vyloženým.

Konstrukci hořejší lze též takto upraviti:

K ellipse e_1 stanovme affinní ellipsu e_0, takže osou affinity jest osa x_1 a poměr affinity $\cos^2 \gamma$; pak průmět C_1 centrálného bodu C určíme tak, že k bodu A_1 stanovíme affinní bod P_1 a určíme průsečík $O_1 P_1$ s tečnou g_1.

Poněvadž tečna g_1 jest současně průmětem g'_1 druhé površky g' jdoucí bodem A, stotožňují se průmět C'_1 centrálního bodu C' na této površce s průmětem C_1 a druhý průmět C'_2 jest na průmětu g'_2 površky g'.

Jsou tedy body C a C' souměrny dle roviny ellipsy e, což ostatně plyne z toho, co řečeno bylo při rovnicích křivky strikční obou systémů površek.

Ze způsobu konstrukce bodu P_1 vidíme, že bod ten jest prvým průmětem paty P kolmice bodem A ku rovině středem hyperboloidu vedené a protínající hyperboloid v kružnici; takové roviny kruhové jsou dvě a obě vedou ovšem k témuž bodu P_1.

Z toho dále plyne, že přímka $O_1 P_1$ jest průmětem roviny jdoucí osou hyperboloidu kolmou na rovinu hrdelní ellipsy a bodem P; tím dospíváme ku větě:

Křivka strikční jak prvé tak druhé osnovy površek, zkrátka křivka strikční, ježto obě tvoří v podstatě křivku jedinou, jest geometrické místo průsečíku površky s rovinou, jež prochází osou hyperboloidu kolmou na rovinu hrdelní ellipsy a patou kolmice spuštěné na rovinu kruhových řezů jdoucích počátkem z toho bodu površky, ve kterém tato protíná hrdelní ellipsu.

Přistupme ke konstrukci tečny křivky strikční.

Určíme tečnu k prvému průmětu křivky strikční, čímž bude stanovena i tečna ke křivce, ježto tečnou rovinu k hyperboloidu stanoviti dovedeme.

Po jednoduchých obratech vypočteme z rovnic (1) směrnici tečny k průmětu křivky v bodě C_1 ve tvaru, který podává velice jednoduchou konstrukci tečny a sice:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} cos^2 \gamma \frac{2x - \xi}{2y - \eta}$$

Položíme-li $2x - \xi = u$, $2y - \eta = v$, pak u a v značí souřadnice bodu D_1 (obr. 1.) ležícího na tečně g_1 ellipsy e_1 souměrně položeného s bodem A_1 hledíc k průmětu C_1 centrálního bodu površky g_1, takže $A_1 C_1 = C_1 D_1$.

Výraz:

$$A_p = -\frac{b^2}{a^2} \frac{2x - \xi}{2y - \eta},$$

jest směrnicí poláry bodu D_1 hledíc k ellipse e_1.

Možno tedy psáti:

$$\frac{dy}{dx} = A_p cos^2 \gamma,$$

z čehož plyne, že směrnice tečny průmětu křivky strikční jest rovna směrnici přímky affinně sdružené ku poláře bodu D_1, je-li poměr affinity $cos^2 \gamma$ a osa affinity x_1.

Vedeme-li tedy bodem D_1 druhou tečnu k ellipse, jež dotkne se ellipsy v bodě E_1, pak směrnice

$$\frac{dy}{dx}$$

jest rovná směrnici přímky $P_1 S$, značí-li S průsečík přímky $A_1 E_1$ s osou x_1 ellipsy a bod P_1 průsečík $O_1 C_1$ s kolmicí s bodu A_1 na osu x_1 spuštěnou.

Tečna t_1 k průmětu křivky strikční v bodě C_1 jest tedy rovnoběžka s přímkou $P_1 S$ bodem C_1 vedená.

Uvážíme-li, že tečna $D_1 E_1$ jest prvým průmětem površky druhé soustavy procházejícím taktéž bodem D_1, pak možno předchozí konstrukci tečny prostorově takto vysloviti:

Stanovme na površce bodem A hrdelní ellipsy vedené souměrný bod D k bodu A hledíc k centrálnému bodu této površky. Sestrojíme-li v bodě D tečnou rovinu k hyperboloidu, seče tato rovinu hrdelní ellipsy v přímce q;

promítneme-li přímku q do roviny některého kruhového řezu hyperboloidu, obdržíme přímku p. Tečna v bodě C křivky strikční jest pak průsečnicí roviny tečné hyperboloidu v bodě C s první promítající rovinou procházející bodem C a rovnoběžnou s přímkou p.

V předchozím stanoveny tečný k prvému průmětu křivky strikční, čímž stanoveny i tečny k druhému průmětu křivky na rovinu $x\,z$, vyjímaje v bodě, který jest středem druhého průmětu, neboť tečné roviny hyperboloidu ve vrcholech malé poloosy, jimiž křivka strikční též prochází, stotožňují se s rovinami, jež promítají tečnu křivky na rovinu ellipse e_1.

Tečny ve středu druhého průmětu křivky strikční určíme, položíme-li v rovnicích (1) $\xi = 0$, $\eta = \pm b$ a stanovíme-li hodnotu:

$$\frac{z}{x} = A\,;$$

pak A značí směrnici tečny vedené k druhému průmětu křivky strikční v jejím středu. Směrnice vzata jest vzhledem k ose x_2, která jest průmětem osy x, kde ovšem $x_2 \equiv x$, volí-li se rovina $x\,z$ za druhou průmětnu. Z rovnic (1) obdržíme:

$$A = \pm \frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}\,\frac{c^3}{a^3} = \pm \frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}\,\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{c}{a},$$

kterýžto výraz, uvážíme-li, že $\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}\cdot\frac{c^2}{a^2} = sin^2\,\gamma$, lze psáti ve tvaru:

$$A = \pm \frac{c}{a}\,sin^2\,\gamma.$$

Poněvadž $\pm \frac{c}{a}$ jsou směrnice asymptot osového řezu $x\,z$ hyperboloidu, možno vysloviti větu: Tečny ve středu druhého průmětu k němu vedené jsou affinně sdružené k průmětu asymptot osového řezu $x\,z$, při čemž osou affinity jest osa $x_2 \equiv x$ a poměr affinity $sin^2\,\gamma$. Poněvadž úhel γ jest znám, lze tečny snadno sestrojiti. Podobným způsobem lze určiti průměty tečen křivky strikční ve vrcholech velké osy ellipsy na průmětnou rovinu $y\,z$.

O kontaktně změněném gabbrodioritu od Klokočné.

Podávají

J. Kratochvíl a V. Veselý v Praze.

(Předloženo dne 26. května 1922.)

Helmhacker zavedl název *korsitů* pro typy hornin dioritových s anorthitem. Ukazuje se však, že složení i struktura jednotlivých členů si neodpovídá. Již byl podán dodatek k Helmhackerovu popisu korsitu od sv. Martina od Ronova a srovnány s ním stlačené diority z okolí Žleb.[1]) Hinterlechner uveřejnil detailní výzkumy o eruptivních horninách Železných hor [2]) a t. zv. korsity zařaďuje dle petrografické i chemické analysy mezi gabbra a gabbrodiority.

V této práci jest znovu popsána hornina od Klokočné nazvaná Helmhackerem [7]) také korsit, Katzerem [3]) diorit a dioritový porfyrit. Byly konstatovány nové zajímavé detaily objasňující původ této horniny, jakož i provedena chemická analysa.

Odkazujíce na podrobný topografický popis krajiny od Katzera [3]) omezíme se jen na stručnou připomínku. Na mapce str. 359 je zakreslen diorit ve 3 pruzích probíhajících v metamorfních břidlicích. Zalesnění a kultura nedovoluje rozhodnouti poměry uložení. Směr domnělých žil je kreslen skoro rovnoběžně k porfyrovým žilám na ssz. se ukazujícím, ne tedy rovnoběžně k okraji žulového massivu.

Vzorky sebrané z nejvyššího místa záp. od vsi „u hrušky", z návsi, mezi těmito místy i směrem na vých. k Struhařovu, ukazují zřejmou porfyričnost velikými zrny živce, méně štěpnými destičkami amfibolu. Na hnědožlutých ovětralých plochách zbývají důlky po vyloužených živcích. V hornině při povrchu jsou neznatelné spáry, patrné jen při povrchu; dle těch se hornina při nárazu dělí, na nich je tenký světle žlutý povlak limonitu. Tyto spáry výsledkem rozpadu nejsou.

V lomu na vých. od vesnice směrem k Struhařovu je lom téže horniny, zrna drobného až jemného. Barva její modrošedá liší se od zelenošedé barvy facie porfyrické. Ve výbruse makroskopicky se takřka nerozezná od beerbachitu, od něhož se mikroskopickou strukturou přece jen liší.

Makroskopicky jsou zřetelna zrna živců velikosti až ½ *cm*, isometrická, barvy šedé, šedozelené i nažloutlé; dále zrna amfibolu až ½ *cm* veliká, oboje uložena v drobnozrnné hmotě ostatní.

Jednou byla patrna pouhému oku tříštičkovitá pseudomorfosa uralitová po amfibolu, skoro ½ *cm* veliká. H = 2·84

Mikroskopicky určeny: plagioklasy, amfiboly, biotit, zbytek pyroxenu, titanit, rutil, rudy, epidot, muskovit a nejzajímavější součást: turmalin.

Živce tvoří zrna idiomorfní, hypidiomorfní i allotriomorfní ve všech velikostech. Jsou isometrické i štíhle sloupečkovité. V mikroskopu jsou čisté, průhledné, neb zakalené červenavě hnědým barvivem. Nějaká souvislost rozložení barviva s množstvím a uložením vrostlic nemohla býti konstatována. Vrostlicemi vedle mála produktů sekundárních jsou drobná zrnitá individua amfibolová někde v pruzích, dále pory neurčitého obsahu. Obecně byly vrostlice ve velikých zrnech hustěji nahromaděny.

Pro práškový preparát bylo nesnadno odděliti idiomorfní zrna živce od ostatních. Velikost jejich totiž klesala na velikost ostatních zrn allotriomorfních. Určením lomu ve výbruse tato nejistota odpadla. Štěpné lupénky velikých zrn zhášely na ploše *P* 13⁰—17⁰, na ploše *M* 25⁰—29⁰, tak že by patřily bytownitu-anorthitu; vzhledem k ojedinělým úhlům zhášení až 33⁰ není sám anorthit vyloučen. Lupénky byly většinou jednoduché, široké srostlićné lamelly se nárazem oddělily.

V souhlase s tímto měřením je i měřený světelný lom, ač nelze popříti, že v různých vzorcích bylo pozorovati malé, ač zřetelné kolísání indexu lomu. Prášek ze zrn velkých ve skořicovém oleji shledán okolo $n = 1{\cdot}579$.

Lom v anilinovém oleji o $n = 1{\cdot}582$ byl většinou vyšší, méně rovný, ještě méně nižší. V badianovém oleji o $n = 1{\cdot}557$ málo zrn mělo slabší vyšší lom, ostatní značně vyšší. Tudíž labradorit není téměř přítomen, všechen živec patří bas. bytownitu a kysel. anorthitu. Možno, že jednotnost lomu alterovaly i odloupnuté kousky obrub poněkud kyselejších o nepatrném, ale zřejmém rozdílu.

Krystaly rozměrnější jsou jednoduché, typu skoro tlustých desek; úzce lamellovaných dle albitového zákona a perikl. je menšina a to menších rozměrů. Zonárnost na rozdíl od udání Katzerových nebyla tak výrazná, zajímavo bylo, že epidotové agregáty byly orámovány hmotou jedince živcového jsouce samy rámcem jádru nezměněného živce.

Ve výbruse určeny hodnoty úchylky zhášení odpovídající dříve uvedeným kategoriím živců. Úchylka na hranici albitických dvojčat 26⁰—29⁰ náleží bytownitu-anorthitu, úchylka rhomb. řezu 13⁰ ukazuje na basický bytownit, symetrické řezy s úchylkou od 29⁰ do 36⁰ svědčily by poměru $Ab_{25}\,An_{75}$. Dle těchto čísel by čistý anorthit nebyl tak hojný.

Drobná zrna živců vesměs allotriomorfní jsou spíše lištovitá, hojně lamellovaná. Obrysy sousedních individuí jsou nezřetelné, zhášení skoro undulosní. Úchylka zhášení od hranice albitového srůstu průměrně 22° prozrazuje ne tak basický bytownit. Zrna jsou nestejně čistá, rozhodně však mají méně uzavřenin než velká zrna. Slabě znatelný zonarní sloh o neurčitelných složkách je patrný až při větším zvětšení. Lom byl stanoven na odkrytém výbruse a to: v badianovém oleji ($n = 1·557$) měla všechna takováto zrna lom vyšší, v skořicovém ($n = 1·574$) vyšší i nižší a to: většina velkých zrn má lom vyšší, většina malých nižší lom, ale shledán také lom vyšší u drobných zrn jemně lamellovaných. Pro anilinový olej ($n = 1·582$) měla všechna drobná zrna lom nižší. U zonarních střed jest jen o málo méně lomný, obruba s větším rozdílem lomu.

Zastoupen tedy v porfyrických zrnech bytownit-anorthit s kyselejšími obrubami, v menších zrnech kyselý bytownit a basický labradorit. Obruby porfyrických zrn svědčí také těmto kategoriím (srov. živce v gabbrodioritu od Pecerad.[28])

I z partií povrchu blízkých jsou živce vzhledu úplně čerstvého, epidot druhotný jen výjimkou se vyskytne, jinak jen muskovit se objevuje na místech porušených trhlinou. Ve dvou zrnech kompaktního živce nalezeno po individuu živcovém malém, nerovnoběžně orientovaném, s obrysy zaoblenými a o lomu nižším.

Amfibol vystupuje v hrubozrnnější facii ve trojím typu, ač jeho charakter je vesměs týž. Tvoří předně porfyricky veliká zrna, idiomorfně omezená v pásmu vertikalním, nedokonale terminalně, pak v menších allotriomorfních zrnech blížících se celkem tvaru štíhlejších sloupců a konečně v individuích jehlicovitých.

Velká individua nejsou homogenní, při větším zvětšení mizí i zdánlivá jednotnost a sloupek se jeví jako svazek rovnoběžných sloupečků a jehlic. Na polech jehlice vybíhají až do mikrolitických rozměrů. Toto vše souhlasí s Katzerovým pozorováním, i to, že celé chumáče jehlic na polech znemožňují ostré terminalní ohraničení porfyr. zrn.

Někde orientace jehlic v zrnu se liší od zevnější formy, tvoří se oblasti ukazující původní srostlicovou formu. Barva velikých jedinců je různá v tonech zelených a světle žlutohnědých. Pleochroismus je dosti intensivní γ modrozelený, α žlutohnědý.[4]) Na jednom průřezu byl typický průřez pyroxenového krystalu změněného v hmotu uralitovou. Na něm byla zřetelna bývalá zonarnost dle partií pleochroičtějších seskupených v jádru. V jedné poloze pak je celý průřez skoro bezbarvý na důkaz rovnoběžné orientace drobných uralitových stébel. O partiích hnědě pleochroických níže. Hnědému amfibolu primarnímu patří vločkovité malé allotriomorfní tvary se slabým pleochroismem, někde laločnaté mezi individuy uralitu a v živcích.

Dle nejčetnějšího zhášení prům. $c : \gamma = 19^0$ je zastoupen zelený amfibol obecný (srv.[5]). Na velikém individuu amfib. modrozeleně pleochr. měřen index lomu $> 1·63$, $< 1·65$, tedy 1·64, týž index lomu poskytovali i vláknití jedinci uralitoví a zřejmé pseudomorfosy po pyroxenech. Tytéž

1

vlastnosti jsou konstatovány i na amfibolu ve štíhlejších allotriom. zrnech. Tu ale nutno poznamenati, že v nápadných agregátech jsou spolu s biotitem a rudami individua štíhlá skoro bezbarvá s pleochr. modrým. Interferenční barvy velmi jasné. Tyto agregáty v pseudomorfosách po pyroxenech nikdy nalezeny nebyly.

Jehlice amfibolu jsou průhledné se zřetelným pleochroismem do modra a zelena. Jsou ve vějířovitých agregátech, snůpky jehlic jsou zcuchány i jako proudovitě sčesány. Klesají na rozměry mikrolitů a pronikají všechny složky horniny, kolem některých zrn rudních činí obruby. Do nitra živců trčí ve vějířcích a jsou v nich i rozptýlena.

Drobná allotriomorfní zrna plní mezery mezi živci, jsou sevřena mezi oběma dvojčatnými jedinci ve srostlicích, nalezena byla v řadě mezi přírůstkovými vrstvami velikých jedinců, činí obruby kolem porfyrických zrn. Amfiboly jsou dle toho nejstarší složkou horniny, v obrubách živců činí dojem, jako by byly při růstu jedince živcového jím shrnuty stranou.

V živcích uzavřené amfiboly jsou drobounké zrnité, zejména po vnitřních částech; nebo činí větší okrouhlé partie paprsčitého složení. Nalezeny byly i agregáty zevně laločnatě omezené, nikterak však nějaké výplně mezer, nýbrž skutečné uzavřeniny. Konečně nepravidelná individua pilitická.

V amfibolech zjištěny jako uzavřeniny allotriomorfní rudy; jsouce i po živcích roztroušeny, zdají se býti primární. Rudy spolčené s titanitem jsou jím většinou uzavřeny. Jsou práškovité a působí kolem sebe intensivní pleochroické dvůrky do hněda. Pleochroické dvůrky mají značný rozsah a postihují někde drobnější individuum amfibolu celé.

Titanit vystupuje i bez rud samostatně, činí protažená zrna až stébélkovitá směrem vertikaly amfibolu a přetrhované řady směrem vláknitosti amfibolu. Konečně pozorovány byly kratší bezbarvé zaoblené sloupečky silně lomné, však neurčitelné pro drobnost a zelené zbarvení okolí.

Pyroxen byl zastižen pouze v jednom zrnu. V uralitisovaném jedinci bylo zachováno ještě čiré jádro bez vrostlic se silnými trhlinami štěpnými. V polaris. světle jeví se býti zdvojčatěno se vsunutou střední lamellou. Celé zháší jednotně. Poněvadž řez jím vedený je přibližně polohy 111, dává jen kusý obraz osní a nedovoluje určitě poznati štěpnost diallagu, ač některé trhliny by svědčily charakt. štěpnosti diallagové. Lom je vysoký, opt. charakter +. Kontura zevního omezení je udržena, uralit vniká v lalocích dovnitř a působí současně i jakési zonové olemování jádra.

Nalezeny byly také úplné pseudomorfosy po pyroxenu v řezech blízkých rovině kolmé k vertikale. Ovšem štěpnost zase nepozorována, jako byla konstatována na gabbru od M. Boru.[6]) Průřezy měly tvar zmačklých osmiúhelníků s převládajícími pinakoidy, nestejné zhášení srostlic poukazuje na pyroxeny jednoklonné. Podélné řezy nebyly pro jehličkovitost uralitu terminalně ukončeny. Celé zrno se však chová jednotně jako uralit. Má jednotný obraz osní o ramenech málo zahnutých, opt. ráz zjištěn ± shodně pro obecný amfibol. Lom rovný 1·64, lomu ostatního amfibolu.

Tyto velice ostré pseudomorfosy, bohužel nečetné, poskytly ještě jeden cenný doklad. Jsou totiž tvořeny výhradně uralitem bez stopy biotitu. Všechna individua uralitová jsou orientována rovnoběžně k sobě i býv. rozměrům pyroxenovým. Jsou zase modrozeleně pleochroická, nápadně rozdílná od individuí v pseudomorfosách s biotitem. Jaký byl původní pyroxen, nedalo se v preparátech zjistiti.

Biotit vyskytuje se v allotriomorfních vločcích, tvoří změť s uralitovými štíhlými sloupky, neb i v živcích vystupuje ve tvaru nepravidelných lupínků. Rozměry jejich jsou nepatrné, zvlášť posledních, tak že může býti snadno zaměněn za lupínek hnědě kalného amfibolu. Pleochroismus mezi světle hnědožlutou a červenožlutou barvou prostředně silný, jinde slabý, rozhodně však menší než u biotitu v blízké žule. V jejím vzorku shledán biotit zlatitě se lesknoucí do zelenavě žlutohněda a habitu naprosto jiného. Zřídka nalezeny zcela malé partie jeho v kratších a silnějších sloupcích amfibolu.

Biotit činí v hornině pseudomorfosy po nějakém mineralu (srv. 29) spolu s uralitem a rudou. V jedné jádro bylo úplně změněno v biotit s pyritem a titanitem, obal činil uralit bez ostrých hranic, vlákna jeho beze změny probíhají biotitem, který má hojnost pleochroických dvůrků s vrostlicemi. Na jiné nalezen pravý opak, jádro z uralitu čirého s pleochr. do modrozelena bylo uzavřeno v agregátu biotitu a rud.

Někde zdá se celkový obrys pseudomorfos odpovídati průřezu amfibolu, tak že by to mohla býti proměna po pyroxenu proměnivším původní amfibol za souč. vyloučení rud (srv. 7). Pseudomorfosy mají rud málo a rozměry příliš veliké, než aby se mohlo mysliti na vznik jich z olivinu 8) 9). Nedokonalost obrysů nedovolila souditi bezpečně na původní minerál, jak to mohl Becke 10) učiniti.

Titanit vyskytl se v četných 9) allotriomorfních zrnech dosti značné velikosti o vysokém reliefu a jen někde se slabým pleochroismem do růžova. Habitus jeho je dvojí. Jeden typ jsou zrna drobná, zarostlá mezi vlákna uralitu, buď spíše co primární součást nebo méně pravděpodobně jako současný produkt uralitisace pyroxenu.

Druhý typ jsou velká zrna hojně proniklá nitkami i většími agregáty uralitovými, nesporně tedy mladšího vzniku. Uložena jsou mezi ostatními součástmi, někde zřejmě allotriomorfně plní mezery mezi individuy amfibolovými. K nim lze přičísti druhotná zrna z rud vzniklá,6) dotvrzující tak charakter těchto rud jako titanových. Velmi podobné poměry popsala M. Slavíková.11) Zrna jsou agregáty drobných zrn titanitových uzavírajících rudy. Nápadno bylo někde nakupení epidotu k zrnu titanitovému.

Apatit nebyl nalezen.

Rutil nalezen byl jednou jako skupina idiomorfních jehlic uzavřena v živci, částečně i v amfibolu. Jehlice byly neprůhledné, však tvar a dém. lesk dovolovaly bezpečné jejich určení.

Epidotu musí býti věnována pozornost zvláštní. Činí totiž jako jinde partie většinou allotrimorfní, zejména ve větších porfyrických zrnech živcových. Jednotlivá individua jsou značně veliká, skupina celá je ostře ohraničena, uložení v přírůstkové vrstvě živcové, a co nejpřesvědčivěji mluví, v sousedství titanitu usazený idiomorfní tvar dokazuje primárnost epidotu.[12]) [27]) Byl asi převzat z původní horniny, nevznikl však z pyroxenu, jak míní Kretschmer.[9]) Epidot je charakteristický pro erupt. horniny ve vnějším pásmu kontaktním mladších hlubinných hornin. Uvolněný křemičitan vápenatý při uralitisaci dal s plagioklasem vznik epidotu.[13]) Jako sekundární součástka je epidot v živcích výjimkou ve velice drobných zrnitých agregátech.

Rudy jsou nepochybně několikeré, různého stáří a původu.

Pyrit vyskytl se v krystalové formě v živci, v deskovitých tvarech v amfibolu spolu s ostatními rudami, v skupení obstupuje větší zrno amfibolové. Rovněž nápadné je jeho sdružení s turmalinem. Lze těžko vymeziti jeho postavení ve stavbě horniny, nelze beze všeho připustiti, že by byl nejstarší součástí, máť v jednotném zrnu v sobě průhledné uzavřeniny, ale neurčitelné.

Ostatní rudy v souvislosti s titanitem jsou asi titanové, nemají však leukoxenových obrub, jsou allotriomorfní, někde skládají kostrovitou obrubu, snad pseudomorfosu, jejíž nitro je vyplněno vlákny uralitovými, zabíhajícími až do rudy.

O rudních zrníčkách v amfibolech byla učiněna zmínka již výše.

Kosočtverečný pyroxen, vápenec [18]) a chlorit zastiženy nebyly.

Konečně nejinteressantnější akces. součástí je *turmalin,* ač dle Katzera v apofysách od granititu je vyloučen.[25]) Zachovává idiomorfní vyvinutí pásma vertikalního, ale podléhá již změnám. Obrysy jeho jsou buď zaoblené neb laločnatě korrodované. Jeho pleochroismus je silný, ř. paprsek modrý do černomodra s absorpcí takřka úplnou, mimoř. načervenale šedý. Jehlice a stébla uralitu tvoří obrubu kolem turmalinu a je zřejmo, jak se turmalin při svém růstu vyhnul amfibolu a jak stébla uralitová jím pronikají. Pozorované bubliny pro drobnost nebyly určeny. Z jednoho sousedství se zrnem titanitovým bylo možno konstatovati, že turmalin je mladší. Rovněž velká zrna živcová jsou mladší. Sloupek turmalinu velmi korrodovaný a přetržený ve 2 oddělené díly je uložen v jednotném zrnu živcovém.

V drobnozrnné facii vých. od vesnice v lomu otevřené, beerbachitu podobné, shledán živec, uralit a křemen. Tohoto velmi málo, plní mezery mezi idiomorfními živci. Tyto zkoušeny byly na světelný lom, a shledán byl vyšší než 1·545, zhášení na P prům. kolem 15^0; patřily by živce tedy ještě k labradoru-bytownitu. Křemen měl poněkud vyšší lom, živec v sousedství křemene značně vyšší lom i ojediněle nižší. Snad patří zrna ta k andesinu i oligoklasu. Dle svého vývoje jsou to poslední vyloučené součásti. Jedná se tu patrně o pruh horniny poněkud kyselejší, což nepřekvapuje při známé lokální rozmanitosti odštěpenin basických.

Analysa vzorku průměrné horniny, zrna středního. I. analysa, II. přepočtení na 100% po odečtení H_2O a dalších, III. molek. kvocienty.

	I.	II.	III.
SiO_2	49·95	50·49	0·8415
TiO_2	1·40	0·42	0·01778
Al_2O_3	18·12	18·31	0·1792
Fe_2O_3	1·45	1·47	—
FeO	9·78	9·89	0·1561
MnO	0·15	0·15	0·0022
CaO	10·09	10·20	0·1819
BaO	0·03	0·03	0·0002
MgO	4·52	4·57	0·1133
K_2O	0·86	0·87	0·0092
Na_2O	2·57	2·60	0·0419
		100·—	1·5432
H_2O hygr.	0·14		
H_2O chem. v.	1·10		
P_2O_5	stopy		
S	0·11		
F	0·02*		
Cl	0·06		
B_2O_3	stopy		
	100·35%		

Přepočtení molek. kvoc. na 100·—

$SiO_2 + TiO_2$	55·68
Al_2O_3	11·61
FeO + MnO	10·25
CaO + BaO	11·80
MgO	7·34
K_2O	0·60
Na_2O	2·72
	100·—

Osannovy hodnoty jsou:

$s = 55·68$
$A = 3·32$
$C = 8·29$
$F = 21·10$

Projekční hodnoty:

$a = 2·03$
$c = 5·07$
$f = 12·90.$

Poměr SAlF = 17·30 : 3·61 : 9·09

AlCAlk = 13·03 : 13·25 : 3·72

NK = 4·5, MC = 0·6.

---

* Fluor stanoven metodou Steigerovou cit. Hillebrand, The analysis of silicate and carbonate rocks. 1919.

Projekční bod Osannův padá právě na rozhraní gabbra a dioritu, oprávněn jest tedy název horniny.

Hornina sama, jak z petrograf. popisu plyne, je proměněna účinkem mineralisatorů, které vysílal massiv žulový. Účinky tlakové pozorovány nebyly, jen ohnutí a zlomení silnějších tyčinek uralitových, a to mohlo býti způsobeno také intensivní krystalisací.

Jaká byla původní hornina? V geol. popise Katzerově uvádí se kontaktní účinek tohoto tělesa dioritového na sousední fyllity.[25]) Nutno však uvážiti, že první kontaktní snad změny byly porušeny metamorfosou způsobenou tělesem žulovým. Tato metamorfosa je intensivní, podlehly jí všechny horniny i slepence. Vliv basické horniny není při metamorfose tak dalekosáhlý, jak zde je možno pozorovati, těžko však říci, zda působení změn vychází od vzdálenější žuly, či snad se rozkládá pod sedimenty massiv žulový více na západ od zdánlivého okraje. Dle intensivnosti metamorfosy dala by se spíše přijmouti eventualita druhá (srv. lit.[30]). Světické slepence mají větší metamorfosu, ač jsou aspoň třikrát tak daleko od výchozí hranice než menčické.[3]) Z geologického vystupování není možno činiti závěr na původní charakter horniny. Diabas smíme snad vypustiti z úvahy vzhledem ke zvl. charakteru i nedostatku zbytků původní stavby, jež by jistě se zachovaly, rovněž diorit vzhledem k malému množství křemene vyloučeného. Jinou samostatnou horninou asi původní hornina nebyla, nýbrž asi basickou facií žulové massy, jak pojímá Barvíř i význam gabbra od Studeného.[5])

Srovnejme nyní analysy jiných hornin.

Dle projekčních hodnot blíží se naše hornina typu Sulitelma[14]) a bezoliv. gabbru s bronzitem z revíru Ransko[2]) č. 9. Toto má více Mg, patrně vlivem bronzitu.

Skoro úplně se shoduje s analysou č. 1125[15]) gabbrového porfyritu z Mt. Sneffels poměrem SAlF i AlCAlk, poměr MC naší horniny nikde nenalezen. Není takové důležitosti, ale jest přece jen směrodatný pro posouzení horniny naší.

Poměr NK souvisí s množstvím molekul albitových v anorthitu a z části s novotvořeným biotitem.

V trojci SAlF padne projekční bod do blízkosti podobné horniny (až na podíl SiO_2) pod různými jmény uváděné (gabbro, essexit, norit) z Nahantu, Essex Co. Poměr AlCAlk je shodný, rovná se také poměru témuž v amfib. gabbru z Crystal Falls.

U anorthitických hornin je poměr MC nízký, ale ty jeví již různé úchylky od složení naší horniny.

Když uvážíme nález mikroskopický, pak smíme kombinovati: uralit vznikl jednou z pyroxenu, diallagu, podruhé z neznámého minerálu s biotitem. Množství Mg svádí při nepoměru NC, že by to musil býti minerál s bohatým Mg, tedy olivin, který se zdá býti vyloučen, nebo kosočtv. pyroxen, který by spíše se mohl uplatniti, ač u něho nelze také hledati příčinu, že se obohatila kalciem zbývající plastická hmota magmatu (srv. [16]). Ještě pak zbývá amfibol pro úvahu. O něm později. Titanity ukazují na hojnost Ti v rudách. Epidot je převzat až na výjimky z původní horniny; pak tedy pyroxen musil býti hlavní součástí horniny. Můžeme předpokládati bezoliv. gabbro s amfibolem jako původní horninu.

Nemusí nás zarážet množství anorthitu, neboť je Goldschmidtem [13]) uváděno, že Al_2O_3 spojí se s Ca na anorthit, když je nad alkaliemi v přebytku, což je pro naši horninu případné.

Na obtíže kalkulace pro sloučeniny Mg a Ca upozornil Goldschmidt lit. c., zejména když i affinita SiO_2 slučovací průběh komplikuje.[16])

Uralitisace nás také poučuje o genesi horniny. Podmínky uralitisace byly různě vykládány. Vývody Beckeho [18]) s jistou korrekcí přijímá Duparc.[19]) Nepokládá za možnou prostou paramorfosu pyroxenu v amfibol, dokládá to analysami. Dle Duparca tvoří se uralit při nenáhlém ochlazení za přítomnosti kyselin a magmatu bohatého živcem. Zdá se však, že jest od něho málo hodnocen vznik titanitu a přítomnost epidotu. Rosický [24]) rovněž zamítá pro syenit táborský hypothesu, že by tlakem byla působena proměna pyroxenu, a přičítá ji agenciím postvulkanickým. Tyto okolnosti u horniny Klokočenské potvrzené poskytují možnost výkladu o proměně horniny. Bylo by možno ještě dodati, že snad nemůže se zhola zamítati vliv změny tlaku,[21]) jež nastala po likvidaci změn tektonických a měla vliv na udržení plasticity hmoty i pod bodem tání jejích složek.

Uralitovaná zrna pyroxenová i domnělé pseudomorfosy po amfibolu jsou značné velikosti. Hornina asi tuhla jako hlubinná porfyricky. Při erupci vytvořil se z amfibolu pyroxen, a když po skončení erupce a tektonických processů tlak ustal a hornina byla znovu prosycena mineralisatory současně s celým okolím, dány byly podmínky pro pomalé chladnutí její a pro proměnu pyroxenu v amfibol. Soudržnost pseudomorfovaných zrn stojí tu v protivě k rozptýlení uralitových vláken v celé hornině, že nelze zde mluviti o klidném průběhu tuhnutí. Na vločcích rozptýleného amfibolu hnědého a jeho korrodovaných okrajích je patrný vliv magmatu při první proměně. Pyroxen se měnil v uralit při prolnutí horniny mineralisatory. Původní živce basické přešly do stavu plasticity. (Srv. lit. [24]) str. 15). Jinak bychom si nemohli vysvětliti nález drobounkých zrnek amfibolových v živcích; mohla zajisté vzniknouti agregováním bývalých mikrolitů pyroxenových tak hojných v živci gabbrovém. Při uralitisaci se uvolňuje Ca i SiO_2. Reagují na sebe již pod bodem tání při 800°.[13]) Po vápenci není opravdu stopy, titanitu je ovšem dosti i primárního, ale živce ukazují na nepříliš veliké snížení basicity poslední plastické hmoty. Zrna jejich mohla volně se tvořiti ještě ve velkých rozměrech a idiom. tvaru jako poslední část genetického pochodu, nemají obrubu o mnoho kyselejší než jádro, malá individua allotriomorfní jistě poslední jsou stejného typu s obrubou porfyrických zrn (srv.[23]) a lze-li individuum živcové uzavřené v kompaktním zrnu porfyrickém přijmouti jako relikt z dřívějška, pak musíme dojíti k závěru, že zde basicity neubývalo, a dopravovaný sem SiO_2 zpotřeboval se na epidot, turmalin, vázán na množství Ca z pyroxenové proměny a upotřeben na stavbu živců. Křemen volný nalezen nebyl, jen v jemnozrnné facii z lomu na východ od vsi, ale ve společnosti živců rovněž dosti basických. Nutno předpokládati značnou plasticitu, abychom mohli si vysvětliti promíšení horniny uralitem a vyložiti si krystalisaci turmalinu v živcích po uralitisaci. Roztržený a korrodovaný sloupek turmalinu rozhodně musí nasvědčovati značné pohyblivosti media, jež byla způsobena přílivem plynů [20]) a umožnila tvoření zrna tak hrubého v posledním ještě skoro stadiu. Těžko zde sledovati za nepříznivých podmínek, zda akce hydroboritanů jest omezena jen na okraje.[20]) Že porfyričnost t. j. v naší hornině idiomorfnost a značná velikost jedinců živcových nemá zde souvislosti s nějakou okrajovou polohou neb s hlubinným tuhnutím, svědčí tak velmi různá velikost idiomorfních zrn živcových.

Omezíme-li se na zjevy konstatované na okraji žuly středočeské. pokud se týkají uralitisace, pak nejpodobnější jest naší hornině až na turmalin gabbrodiorit od H. Břežan [11]): jakost amfibolů, hnědost jich kolem rud, příslušnost plagioklasů k bytownitu, jehlicovitý uralit v živci.

Rudy u naší horniny při metamorfose se rozptýlily. Aspoň přijatelno jest pro líčené poměry tvrzení Goldschmidtovo,[13]) že magnetit se vyloučí při rychlém ochlazení, za pomalého přechází do augitu. Agregáty amfibolu až čirého jsou vykládány od něho jako pseudomorfosy po olivinu. Výklad pro náš případ byl výše podán.

V dioritové facii Knínské žuly [1]) je patrna přítomnost basičtějších živců.[22]) Vlákna uralitová jsou omezena jen na kontury bývalého pyroxenu, do živců nezasahují, tu je tedy zřejmě změna již posteruptivní.

Jinak je velmi podobno gabbro uralitisované od *Vinařic*. Uralit vniká i do živců, ale stavba gabbrovitá není nijak dotčena a živce také zůstávají čerstvé a skoro se nemění.

Výsledek práce jest:

1. hornina od Klokočné jest gabbrodiorit;

2. vznikla proměnou původní starší gabbrové odštěpeniny žulové od mineralisatorů ze žuly vycházejících;

3. popsán výskyt turmalinu;

4. význam uralitisace pro genesi gabbrodioritu.

Jest milou povinností vzdáti dík p. dru Vojt. Rosickému, prof. Masarykovy university, za upozornění na tuto horninu a četné rady při práci, rovněž p. dru Fr. Slavíkovi, prof. Karlovy univ., za interes a pomoc při práci věnované.

Min. petrogr. ústav čes. university.

Literatura použitá.

(1) J. Kratochvíl, O někt. horninách massivních z okolí Nového Knína a části rulovitých hornin od Žlebů. Věst. král. čes. spol. nauk. 1900.

(2) K. Hinterlechner, Über Eruptivgesteine aus dem Eisengebirge in Böhmen. Jahrb. der k. k. geol. Reichsanstalt. 1909, Bd. 59, 1. Heft.

(3) Fr. Katzer, Geol. Beschreibung der Umgebung von Říčan. Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanstalt. 1888, 38. Bd., 3. Heft.

(4) Hofmann-Slavík, Zlatonosný obvod kasejovický.

(5) Barvíř, O původu zlata u Jílového. Archiv pro přírod. prozk. Čech. XII, čís. 1.

(6) Barvíř, Gabbro od Malého Boru. Věst. král. čes. spol. nauk. 1896.

(7) J. Krejčí a R. Helmhacker, Erläuterungen zur geol. Karte des Eisengebirges. Archiv pro přír. prozk. Čech. V, č. 1.

(8) Rosenbusch-Wülfing, Mikroskopische Physiographie der petrogr. wichtigen Mineralien. 1904.

(9) Kretschmer, Der metam. Dioritgabbrogang im Spieglitzer Schnee- u. Birkengebirge. Jahrb. der k. k. geol. Reichsanstalt. 1917, LXVII, 1. Heft.

(10) Becke, Die Gneisformation des niederöster. Waldviertels. Min. u. petr. Mitth. IV, 1881.

(11) Slavíková, Gabbrodiorit od Hor. Břežan. Věst. spol. nauk. 1904.

(12) Fišer, Kraj žuly a povaha sousedních hornin u Vltavy nad sv. Janskými proudy. Věst. král. čes. spol. nauk. 1900.

(13) Goldschmidt, Die Kontaktmetamorphose im Kristianiagebiet. 1911.

(14) Osann, Beiträge zur chem. Petrographie. Stuttgart, I.—III.

(15) Osann, Petrochemische Untersuchungen, Heidelberg, 1913.

(16) Doelter, Phys. chem. Mineralogie.

(17) Doelter, Petrogenesis, 1906.

(18) Becke, Gesteine der Columbretes. Tsch. Min. u. petr. Mitth. XVI, 1897.

(19) Duparc, hlavně Sur la transformation du pyroxène en amphibole. Bull. soc. fr. de min., 1908.

(20) Lapparent, Les gabbros et diorites de Saint-Quay-Portrieux etc. Bulletin soc. fr. de min. 33, 1910.

(21) Ondřej, Stříbrná Skalice. Čas. musea král. čes. 1920.

(22) Stočes, Problémy středoč. mass. žulového. Sborník Čes. spol. zem. XXIV, 1918.

(23) Rosický-Šplíchal, Smíšená žíla od Třemlata u Mnichovic. Sborník stát. geol. ústavu českosl. rep. 1921.

[24] Rosický, Zprávy ze středočes. massivu žulového. I. Rozpr. Čes. Akad., roč XXIV.

[25] Katzer, Notizen zur Geol. von Böhmen. V. Verhandl. der k. k. geol. Reichsanst. 1904. No 10 und 11.

[26] Katzer, Geologie von Böhmen.

[27] Rosický, O dvou minetách a žule z okolí Jílového. Věst. král. čes. spol. nauk, 1901.

[28] Kratochvíl, Petrogr. zprávy ze středočes. massivu žulového. II. Rozpravy Čes. Ak., roč. XXVI.

[29] Rosický-Veselý, Biotitický a amfib. norit od Hoštic. Spisy vyd. přír. fak. Masar. univ. 1922, č. 10.

[30] Slavík, Vulkanismus v Barrandienu. Čas. musea král. čes. 1918.

Vysoká v Malých Karpatech.

Studie rostlinogeografická.

Napsal

Frant. A. Novák.

(Předloženo dne 26. května 1922.)

Mohutné horstvo karpatské, oddělující s hlediska epiontologického u prvku pontického větev sarmatskou od větve pannonské, počíná na levém břehu Litavy, u Bratislavy přerušeno jest tokem Dunaje, pokračuje pak dále známým obloukem až ku Železným Vratům, kdež připíná se ku Golubinskému pohoří na pravém břehu Dunaje v Srbsku. Poslední výběžky massivu karpatského na západě tvoří Malé Karpaty, pohoří morfologicky dokonale, geologicky a fytogeograficky jen zdánlivě individualisované. Rozvrásněný hřeben Malých Karpat směřuje v celku od Spitzerbergu a Steinbergu (posledních jihozápadních výběžků Hainburgských kopců) směrem severovýchodním až k údolí Myjavy a k Novému Městu nad Váhem. Malé Karpaty (nehledě k vápencům v průlomu Dunajském) jsou tvořeny v hlavních hřebenech žulou, na svazích severozápadních azoickými břidlicemi, k nimž přikládají se v obvodu mezi údolím Stupavského potoka a vrcholem Rachsturnu permské pískovce, jež v severní části Malých Karpat zastoupeny jsou útvarem jurským, triasovým a konečně i křídovým. Území útvaru jurského, triasového a křídového náleží v Malých Karpatech ku nejzajímavějším místům s hlediska botanického, nehledíme-li k útvarům na devonských vápencích Hainburgských a Děvínských.

Severně od Pezinku a severovýchodně od Modré na nejvyšším vrcholu Malých Karpat, na Vysoké setkáváme se poprvé (postupujeme-li pásmem Malých Karpat od Bratislavy k severovýchodu) s triasovými vápenci, které hostí květenu zcela odchylného rázu, nežli jakou nalézáme na vrcholcích jižněji se nacházejících kopců a hřebenů. — Před dvěma lety měl jsem příležitost navštíviti Vysokou a sledovati floristické i rostlinogeografické poměry její i jejího okolí a zde uvádím jako malý příspěvek ku podrobnému fytogeografickému výzkumu Malých Karpat výsledek svého pozorování. —

Při výstupu na Vysokou z Pezinku přes Cajlu, Kamenná Vrata a Babu (639 *m*) možno velmi přesně sledovati jednotlivá pásma rostlinných formací od nížiny až k vrcholkům Malých Karpat. V rovině nachází se kulturní pásmo polí, luk, pastvin, zřídka též vinic. S ním sousedí na úpatí svahů pásmo vinic, jež sahá nejčastěji jen do výšky 250 *m* n. m. Nad tímto pásmem setkáváme se s útvarem xerofilních křovin, které výše přechází v suchý vysokokmenný háj. Ve výši průměrně 450 *m* n. m. vystřídávají útvar vysokokmenného háje bučiny. Zmíněné pásmové střídání se útvarů možno sledovati po celých Malých Karpatech, místy zřetelněji, místy teprve po uvážení vlivu morfologického utváření terrainu. Jest přirozeno, že na svazích exponovaných k jihu bude nejnižší hranice bukových porostů posunuta značně výše, ba mnohdy vůbec bučiny na jižních svazích chybějí, kdežto na úklonech k severu bývá bučina daleko více rozšířena na úkor útvarů pásem ostatních. Jest přirozeno, že jednotlivé útvary jsou spojeny navzájem přechody, mnohdy velmi nenáhlými, a že v jednotlivých útvarech často také činnost člověka a zvířat se uplatnila při změně celkového rázu formace. Ale abstrahujeme-li tyto extrémní případy, můžeme v celých Malých Karpatech sledovati střídání se zmíněných pěti pásem.

Projdeme-li pásmem kultur a vinic, dále pak pásmem xerofilních křovin a vysokokmenných hájů, vstoupíme ve výši asi 400 *m* n. m. na Barvínku při výstupu na Vysokou od Cajly do pásma bučin. V těchto místech jsou bukové lesy velmi huste, takže postrádají téměř bylinného podrostu. Pouze na okrajích vyskytují se druhy, poukazující na bučinu, a tam, kde stromy rostou poněkud volněji, nalezneme malé ostrůvky neuzavřeného podrostu bučinného. Husté neprosekávané bučiny rozkládají se na Barvínku (436 *m*) a na svazích a hřebenech odtud až ku Kamenným Vratům, kteráž tvořena jsou skalnatými útesy Tří Jezdců (624 *m*) a Velkého Modřence (708 *m*) — Na úpatí strmých skalnatých útesů rulových tvoří *Melica uniflora* ve volné bučině husté formace, v nichž podružně vystupují typy bukové a ojediněle též druhy hájové, jak zastihli jsme je na světlinách hustých bučin na Barvínku (na př. *Elymus europaeus, Milium effusum, Carex silvatica, Paris quadrifolia, Polygonatum multiflorum, Maianthemum bifolium, Asarum europaeum, Daphne mezereum, Mercurialis perennis, Dentaria bulbifera, Rubus idaeus, Sanicula europaea, Salvia glutinosa, Campanula trachelium, Senecio Fuchsii, Prenanthes purpurea* etc.; ojediněle též *Carex muricata, Viola silvestris, Geranium Robertianum, Oxalis acetosella, Pulmonaria officinalis* var. *maculata, Galeobdolon luteum, Asperula odorata, Lactuca muralis* etc.); k těmto rostlinám druží se některé typy pasekové.

Na skalách nenalezneme žádných vlastních lithofytů. Ve štěrbinách skalních tvoří husté trsy *Deschampsia flexuosa* a *Polypodium vulgare,* dále ojediněle vyskytá se *Sedum maximum, Impatiens noli tangere, Chelidonium,* křovitý jeřáb, dále *Acer pseudoplatanus, Sambucus nigra,* dále různé druhy rodu *Rubus,* a na jediném místě na severní stěně ve stinné štěrbině též *Nephrodium spinulosum.* — Ještě chudší jsou nízké skalky směrem k Velkému Modřenci ukryte v lese. Jejich isolovanost a nevýživná disgeogenní hornina jsou nepopíratelně příčinou chudé vegetace jejich.

Tři Kopce (660 *m*) i Baba (639 *m*) mají své vrcholy porostlé bučinami, převážnou většinou velmi chudými na podrost. Tu a tam setkáváme se s vlhčími místy, s malými mokřinami s větší insolací, kde roste hojně *Juncus effusus, Scirpus silvaticus, Deschampsia caespitosa, Hypericum acutum, Potentilla tormentilla, Impatiens noli tangere, Chrysosplenium alternifolium, Galium uliginosum, Cirsium palustre* etc., jinde (mezi ⌖ 660 a ⌖ 581 směrem od Kamenných Vrat ku Babě) kromě uvedených též *Carex maxima, C. remota, C. silvatica, C. muricata, Hypericum maculatum, Epilobium obscurum, Primula elatior, Glechoma hederacea, Myosotis palustris, Symphytum officinale, Stachys silvatica, Gnaphalium silvaticum* etc. — Na světlinách sdružují se typy bučinné, které v těchto místech bohatě kvetou, kdežto v hustých bučinách tytéž druhy netvoří nikdy květů (na př. *Prenanthes purpurea, Senecio Fuchsii* etc.).

Místy mezi bučinami vyskytují se malé poloxerofilní loučky, původní, s četnými travinami (*Cynosurus cristatus, Festuca rubra, F. ovina, Briza media, Dactylis glomerata, Poa trivialis, P. pratensis,* místy též *Nardus stricta*), jejichž zeleň zdobena jest květy mnohých bylin (na př. *Dianthus deltoides, D. Armeria,* v jediném exempláři též *D. Hellwigii, Stellaria graminea, Ranunculus acer, Viola canina, Lotus corniculatus, Agrimonia eupatoria, Pimpinella saxifraga, Linaria vulgaris, Gentiana cruciata, Galium cruciata, Campanula patula, Centaurea jacea, Leontodon hispidus, Chrysanthemum leucanthemum,* etc.).

Zcela jiného rázu jsou paseky, které míjíme při výstupu na „Babu,“ jež zde ve výši 600 *m* n. m. se do značné míry odchylují od pasek v pásmu vysokokmenných hájů. Ku druhům oběma typům pasek společným, jednak význačně pasekovým (na př. *Calamagrostis epigeios, Veronica officinalis, Sonchus laevis, Gnaphalium silvaticum, Senecio silvaticus, S. viscosus, Cirsium arvense, C. lanceolatum* etc.), jednak stráňovým a lučním (na př. *Poa trivialis, Dactylis glomerata, Agrostis alba, A. vulgaris, Deschampsia caespitosa, Phleum pratense, Agropyrum repens var. glaucum, Lathyrus pratensis, Dianthus Armeria, Armeria vulgaris* etc.) přistupují zde ještě prvky více méně bučinné, vyskytující se na pasekách bukových lesů převážnou většinou jen v pásmu bukovém (na př. *Festuca gigantea, Bromus asper, Brachypodium silvaticum, Molinia altissima, Carex pilosa, C. muricata, Rubus idaeus, Hypericum montanum, Galium cruciata, Asperula odorata, Stachys alpina* etc.). — Na starších pasekách tvoří mladé buky místy velmi husté křoviny, na jejichž okraji nalezneme četné kapradiny (*Nephrodium filix mas, Athyrium filix femina, Dryopteris phegopteris, D. Linnéana*), dále mnohé houštinné a křovištní typy, četné druhy travnatých strání, jež zejména na volných místech mezi keři se usadily (na př. *Selinum carvifolia, Silaus pratensis, Gentiana cruciata, Galium boreale, Senecio barbareaefolius* etc., vzácně též *Trifolium rubens*, jehož výskyt v tomto místě jest jistě zajímavý) a některé typy bučinné.

Na vrcholu hory Baba (639 *m*), dále na hřebenech směrem k Starému Kopci (515 *m*) a Čertovu Kopci (747 *m*) a na hřebenech až na Vysokou rozkládají se nádherné bučiny, v nichž mohutné staré buky dosahují nezřídka neobvyklé výšky. Na mnoha místech jsou velmi husté, takže vůbec postrádají podrostu; leč jakmile husté koruny buků propustí jen trochu více paprsků slunečních, ihned objeví se bohatá formace bukových typů, které jinak jsou roztroušené po celém lese bukovém. Jest velmi zajímavo sledovati prvky podrostu těchto nádherných bučin. *)

V podrostu převládají prvky typicky bučinné, k nimž přistupují druhy celkem v lesích rozšířené, svojí hojností však pro bučiny význačné, dále některé plevele, které zpravidla každou bučinu provázejí, a konečně druhy lesní a hájové, které nejsou pro bukové porosty význačny, ale v bučinách na uvedeném prostoru alespoň ojediněle vystupují. Ve všech čtyřech těchto kategoriích prvků nejhojněji jsou zastoupeny evropské mezothermofyty, k nimž náleží také buk, v poněkud menším množství vystupuje element cirkumpolární, stejně jako eurasijské mezothermofyty, ještě menším procentem zastoupen jest prvek evropsko-sibiřských mezothermofytů; zcela podružně vystupují druhy orientální, meridionální a evropsko-alpinské.

Z druhů typicky bučinných k evropským mezothermofytům náleží následující: *Fagus silvatica, Melica uniflora cop.*^{3}, *Elymus europaeus cop.*^{3}, *Cephalanthera alba cop.*^{2}, *C. ensifolia* sp., *C. rubra* sol., *Dentaria bulbifera* cop.^{2}, *Veronica montana* cop.^{2}, *Atropa belladonna* cop.^{1}, *Hieracium barbatum cop.*^{3}, *Prenanthes purpurea* cop.^{3}. Cirkumpolární prvky lesní jsou v této kategorii podrostu zastoupeny druhy: *Dryopteris phegopteris* cop.^{3}, *Milium effusum* cop.^{3}, *Rubus idaeus* cop.^{3}, *Circaea lutetiana* cop.^{1}, *Monotropa hypopitys var. glabra* sp. Mezi eurasijské mezothermofyty z typicky bučinných druhů zde se vyskytujících můžeme zařaditi: *Bromus asper* cop.^{2}, *Actaea spicata* sp., *Impatiens noli tangere* sp.-cop.^{1}, *Sanicula europaea* cop.^{2}, *Salvia glutinosa* cop.^{3}. Evropsko-sibiřským mezothermofytům náleží: *Asperula odorata* cop.^{3}-greg., *Daphne mezereum* cop.^{2}, *Asarum europaeum* cop.^{2}, *Cardamine impatiens* sp. Orientální element jest mezi typickými druhy bukovými zde zastoupen pouze jediným druhem: *Carex pilosa* cop.^{3}; prvek meridionální toliko dvěma, zde podružně vystupujícími druhy: *Arum maculatum* cop.[1] a *Euphorbia amygdaloides* cop.[1].

Z druhů celkem rozšířených v lesích, svojí frekvencí však pro bučiny význačných, náleží do skupiny evropských mezothermofytů: *Mercurialis perennis* cop.[2], *Galeobdolon luteum* cop.[2], *Pulmonaria officinalis* var. *maculata* cop.[2] a *Galium Schultesii* cop.[2]. Do skupiny cirkumpolárních prvků lesních: *Nephrodium filix mas* sp., *Athyrium filix femina* cop.[1], *Dryopteris Linnéana* cop.[1], *Carex silvatica* cop.[1], *Oxalis acetosella* cop.[1]. Mezi eurasijské mezothermofyty z této kategorie podrostu náleží toliko *Viola silvestris* sp.; mezi evropsko-sibiřské mezothermofyty náleží: *Ranunculus lanuginosus* cop.[1], *Lamium maculatum* sp. a *Senecio Fuchsii* cop.[3]. Evropsko-alpinské prvky jsou zastoupeny zde toliko dvěma druhy: *Carex maxima* sol. a *Stachys alpina* cop.[1]. Prvky meridionální, orientální a pannonské v této kategorii podrostu chybějí.

Z plevelů pro bučiny význačných, které ve zmíněných bukových lesích nalezneme, náleží evropským mezothermofytům *Lactuca muralis* cop.[2], eurasijským mezothermofytům *Geranium Robertianum* cop.[2], a kosmopolitům *Urtica dioica* cop.[2].

Z druhů, které jen podružně v uvedených bučinách vystupují, pro bukové lesy význačné nejsou, náleží evropským mezothermofytům: *Rubus hirtus* sp., *Campanula trachelium* sp., *Phyteuma spicatum* sp.; cirkumpolární prvky lesní jsou zastoupeny v teto kategorii podrostu druhy: *Carex muricata* sp., *Polygonatum multiflorum* sp., *Maianthemum bifolium* sp., *Adoxa moschatellina* sol., *Circaea alpina* sol. Mezi eurasijské mezothermofyty náleží z této kategorie podrostu: *Brachypodium silvaticum* sp., *Epipactis latifolia* sp., *Stachys silvatica* sp.; mezi evropsko-sibiřské mezothermofyty náleží: *Carex digitata* sol., *Paris quadrifolia* sp. a *Epilobium montanum* sp. Meridionální prvek zastoupen jest v této kategorii podrostu toliko jediným druhem: *Parietaria officinalis* sp. (místy cop.[3]-greg.). — *Sisymbrium strictissimum*, které místy se také v bučinách vyskýtá, do útvaru bučin nenáleží.

Srovnáme-li nyní všechny prvky podrostu bučin z uvedeného území, vynikne nám veliký rozdíl útvaru bučin a útvaru hájů a travnatých strání. Kdežto v hájích na stráních převládají v území M. Karpat prvky pannonské, orientální, meridionální atd., jsou v útvaru bučin dominující prvky evropské, cirkumpolární, eurasijské a evropsko-sibiřské, vesměs v druzích mezothermofilních.

Nejzajímavější lokalitou celého hřebenu Vysoké jsou vrcholové skalky vápencové, které od nejvyššího místa hory obloukem provázejí hřeben, jednak směrem severovýchodním, jednak západním ku loveckému zámku „Vývratu.“ Jejich květena jest naprosto odchylná od veškeré vegetace, kterou nalézáme na vrcholech i na skalách jižně a jihozápadně od Vysoké. Skalky tvořeny jsou triasovým vápencem a jsou v severovýchodní části obráceny jednak k severozápadu, jednak k jihovýchodu: na západní části spadají pak příkře na sever a jih, což nápadně pozorujeme na jejich vegetaci.

Na jižním a jihovýchodním svahu nalezneme nejen skalní a drolinné druhy (*Melica transsilvanica, Sedum maximum, S. album, Vincetoxicum officinale,* řidčeji *Asplenium ruta muraria, A. trichomanes* etc.), ale kromě četných rostlin pasekových, jejichž semena byla větrem zanesena do těchto míst, zde vyklíčila a nadále se zde udržela, též některé druhy bučinné (*Parietaria officinalis, Glechoma hirsuta* atd.), které z okolních bučin zaběhly též na vápencové skalky. Příkré svahy a stěny k jihu a jihovýchodu obrácené jsou celkem jevnosnubnou vegetací svojí velmi chudé, za to však bohaté na lišejníky.

Mnohem pestřejší květenu chovají srázy a štěrbiny k severu a severozápadu obrácené. I zde usadily se četné druhy pasekové, ač v míře daleko menší, i sem zaběhly mnohé druhy z bučiny. Druhy skalní a drolinné z jižní strany opakují se i zde. Přistupuje však *Cystopteris fragilis, Poa badensis, Moehringia muscosa, Viola saxatilis, V. arvensis β hirsutior* STEV. (kterou BOLLA (Verh. d. Vereins f. Naturkunde zu Pressburg I., 1856, p. 13.) určil jako *V. gracilis* BIV., a kterou mnozí maďarští botanikové označují jako *V. macedonica*), dále vzácné *Geranium lucidum,* ojediněle též *Draba aizoides* a *Dianthus Lumnitzeri* v zajímavých tvarech přechodných k *D. praecox,* a dále *Arabis petraea, A. arenosa* a *Arabis alpina,* jenž jakožto prvek arkticko-alpinský jest nejzajímavějším druhem tohoto území.

PAX (Grundzüge d. Pflanzenverbreitung in den Karpathen I. 1898 II. 1908, p. 171—174) ani HAYEK (Pflanzendecke Österreichs-Ungarns I. 1916), kteří vůbec neměli správnou představu o Malých Karpatech, se o *Arabis alpina* z Malých Karpat vůbec nezmiňují, ačkoliv již r. 1856 ji BOLLA (l. c. p. 13) uvádí z Vysoké, a ač HOLUBYMU, od něhož obdržel PAX pro svoje dílo mnoho cenných příspěvků, byla lokalita druhu *Arabis alpina* na Vysoké již před lety známa.

Arabis alpina L. na Vysoké jest velice zajímavá svým původním, neobyčejně nízkým výskytem. Od nejvyššího vrcholu (759 *m*) můžeme sledovati výskyt její směrem severovýchodním až ku 580 *m* n. m., směrem jihozápadním (na severních svazích) až ku 500 *m* n. m. — HEGI (Ill. Flora von Mittel-Europa IV., p. 416) zmiňuje se sice, že *Arabis alpina* u Feldkirchu ve Vorarlberku roste též ve výši 460 *m* n. m., u Dornbirnu při 420 *m* n. m., u Landhutu nad Isarem při 400 *m* n. m., v poříčí Soči dokonce několik *km* od ústí jejího do moře. Ale tyto lokality jsou zcela jiného rázu nežli stanoviště na Vysoké; jsou to skaliny neb štěrkoviska v údolí řek v přímém spojení s vyšším pohořím, takže na těchto nízkých lokalitách nemůžeme pokládati *Arabis alpina* za původní. — Naproti tomu však stanoviště druhu *Arabis alpina* na Vysoké nachází se na nejvyšším vrcholu Malých Karpat, jest zcela určitě původní v přímém vztahu s lokalitami na Žihlavníku u Trenčanských Teplic a s lokalitami alpskými, ač od prvé lokality (přes 100 *km* vzdálené) jest odděleno naše stanoviště širokým údolím Váhu a Myjavy, a od alpských lokalit (Anninger, přes 90 *km* vzdálených) širokým údolím dunajským a úvaly řek Litavy a Moravy.

Z celkového rozšíření druhu *Arabis alpina* a z rázu jeho lokality nutno předpokládati, že jde o velice zajímavý glacialní relikt, který za doby ledové osadil skály na Vysoké, a od té doby se na nich udržel. Představuje nám v květeně Vysoké prvek dealpinský.

Na vrcholu Vysoké a pak dále k západu nalezneme na skalách z nejmenovaných druhů ještě *Verbascum lychnitis, Carduus nutans, Cynoglossum officinale* a *Artemisia absinthium,* z nichž zvláště poslední dva druhy nenáleží původní vegetaci skalní. Pod skalkami setkáváme se s hustým porostem druhu *Parietaria officinalis,* mezi níž vyskýtají se *Brachypodium silvaticum, Arum maculatum, Impatiens noli tangere, Sisymbrium strictissimum,* které též na skalách není žádnou vzácností, dále *Hesperis matronalis, Cynoglossum officinale, Lithospermum officinale, Physalis Alkekengi, Campanula trachelium* a se skal seběhlé *Vincetoxicum.*

Od skalek jak na sever, tak také k jihu rozkládají se nádherné bučiny, místy s bohatým podrostem, celkem však s podrostem velmi řídkým, který však chová řadu velmi zajímavých druhů, z nichž jako příklad uvedu pouze rostliny, sbírané v bučinách na jižních svazích Pristodolku (585 *m*); jejich výčet znázorňuje také přibližně výškové nároky jednotlivých druhů. Do 500 *m* n. m. vyskytají se na vlhčích místech *Polystichum aculeatum* a *Circaea alpina,* na sušších pak místech *Actaea spicata* a *Veronica montana* a četné jiné, již dříve jmenované bučinné typy; ve výšce od 500 *m* do 400 *m* n. m. sledujeme tyto druhy: *Carex remota, Melica nutans, Lilium martagon, Cephalanthera rubra, Aquilegia vulgaris, Hesperis matronalis, Lunaria rediviva, Digitalis ambigua* atd. Ještě níže pak nalezneme na vlhkých místech v křovinách a na kamenitých vlhkých stráních *Oryzopsis virescens, Arabis turrita, Geranium phaeum, Aconitum vulparia* (*A. septentrionale* KOEL. jsem sám nesbíral, ale uvádí se z těchto míst), *Astrantia major, Scrophularia vernalis, Atropa belladonna* etc.; na sušších místech *Cephalanthera alba, Epipactis microphylla, Cynoglossum germanicum, Pulmonaria mollissima* etc. Uváděné *Siler trilobum* jsem nenalezl. — Přirozeně není dobře možno přesně vyměřiti hranice výškového výskytu jednotlivých druhů v podrostu. — Kromě zde uvedených rostlin vyskytají se v bučinách od vrcholu Vysoké až ku dolení hranici jejich (ca 320 *m* n. m.), téměř všechny uvedené typy bučinné.

V nejnižším pásmu přecházejí bukové lesy v nízké křoviny, střídající se s útvarem travnatých strání. V rovině u Kuchyně (Konyhy) původních útvarů téměř nenalezneme. Většina půdy jest osazena kulturami.

Vliv desensibilatoru na gradaci a hustotu fotografické desky.

Napsal

V. Vojtěch.

(Předloženo dne 26. května 1922.)

Prvé desky fotografické byly poměrně málo citlivy, a proto bylo snahou fotochemiků najíti látky t. zv. sensibilatory, které by je učinily citlivějšími. Postupem času podařilo se najíti takové látky a dnes jsou desky neobyčejně citlivé, a to nejen pro onu část spektra, pro kterou je citlivý bromid resp. chlorid stříbrný, nýbrž pro celé spektrum Tím ovšem ztěžuje se na druhé straně vyvolávání, které se musí díti při velmi slabém světle, což je nevýhodno jednak se stránky kontrolní, jednak zdravotní. Proto jeví se snaha najíti látky t. zv. desensibilatory, které stlačují citlivost desek před vyvoláváním, aby je bylo možno zpracovati při jasném světle. Podmínkou je však, aby latentní obraz nebyl seslaben.

R. 1903 a 1904 zavádí se do obchodu se strany německé (Ludwig) a francouzské (Lumière a Seyewetz) barvivo, které přidáno ku vývojce, umožňuje vyvolávati desku při bílém světle. Ochrana je zde ovšem čistě optická, barvivo působí jako filtr a musí býti vrstva vývojky dostatečně silnou.

Lüppo-Crammer pozoroval r. 1901 (Phot. Korr.), že některé vývojky ze řady paraaminofenolové stlačují citlivost exponované fotogr. desky tak, že se dá vyvolávati bez závoje při jasném světle. Zvláště u amidolu bylo toto pozorováno a L. C. sledoval tuto věc později dále a shledal, že desky koupáním v 0·02—0·05% roztoku amidolu ztrácejí svoji citlivost ve veliké míře. Příčinou toho předpokládá změnu chemickou-oxydační produkty vývojky. Později zkoušel velkou řadu různých látek, působící jako desensibilatory, mezi jinými též některá barviva a roku 1920 zjistil, že fenosafranin hodí se velice dobře jako desensibilator. Vypracoval pak metodu ku použití tohoto v praksi, kterou publikoval v knize: Negativ-Entwickelung bei hellem Lichte r. 1921.

Metoda tato vzbudila v kruzích odborných velikou pozornost a hojného používání, ježto tím vyvolávání zvláště desek panchromatických bylo velice usnadněno a kontrola umožněna. Je pochopitelno, že byla věnována nejprve pozornost stránce praktické a teprve v druhé řadě teoretické. Nápadný byl především zjev, že některé vývojky zvláště hydrochinonová vyvolávají s velikým urychlením. Přesnější data nebyla však dosud podána. Kdo pracoval touto metodou, musil si povšimnouti, že u některých druhů vývojek mění se gradace i hustota desky. Tomuto zjevu byla dosud věnována malá pozornost. Jen jedno měření na metolu a hydrochinonu je konáno od W. Ermena (British Journ. of Photo, 1921, str. 445), systematicky však pro všechny vývojky měření dosud konána nebyla.

Proto podjal jsem se úkolu stanoviti kvantitativně vliv vyvolávání fenosafraninem na gradaci a hustotu desek proti vyvolávání obyčejnému a výsledky této práce sděluji v následujícím, aniž bych chtěl zatím, přes to, že je to velmi lákavé, z těchto výsledků odvoditi další teorie, poněvadž myslím, že pro takovou složitou věc nemáme dosud dosti poznatků a zkušeností.

Pro pokusy, které by se daly navzájem srovnávati, bylo nutno zhotoviti stupnice pokud možno za stejných podmínek. Po několika pokusech bylo použito stupnice intensitní, jež byla zhotovena empiricky na fotografické desce, a jako konstantního zdroje světelného použito Scheinerovy benzinové lampy, která pro podobné účely se velmi dobře osvědčuje. Byly exponovány desky 9×12 *cm* ve vzdálenosti 50 *cm* od lampy 30 sec. Při této vzdálenosti jsou chyby v osvětlení pro desku 9×12 tak nepatrné, že nespadají v úvahu a můžeme předpokládati, že celá deska je stejnoměrně osvětlená. Deska pak rozřezána na proužky 2 *cm* široké a vždy dva použity ku pokusům; jeden jako kontrolní, druhý pokusný. Ku kvantitativnímu proměřování použito jednak Martensova polarisačního fotometru pro jemné odstíny, jednak Goldbergova densografu, který se pro rychlá měření zvláště dobře osvědčuje. Celkové výsledky pak naneseny jak obvykle do sítě koordinátové, kde na ose absciss jsou exposice — zde díly stupnice — na ose ordinát pak příslušné optické hustoty vyjádřené dekadickým logarithmem opacity.

Při praktickém provádění metody fenosafraninové doporučuje se jednak koupati předem desku v zředěném roztoku fenosafraninu 1 : 2000 po dobu jedné minuty a pak vyvolávati, nebo přidati fenosafranin přímo do vývojky. Obou způsobů bylo použito. Při druhém však ukázalo se, že všechny vývojky, které obsahují skupinu OH samotnou, srážejí fenosafranin, který jako barvivo zásadité snad nesnáší se s kyselou skupinou fenolovou a nehodí se tedy pro pokusy. Při vývojkách, které fenosafranin nesrážejí, byly konány pokusy oběma způsoby, při proměřování však ukázalo se, že není žádneho zásadního rozdílu pokud se týče gradace a hustoty mezi oběma metodami, takže možno souditi, že by tomu tak bylo též u ostatních vývojek.

Ježto nastává u některých vývojek nápadné urychlení vyvolávání za přísady fenosafraninu, dlužno studovati též dobu vyvolávání. Proto byly vyvolávány vždy proužky různě dlouho, aby bylo porovnání možné. Rovněž přísada různého množství bromidu draselného, jak později uvidíme, hraje zde jistou úlohu a proto byla zkoušena i tato. Postup práce pro každý druh vývojky byl ten, že se zkoušela vývojka na přísadu fenosafraninu. Nenastala-li sraženina, přidán fenosafranin v různém množství do vývojky a vyvoláváno různě dlouho. Pak přidáváno různě mnoho bromidu draselného a rovněž různě dlouho vyvoláváno. Po té byla vždy jedna deska koupána v roztoku fenosafraninu 1 : 2000 po dobu 1 min. a bez opláchnutí vyvolávána různě dlouho a za různé přísady bromidu draselného jako nahoře. Vyvolávání dálo se při bezpečném červeném světle a byla odečtena pokaždé doba, za kterou se objevila nejvyšší místa stupnice.

Jako fenosafraninu použito čistého barviva, které pro tyto účely zvláště připravuje továrna Hoechstská. Snad bude zajímavo sděliti rozpustnost tohoto barviva v dest. vodě, kterou jsem zkoušel, hodlaje připraviti nasycené roztoky. Při teplotě 18° C rozpouští se právě 1 *g* barviva v 500 *g* vody, takže je možno snadno připraviti si nasycený roztok, který se pak rozředí trojnásobným množstvím vody, čímž získáme roztok v praksi používaný v poměru 1 : 2000. Zkoušel jsem nejprve, jak dlouho je třeba nechati působiti roztok na desku, aby byla patrna změna gradace. Za tím účelem byly koupány proužky desek 15, 30, 45 a 60 sec., 2, 3 a 5 min. v roztoku fenosafraninu 1 : 2000 a společně s kontrolním proužkem vyvolány. Ukázalo se, že mezi kontrolní deskou a proužkem koupaným 15 a 30 sec. je nepatrný rozdíl. Při 45 sec. je již patrnější a dostoupí vrchole při koupání 1 min. Je tedy zbytečno, ba škodlivo v praksi déle koupati desku, ježto jsem pozoroval při desce koupané 5 min. větší závoj než při deskách kratčeji koupaných.

V následujícím popíši výsledky jednotlivých vývojek na gradaci a hustotu poukazuje k diagramům na konci, znázorňujícím kvantitativně nejdůležitější rozdíly. Vývojky rozdělil jsem jak obyčejně na dvě skupiny: pomalu pracující a rapidní. U každé vývojky udáno příslušné složení, vliv bromidu draselného a doba vyvolávání, jakož i zpoždění neb zrychlení vyvolávání s fenosafraninem proti vyvolávání normálnímu. Teplota, při které bylo pracováno, byla v mezích 15—17° C, tedy v mezích, za jakých se obyčejně pracuje.

I. Vývojka pyrokatechinová.

Použito jednak vývojky s potaší pomalu pracující, jednak vývojky s hydroxydem sodným dle předpisu Dra Ellona, jež je považována

1*

za nejrychleji pracující vývojku. Složení prvé je: Voda 1000 cm^3, siřičitan sodný kryst. 40 *g*, pyrokatechin 10 *g*, uhličitan draselný 60 *g*. Vývojka Ellonova má složení: Voda 1000 cm^3, siřičitan sodný kryst. 25 *g*, hydroxyd sodný 3,5 *g*, pyrokatechin 5 *g*. Obě vývojky srážejí fenosafranin a proto zkoušena pouze metoda koupáním. Vývojka s potaší nemá vlivu na gradaci, umenšuje však hustotu desky. Vliv bromidu draselného je patrný, čím více je ho přítomno ve vývojce, tím jsou rozdíly v hustotě větší. Celkem je však rozdíl poměrně malý. Bez KBr je pozorovati nepatrné urychlení, při vyvolávání za přísady KBr nepatrné zpoždění. Vývojka pyrokatechinová s hydroxydem nemá vlivu ani na gradaci ani na hustotu, obě křivky jak kontrolního tak i pokusného proužku koincidují dohromady. Rovněž zrychlení neb zpoždění žádné se nejeví.

II. Vývojka hydrochinonová.

Tato jeví poměrně největší úchylky a proto byla podrobněji studována. Složení použité vývojky je: Voda 1000 cm^3, siřičitan sodný kryst. 75 *g*, hydrochinon 10 *g*, uhličitan draselný 50 *g*. Nápadné je u této vývojky veliké zrychlení vyvolávání, takže působí jako rapidní vývojka a ztrácí zladitelnost. Tím se stává, že předhoní desku bez fenosafraninu, čímž je gradace i hustota daleko větší než u desky normální, což se jeví zvláště při deskách krátce vyvolávaných. Při delším vyvolávání je rozdíl v průhlednějších částech stupnice menší než v méně průhledných. Přísadou KBr stupňuje se tento rozdíl ještě více a rovněž urychlení vyvolávání je patrnější a je tím větší, čím větší je množství KBr. Rovněž i zde je rozdíl při velmi dlouhém vyvolávání menší než při kratším. Též i tato vývojka sráží fenosafranin a nedá se tedy s přísadou jeho upotřebiti.

III. Adurol.

Tato vývojka, která je bromovaný hydrochinon, chová se úplně stejně jako hydrochinon. Bylo použito složení jako u hydrochinonu a výsledky, pokud se týče gradace, hustoty a působení KBr, jsou tytéž.

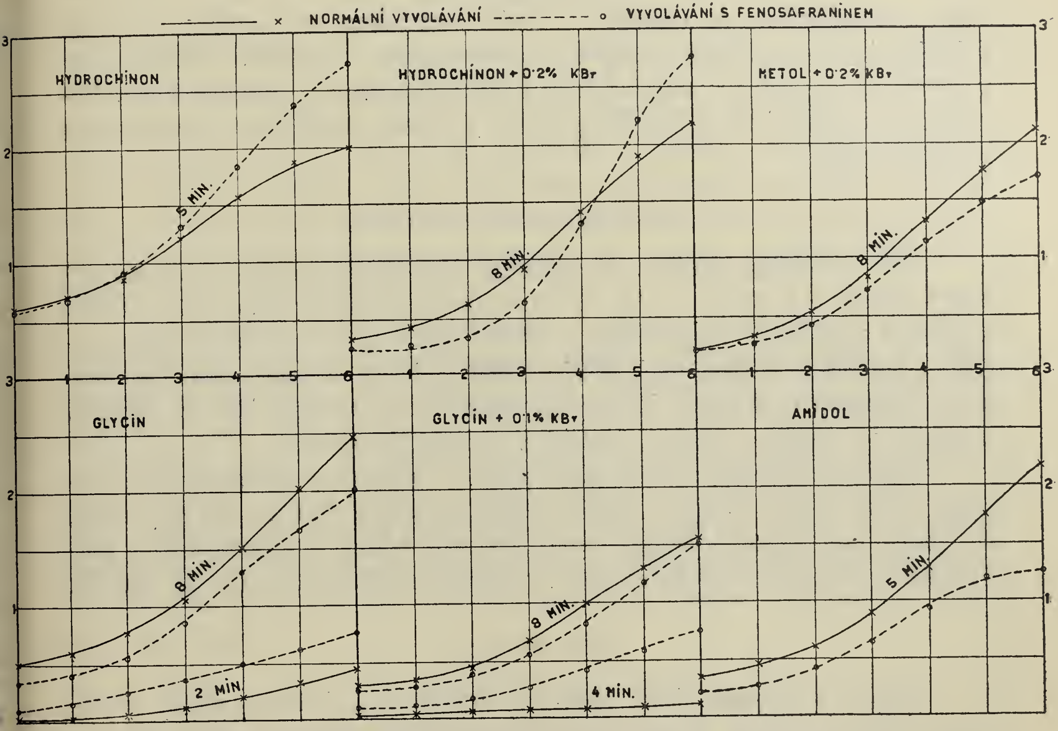
IV. Pyrogalol

Použito vývojky normálního složení s uhličitanem sodným: Voda 1000 cm^3, siřičitan sodný kryst. 100 *g*, pyrogalol 14 *g*, uhličitan sodný kryst. 50 *g*. Vliv gradace i hustoty u této vývojky je velmi malý, takže pro praktickou potřebu nespadá úplně na váhu. Bez přísady KBr je gradace nepatrně tvrdší, zvláště v tmavších místech, kdežto s KBr jeví při krátkém vyvolávání gradaci stejnou, avšak menší hustotu, při delším vyvolávání pak je gradace v průhledných částech měkčí, v neprůhledných tvrdší, podobně jako u hydrochinonu. Rozdíly jsou tím větší, čím větší je přísada KBr. Celkově ovšem proti hydrochinonu jsou rozdíly nepatrné.

Při vyvolávání jeví se rovněž urychlení, avšak v menší míře. Pyrogalol sráží rovněž fenosafranin jako předcházející vývojky.

V. Glycin.

Tato důležitá vývojka byla použita ve složení kašičkovém dle **Hübla** zředěném 25 díly vody. Hotová vývojka má toto složení: Voda 1000 cm^3, siřičitan sodný kryst. 13 *g*, glycin 5 *g*, uhličitan draselný 25 *g*. Teplota 15° C. Jako u hydrochinonu jeví se i zde veliké urychlení při vyvolávání,



což má vliv na gradaci, ne však v takové míře. Při krátkém vyvolávání bez přísady KBr jeví se gradace tvrdší, při dlouhém vyvolávání měkčí a to ve všech částech stupnice, zvláště však v hustších. Této okolnosti dá se velice dobře využíti pro praksi ku vyvolávání jemně modulovaných obrazů, zvláště portretů. Je známo, že glycinová vývojka pracuje poměrně tvrdě a neužívá se jí proto pro portrety. S použitím fenosafraninu obdržíme velmi měkce pracující vývojku, která zvláště ve vysokých světlech neobyčejně pěkně desku propracuje aniž by světla byla neprůhledná. Jak patrno z gradačních křivek, jeví glycerin-fenosafranin podobný průběh jako je při seslabování persíranem amonným a proto hodí se též dobře ku vyvolávání velmi kontrastních snímků, při čemž však je třeba správně exponovati a dlouho vyvolávati, aby dotyčný zjev se uplatnil. Přísadou

KBr, ač se vyvolávání urychlí a sice tím více, čím více přidáme KBr, není rozdíl v gradaci tak patrným. Křivky probíhají skoro rovnoběžně, pouze hustota desek je menší. Při krátkém vyvolávání předběhne deska koupaná ve fenosafraninu desku normální a gradace pak je tvrdší a rovněž i hustota větší; při delším vyvolávání je rozdíl obou desek nepatrný, až při velmi dlouhém je hustota normální desky větší a gradace nepatrně tvrdší.

Glycin nesráží fenosafranin a proto možno též vyvolávati za přísady barviva přímo do vývojky. Především šlo opět o stanovení vhodné koncentrace. Proto bylo přidáváno postupně 5, 10, 20, 50% roztoku fenosafraninu do vývojky a desky navzájem srovnávány. Největší úchylka jeví se při 20% roztoku fenosafraninu, 1 : 2000. Celkem však u srovnání s metodou koupací jsou úchylky gradace a hustoty malé. Poněkud patrnější jsou za přísady KBr. Rovněž urychlení vyvolávání je daleko menší.

VI. Paraaminofenol.

Této vývojky použito ve způsobu prodejného roztoku „Rodinal,“ který zředěn v poměru 1 : 30. U této rapidní vývojky pozorováno místo zrychlení zpomalení vyvolávání v dosti značné míře. Rozdíly mezi gradací a hustotou nejsou však příliš veliké, jak by se snad dalo dle velikosti zpoždění očekávati. Křivky gradační jsou podobné jako u glycinu. Gradace je poněkud měkčí, zvláště v tmavých místech.

Rodinalu možno rovněž užíti přímo s přísadou fenosafraninu. Pokusy v tom směru činěné s různě velikou přísadou roztoku ukázaly však, že není skoro žádného rozdílu mezi deskami takto vyvolávanými a normálními. Rovněž o opoždění neb zrychlení vyvolávání nedá se mluviti.

VII. Metol.

Složení vývojky: Voda 1000 cm^3, metol 5 *g*, siřičitan sodný kryst. 50 *g*, uhličitan sodný kryst. 50 *g*. Zde pozorován velmi značný vliv na gradaci obrazu podobně jako u hydrochinonu. Čekali-li bychom však následkem toho nějaké větší rozdíly v rychlosti vyvolávání, byli bychom zklamáni, ježto tyto bez přísady KBr nejsou žádné, s přísadou KBr pak poměrně malé a sice jako u rodinalu zpožděné. Bez přísady KBr za krátkého vyvolávání je gradace obou desek stejná, při delším vyvolávání je měkčí, s podobným průběhem jako u glycinu. Větší rozdíly jeví se za přísady KBr zvláště při kratším vyvolávání.

Ježto metol nesráží fenosafranin, možno ho též použíti přímo s přísadou barviva. Úchylky od normálního vyvolávání jsou v tomto případě větší než u rodinalu a glycinu, celkem však menší než při metodě koupací. Gradace je povšechně měkčí, rozdíl patrnější při kratším vyvolávání a při větší přísadě (0·2%) KBr.

VIII. Edinol.

Složení vývojky: Voda 1000 cm^3, siřičitan sodný kryst. 50 *g*, edinol 5 *g*, uhličitan sodný kryst. 50 *g*. Celková gradace je měkčí v dosti značné míře, hustota menší. Působení KBr při větším množství (0·1 %) patrno. Jako u rodinalu a metolu jeví se zpoždění vyvolávání a sice dosti značně.

Edinol nesráží fenosafranin a při vyvolávání za přísady fenosafraninu chová se podobně jako dříve jmenované vývojky. Gradace je měkčí, avšak méně význačná, rovněž zpoždění není tak veliké.

IX. Amidol.

Složení: Voda 1000 cm^3, siřičitan sodný kryst. 50 *g*, amidol 5 *g* (bez alkalií). Vývojka tato sama působí jak Lüppo-Cramer dokázal, jako slabý desensibilator. Dalo se tedy očekávati, že rozdíly ve vyvolávání budou značné, což se též potvrdilo. Gradace je značně měkčí ve všech částech stupnice a sice tím větší, čím déle se vyvolává. Přísada KBr má značný vliv. Čím více KBr přidáváme, tím je rozdíl patrnější. Jako u ostatních rapidních vývojek jeví se i u této zpoždění při vyvolávání a sice velmi značné.

Tato vývojka sráží fenosafranin a nedá se tedy zkoušeti metoda vyvolávání za přísady fenosafraninu. Srážení bylo pozorováno u všech vývojek, které mají pouze skupinu OH. Přistupuje-li k této ještě jiná skupina, fenosafranin se nesráží. Proto je podivno, že amidol, který má vedle jedné skupiny OH ještě dvě skupiny NH_2, fenosafranin sráží, když paraaminofenol jen s jednou skupinou NH_2 tak nečiní. Snad hraje zde jistou úlohu to, že amidol k vyvolávání používaný je vlastně chlorhydrát diaminofenolu a že skupina HCl je příčinou srážení (HCl sráží fenosafranin). Nebylo mně dosud možno zaopatřiti si čistý diaminofenol, abych mohl tuto věc zjistiti.

X. Metol-hydrochinon.

V praksi se velmi často kombinují některé vývojky dohromady, zvláště se užívá kombinace metol-hydrochinonu. Bylo zajímavo zkoumati, jak tato kombinace se bude chovati při vyvolávání fenosafraninem. Za tím účelem byla připravena vývojka normálního složení s proměnným množstvím metolu a hydrochinonu. Byly voleny 3 kombinace. V prvé byl poměr metolu k hydrochinonu jako 4 : 1, v druhé 1 : 1 a v třetí 1 : 4. Ve všech třech byly vyvolávány proužky jednak normální, jednak koupané jako dříve v roztoku fenosafraninu různě dlouho. Rovněž byla zkoušena přísada KBr a sice značnější množství (0·2 %). Gradace ve všech třech případech je měkčí než normální, avšak ne v takové míře jako u samotného hydrochinonu. Rozdíl mezi jednotlivými kombinacemi není příliš značný. Kde je metolu nejvíce, tam je rozdíl nejmenší; s postupujícím množstvím hydrochinonu je rozdíl poněkud větší. Spíše však odpovídá

	Vývojka	Doba, za kterou se objeví nejvyšší číslo stupnice v sec. (Horní číslo norm. vyv., dolní vyvolávání fenosafr.)				
		0% KBr	0·05% KBr	0·1% KBr	0·2% KBr	0·4% KBr
Metoda koupací	Pyrokatechin K_2CO_3	25 20	90 100	150 160	—	—
	Pyrokatechin NaOH	5 5	—	8 10	—	15 15
	Hydrochinon	45 15	70 45	105 50	140 55	—
	Adurol	30 10	—	80 20	—	—
	Pyrogalol	30 20	70 45	115 80	—	—
	Glycin	60 15	130 50	150 70	—	—
	Rodinal	15 45	—	35 70	—	80 140
	Metol	5 5	—	35 45	50 70	—
	Edinol	20 25	50 90	60 150	—	—
	Amidol	8 18	—	25 75	35 110	50 150
	Metolhydrochinon 4 : 1	5 7	—	—	20 25	—
	Metolhydrochinon 1 : 1	8 10	—	—	20 25	—
	Metolhydrochinon 1 : 4	10 12	—	—	30 35	—
Přísada fenosafraninu přímo do vývojky (20%)	Glycin	35 15	—	75 65	—	—
	Metol	5 10	—	15 20	—	—
	Edinol	20 22	—	—	—	—
	Rodinal	20 25	—	40 50	—	—

Zrychlení (+) resp. zpoždění (—) v sec. proti vyvolávání normálnímu.					Vliv na gradaci	Srážení
0% KBr	0·05% KBr	0·1% KBr	0·2% KBr	0·4% KBr		
+ 5	+ 10	+ 10	—	—	Gradace stejná, hustota menší	sráží se
0	— 2	—	—	0	Gradace i hustota stejné	sráží se
30	25	55	85	—	Gradace měkčí, při krátkém vyvolávání tvrdší. Rozdíl značný	sráží se
20	—	60	—	—	Jako u hydrochinonu	sráží se
10	25	35	—	—	Rozdíly poměrně malé	sráží se
45	80	80	—	—	Gradace měkčí, rozdíly značné	nesráží se
— 30	—	— 35	—	— 60	Gradace měkčí, rozdíl malý	nesráží se
0	—	— 10	— 20	—	Gradace měkčí, rozdíl značný	nesráží se
— 5	— 40	— 90	—	—	Gradace měkčí, rozdíl značný, menší však než u metolu	nesráží se
— 10	—	— 50	— 75	— 100	Gradace měkčí, rozdíl velmi značný	sráží se
— 2	—	—	— 5	—	Gradace měkčí, rozdíl méně značný	nesráží se
— 2	—	—	— 5	—		
— 2	—	—	— 5	—		
20	—	10	—	—		
— 5	—	— 5	—	—		
— 2	—	—	—	—		
— 5	—	— 10	—	—		

výsledek kombinace vývojce metolové než samotné hydrochinonové. Rovněž změna v rychlosti vyvolávání je nepatrná a jevící se ve zpoždění jako u čistého metolu. Viděti, jako je tomu též při obyčejném vyvolávání, že v kombinaci vždy metol převládá, i když je ho tam poměrně velmi málo.

Ku vývojce metolhydrochinonové možno přidati přímo fenosafranin aniž by se srážel. Přísada metolu srážení zabraňuje. Vliv na gradaci při tomto způsobu je jako při dřívějších vývojkách menší než při metodě koupací, celková gradace ovšem měkčí. Rozdíl v rychlosti vyvolávání nepatrný. (Viz tab. na str. 8. a 9.)

Prohlížíme-li nyní výsledky sestavené v předcházející tabulce, vidíme především, že u vývojek pomalu pracujících nastává zrychlení vyvolávání, které je největší u glycinu, pak přichází hydrochinon a adurol, pyrogalol a posléze pyrokatechin-potaš. Zrychlení je tím větší, čím větší je přísada KBr.

U vývojek rapidních jeví se naproti tomu zpoždění vyvolávání, jež je největší u rodinalu a amidolu, dále přichází edinol, metol a metolhydrochinon. Kdybychom srovnávali nyní gradační křivky a hledali souvislost mezi rychlostí vyvolávání a gradací, nejeví se žádná přesná zákonitost. U vývojek zvolna pracujících souhlasí velikost rozdílů v gradaci s velikostí zrychlení vyvolávání. Největší rozdíly jsou u glycinu a hydrochinonu, pak pyrogalolu a posléze u pyrokatechinu-potaše.

Při rapidních vývojkách tvoří rodinal výminku. Dle velikosti zpoždění daly by se očekávati značné změny gradace, čemuž však není. Snad je příčinou toho NaOH, který je v rodinalu jako zásada, neboť i pyrokatechin-NaOH neukazuje žádné rozdíly v gradaci. Rovněž gradace edinolu neodpovídá jeho zpoždění. Kdyby nebylo amidolu, který má největší změny gradace a největší zpoždění, mohli bychom rapidní vývojky uvésti dle toho, jak zpoždění přibývá. Na prvém místě je metol s největší změnou gradace a nejmenším zpožděním, dále edinol a rodinal, který má největší zpoždění a nejmenší rozdíly v gradaci. Amidol tvoří pak výminku, což můžeme připustiti, neboť je to jak známo jediná vývojka, která pracuje bez alkali.

Dle předcházejícího zdá se, že zásada ve vývojce má jistý vztah při vyvolávání fenosafraninem, je těžko však dosud dělati dohady, jaký je její vliv, když neznáme přesně úlohu zásady při vyvolávání obyčejném. Ježto je nesporno, že jde při fenosafraninu o zjevy chemické, bylo by nutno studovati vztahy barviva fenosafraninu k různým zásadám a vývojkám, což je úlohou organické chemie, a není vyloučeno, že by se snad tímto způsobem dala vyrobiti látka, která by působila jako desensibilator a nebyla barvivem jako fenosafranin, což by bylo pro praksi velmi výhodné.

Změnu gradace při vyvolávání nemusíme si vysvětlovati přímým působením fenosafraninu, nýbrž pouze tím, že rychlost vyvolávání se mění. Je ovšem všeobecně známo, že gradace obrazu je tím tvrdší, čím déle vyvoláváme a že přísada KBr má zde veliký vliv na gradaci tím, že vyvolávání zpomaluje. Urychlí-li se vyvolávání, jako je tomu při fenosafraninu, je ovšem gradace měkčí. To platí arci jen pro vývojky pomalu pracující. U vývojek rapidních musíme předpokládati jistou změnu citlivé látky neb vývojky, poněvadž by, kdyby se jednalo analogicky dle vývojek pomalu pracujících, musely by vývojky rapidní, které se zpožďují, dávati gradaci tvrdší, čemuž tak není. Vidíme tedy, že tímto jednoduchým způsobem si změnu gradace vysvětliti nedovedeme a že musíme předpokládati, že jde o změnu chemickou.

Tato změna může býti dvojího druhu. Buď se změní citlivá látka, aby se vyvolávala jinou gradací. To však není pravděpodobno, neboť desensibilatory stává se citlivá látka méně citlivou a je všeobecně známo, že čím méně citlivé látky, tím tvrději vyvolávají. Dlužno tedy předpokládati jinou změnu a sice tu, že nastává chemické působení mezi fenosafraninem a vývojkou v tom smyslu, že vývojky vyvolávají měkčeji.

Resumé.

Všechny vývojky při vyvolávání fenosafraninem dávají měkčí gradaci než při vyvolávání obyčejném. Není zásadního rozdílu mezi metodou koupací a metodou vyvolávací za přímé přísady fenosafraninu. Prvá metoda však dává význačnější rozdíly v gradaci. Vývojky nechovají se všechny stejně. Největší rozdíly ukazují se při hydrochinonu, glycinu a amidolu, též u metolu.

Rychlost vyvolávací se metodou fenosafraninovou mění. Zvolna pracující vývojky vyvolávají rychleji, rapidní vývojky pomaleji. Rozdíl však je větší u vývojek zvolna pracujících. Změnu gradace nemůžeme si vysvětliti jen změnou rychlosti vyvolávání, poněvadž by rapidní vývojky měly dávati gradaci tvrdší, čemuž tak není. Nutno tedy předpokládati změnu chemickou a sice působení fenosafraninu na vývojku v tom smyslu, že vyvolává měkčeji.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 30.

O rovnicích differenciálních lineárních obyčejných 3^{ho} řádu s řadou transformační oboustranně zakončenou.

Napsal

Dr. **Frant. Rádl.**

(Předloženo dne 26. května 1922.)

Vyšetřování provedené v Čas. p. p. m. a f. roč. LI.[1]) pro rovnice diff. lin. obyč. 2^{ho} řádu rozšířeno v následujícím na *řád třetí*; přes jistou analogii jest nutno zavésti při tom nové pojmy a úvahu provésti samostatnou cestou. Postup při dalších vyšších řádech tím už jest naznačen, zbývá však doplniti dedukci všeobecnou pro řád $n^{\text{tý}}$.

1. Rovnici diff. lin. obyč. 3^{ho} ř.

$$f(y) = y''' + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0 \tag{1}$$

transformujme dle systému

$$y_1'' + a y_1' + b y_1 + h y' + H y = 0, \qquad y_1 = y' + (p_1 - a) y \tag{2}$$

eliminací y na rovnici $f_1(y_1)$; funkce a, b jsou libovolně a od koefficientů rovnice (1) neodvisle dány. V tomto specielním případu, kdy druhá relace v systému (2) jest 1^{ho} ř., možná položit $a = b = 0$ bez újmy všeobecnosti. Neboť především plyne z relace

$$y_1 = y' + (p_1 - a) y,$$

že koefficienty rovnice f_1 nezávisí na b, neboť řešení y_1 též na b nezávisí; při transformaci b se tudíž ruší, a lze pro transformaci tedy položit $b = 0$. Možná však též položit $a = 0$; pak totiž závislost řešení y_1, y dána relací

$$y_1 = y' + p_1 y$$

a zavedeme-li místo řešení y řešení $\frac{y}{\alpha}$, kde $a = 2\frac{\alpha'}{\alpha}$, čili dosadíme-li do poslední relace $y \mid \frac{y}{\alpha}$, obdržíme vztah

$$\alpha y_1 = y' + (p_1 - a) y,$$

---

[1]) „O rovnicích diff. lin. obyč. 2^{ho} ř. s řadou trsfční oboustr. zakonč"

z něhož soudíme: transformaci dle (2) při $a \neq 0$, $b = 0$ obdržíme, zavedeme-li do rovnice (1) substituci $y \mid \frac{y}{\alpha}$, vzniklou takto rovnici transformujme dle (2) při $a = 0$ a v obdržené rovnici dosaďme $y_1 \mid \alpha y_1$.

Stačí tudíž uvažovati transformaci dle systému

$$y_1'' + h y' + H y = 0, \qquad y_1 = y' + p_1 y, \tag{3}$$

čímž známým způsobem obdržíme transformační řadu rovnic

$$\dots f_{-j} \dots f_{-1}, f, f_1 \dots f_i \dots; \tag{4}$$

transformací touto definován jinde[2]) mimo invarianty h, H též invariant Δ

$$\Delta = \frac{h \lambda' + H \lambda}{\lambda}, \qquad \lambda = e^{-\int p_1 d x},$$

od jehož nevymizení možnost transformace závisí a jenž jest analogický *resultantě* rovnic algebraických.

Píšeme-li rovnici (1) ve tvaru systému

$$Y' + p_1 Y + k y' + K y = 0, \qquad Y = y'', \tag{5}$$

jsou tím určeny invarianty k, K a dříve[3]) definován invariant A relací

$$A = \Delta' = \Delta_{-1},$$

kde Δ' přísluší k rovnici g k f adjungované a Δ_{-1} patří k rovnici f_{-1}.

Předpokládejme, že u rovnice f_i platí současně

$$h_i = H_i = 0 \tag{6}$$

— index zde i v násl. značí příslušnost k rovnici řady (4) v témž indexu —, pak možná tuto rovnici psát ve tvaru

$$(y' + p_1 y)'' = 0$$

čili, dosadíme-li k vůli následujícímu $p_1 \mid \frac{A'}{A}$, ve tvaru

$$f_i = y''' + \frac{d\, l\, A}{d x} y'' + \frac{d^2\, l\, A^2}{d x^2} y' + \frac{d^3\, l\, A}{d x^3} y = 0, \tag{7}$$

z něhož pomocí systému (3) možná odvoditi posloupně rovnice pouhými kvadraturami řešitelné f_{i-1}, f_{i-2}, . . . řady (4).

K dvěma podmínkám (6) připojme třetí tím, že vyslovíme požadavek, aby u rovnice f_{-j} vymizel invariant A_{-j}; pak bude určena též hodnota A, jež byla dosud libovolná a od níž závisely koefficienty rovnic řady (4), a řada tato dosud zakončená pouze v pravo rovnicí f_i bude uzavřena též v levo rovnicí f_{-j}.

---

[2]) RČA. XXVI, č. 52.

[3]) RČA. XXX, č. 7.

Řadu (4) oboustranně zakončenou od předešlé různou obdržíme též z předpokladu, že u rovnice f_{-j} platí současně

$$k_{-} = K_{-j} = 0 \tag{8}$$

čili, že rovnice f_{-j} má po substituci $p_1 \,|\, -\frac{B'}{B}$ tvar

$$f_{-j} = y''' + p_1 y'' = y''' - \frac{d\, l\, B}{d\, x} y'' = 0. \tag{9}$$

Též v tomto případě obdržíme z této rovnice pomocí systému (3) rovnice f_{-j+1}, f_{-j+2}, ... čili řadu (4) kvadraturami řešitelných rovnic a řada tato končí v levo rovnicí f_{-j}. Připojením třetí podmínky vyjadřující, aby vymizel invariant $\varDelta_i$ u rovnice f_i, určena dosud libovolná hodnota B a řada (4) jest zakončena opět rovnicemi f_{-j}, f_i, tudíž oboustranně.

V následujícím řešena úloha, stanoviti *tvar* i *řešení* všech rovnic řady (4) zakončené ať po jedné ať po obou stranách.

2. Abychom určili *tvar libovolné rovnice* f_{i-p} řady (4) nejdříve za předpokladu (6), stanovme pomocí systému (3) z rovnice f tvar rovnice f_1 a odtud rovnici f_{-1}

$$\begin{aligned} f_{-1} = y''' + \left(p_1 + \frac{d\, l}{d\, x} A\right) y'' + \left(2\, p_1' + p_2 + 2\, \frac{d^2 l}{d\, x^2} A\right) y' + \\ + \left(p_1'' + p_3 + \frac{d^3 l}{d\, x^3} A + k \frac{d\, l}{d\, x} A - k'\right) y = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Pomocí tohoto tvaru odvodíme z rovnice f_i vyjádřené v (7) rovnice f_{i-1}, f_{i-2}, ... čili všeobecně

$$\left.\begin{aligned} f_{i-p} = y''' + \left(\frac{d\, l}{d\, x} A\, \varDelta_i\, \varDelta_{i-1} \ldots \varDelta_{i-\overline{p-1}}\right) y'' + \\ + \left(2\, \frac{d^2 l}{d\, x^2} A^{p+1}\, \varDelta_i^p\, \varDelta_{i-1}^{p-1} \ldots \varDelta_{i-\overline{p-1}}\right) y' + \\ + \left(\frac{d^3 l}{d\, x^3} A^{p+1}\, \varDelta_i^p\, \varDelta_{i-1}^{p-1} \ldots \varDelta_{i-\overline{p-1}} + k_i \frac{d\, l}{d\, x} \varDelta_i + \right. \\ + k_{i-1} \frac{d\, l}{d\, x} \varDelta_{i-1} + \ldots + k_{i-\overline{p-1}} \frac{d\, l}{d\, x} \varDelta_{i-\overline{p-1}} - k_i' - \\ \left. - k_{i-1}' - \ldots - k_{i-\overline{p-1}}'\right) y = 0; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

odvodíme-li z této rovnice podle (10) další rovnici $f_{i-\overline{p+1}}$, přesvědčíme se, že pro index $p + 1$ jest rovnice utvořena dle téhož zákona, čímž provedena úplná indukce.

Co se řešení týče, snadno obdržíme řešení rovnice f_i a pomocí jedné z obou rovnic systému (3) na př. pomocí rovnice druhé stanovíme řešení rovnic f_{i-1}, f_{i-2}, ..., tedy i rovnice f_{i-p}.

1*

Mimo tvar (11) lze však obdržet pro rovnici f_{i-p} formu daleko pohodlnější. Poněvadž totiž podle (3), (5) jest

$$h = p_2 - 2\,p_1', \quad k = p_2, \quad K = p_3,$$

lze rovnici f psát ve tvaru

$$y''' + [\tfrac{1}{2}\int (k - h)\,d\,x]\,y'' + k\,y' + K\,y = 0. \tag{12}$$

U rovnice f_i jest

$$h_i = 0, \quad k_i = 2\,\frac{d^2\,l}{d\,x^2}\,\Lambda, \quad K_i = \frac{d^3\,l}{d\,x^3}\,\Lambda\,;$$

stanovíme-li nyní invarianty h_{i-p}, k_{i-p}, K_{i-p} všeobecně pro rovnici f_{i-p}, obdržíme podle (12) též všeobecný tvar rovnice f_{i-p}.

Hleďme především určiti invariant k_{i-p}. Z rovnice (1), (10) soudíme na relaci

$$k_{-1} = 2\,k - h + 2\,\frac{d^2\,l}{d\,x^2}\,\Lambda, \quad h_{-1} = k$$

upomínající na analogické formule pro 2^hý^ řád rovnice f;[1]) obecně možná psát

$$k_{i-\overline{p+1}} - 2\,k_{i-p} + k_{i-\overline{p+1}} = 2\,\frac{d^2\,l}{d\,x^2}\,\Lambda_{i-p}, \tag{13}$$

jest tudíž nutno dříve stanoviti výraz pro invariant Λ_{i-p}.

Z rovnic (1) a (10) soudíme na relaci

$$\Lambda_{i-\overline{p+1}} - 2\,\Lambda_{i-p} + \Lambda_{i-\overline{p-1}} =$$

$$= \frac{d}{d\,x}\;\frac{\Lambda''_{i-p} + \left[\int (k_{i-p} - h_{i-p})\,d\,x\right]\Lambda'_{i-p} + (k_{i-p} - h_{i-p})\,\Lambda_{i-p}}{\Lambda_{i-p}}, \tag{14}$$

jíž užívajíce posloupně pro $p = 0, 1, \ldots$, obdržíme Λ_i, $\Lambda_{i-1}, \ldots$, takže indukcí očekávati můžeme formuli

$$\Lambda_{i-p} = \frac{H_{p-1}\,H_{p+1}}{H_p^{\,2}}, \quad H_p = |\,\Lambda, \Lambda'', \Lambda^{IV}, \ldots, \Lambda^{2p}\,|, \tag{15}$$

kde H_p je determinant, u nějž vypsána jest pouze první řádka; posloupným derivováním jejím obdržíme řádky ostatní. Formule (15) upomíná na analogický výraz při 2^hém^ řádu rovnice pro k_{i-p}.[1]) Dokážeme-li, že, platí-li formule (15) pro index p, platí též pro index $p + 1$, bude úplnou indukcí dokázána všeobecně.

Připomeňme dříve, že užívajíce relace (13) posloupně pro $p = 0, 1, \ldots$, obdržíme k_i, $k_{i-1}, \ldots$, takže indukcí jsme vedeni k relaci

$$k_{i-p} = 2\,\frac{d^2\,l}{d\,x^2}\,H_p\,; \tag{16}$$

bude-li formule (15) dokázána všeobecně, platí všeobecně též relace (16), neboť podle (13) platí pro index $p + 1$

$$k_{i-\overline{p+1}} = 4\frac{d^2 l}{d x^2} H_p - 2\frac{d^2 l}{d x^2} H_{p-1} + 2\frac{d^2 l}{d x^2} A_{i-p},$$

tedy vzhledem k (15) jest

$$k_{i-\overline{p+1}} = 2\frac{d^2 l}{d x^2} H_{p+1},$$

takže relace (16) stvrzena bude pak též pro index o 1 vyšší. Ostatně formule (16) plyne též na základě (15) z tvaru (11), neboť dle něho jest

$$k_{i-p} = 2\frac{d^2 l}{d x^2} A^{p+1} A_i^p A_{i-1}^{p-1} \dots A_{i-\overline{p-1}},$$

odkudž po dosazení hodnot za $A_i, A_{i-1}, \dots, A_{i-\overline{p-1}}$ dle (15) obdržíme relaci (16).

Zbývá tudíž provésti úplnou indukci pro formuli (15), což odvozeno v následujících dvou paragrafech.

3. Důkaz, že *formule (15) platí též pro index* $p + 1$, provedeme tím způsobem, že dosadíme do relace (14) hodnoty za $A_{i-\overline{p-1}}$, A_{i-p} podle (15) pro indexy $p - 1$, p, též však hodnotu $A_{i-\overline{p+1}}$ dle téže formule (15) pro index $p + 1$; zůstane-li relace (14) v platnosti, bude tím formule (15) pro index $p + 1$ dokázána. Nejdříve budeme se snažiti relaci (14) po dosazení hodnot za $A_{i-\overline{p+1}}$, A_{i-p}, $A_{i-\overline{p-1}}$ co možná zjednodušiti.

Uvažme k tomu cíli, že podle známé poučky determinantní[4]) platí, značí-li D determinant n^{ho} ř. o elementech a_{ik},

$$D \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial a_{11} \partial a_{22}} = \frac{\partial D}{\partial a_{11}} \frac{\partial D}{\partial a_{22}} - \frac{\partial D}{\partial a_{12}} \frac{\partial D}{\partial a_{21}};$$

užijeme-li této poučky na determinant H_{p+1}, obdržíme

$$\begin{aligned} H_{p-1} H_{p+1} &= H_p M_p' - H_p' M_p, \\ M_p &= | A, A'', A^{IV}, \dots, A^{2(p-1)}, A^{2(p+1)} |, \end{aligned} \tag{17}$$

kde o determinantu M_p platí totéž, co řečeno o H_p v relaci (15). Následkem toho soudíme, že platí

$$\frac{H_{p-1} H_{p+1}}{H_p^2} = \frac{d}{d x}\left(\frac{M_p}{H_p}\right),$$

takže v relaci (14) možná provésti integraci obou stran. Dosadíme-li ještě hodnoty za k_{i-p} a za $h_{i-p} = k_{i-\overline{p-1}}$ podle (16), obdržíme po integraci (integrač. konst. = 0) relaci jednodušší

---

[4]) Weber, Algebra I, str. 115 (2. vyd.).

$$\frac{M_{p+1}}{H_{p+1}} - 2\frac{M_p}{H_p} + \frac{M_{p-1}}{H_{p-1}} = \\ = \frac{\Lambda_{i-p}''}{\Lambda_{i-p}} + 2\frac{dl}{dx}\frac{H_p}{H_{p-1}}\frac{dl}{dx}\Lambda_{i-p} - 2\frac{d^2l}{dx^2}\frac{H_p}{H_{p-1}}; \tag{18}$$

zjednodušíme ji ještě více.

Pro $p = 0$ zní tato relace

$$\frac{M_1}{H_1} - 2\frac{M_0}{H_0} = \frac{\Lambda_i''}{\Lambda_i} + 2\frac{dl}{dx}A\frac{dl}{dx}\Lambda_i + 2\frac{d^2l}{dx^2}A,$$

čili vzhledem k tomu, že $H_0 = A$. $M_0 = A''$ a vzhledem k hodnotě Λ_i dle (15)

$$\frac{M_1}{H_1} - \frac{M_0}{H_0} = \frac{H_1''}{H_1} - 2\frac{H_1' H_0'}{H_1 H_0} + \frac{H_0''}{H_0}.$$

Podobně pro $p = 1$ obdržíme relaci pro $\frac{M_2}{H_2} - \frac{M_1}{H_1}$ atd., takže indukcí soudíme na relaci pro index p, pro nějž platnost formule (15) jest předpokládána,

$$\frac{M_p}{H_p} - \frac{M_{p-1}}{H_{p-1}} = \frac{H_p''}{H_p} - 2\frac{H_p'}{H_p}\frac{H_{p-1}'}{H_{p-1}} + \frac{H_{p-1}''}{H_{p-1}}.$$

Dosaďme hodnotu takto stanovenou do relace (18), v níž též nahradíme Λ_{i-p} hodnotou dle formule (15); pak relace, jejíž platnost jest dokázati, nabude jednoduššího tvaru

$$\frac{M_{p+1}}{H_{p+1}} - \frac{M_p}{H_y} = \frac{H_{p+1}''}{H_{p+1}} - 2\frac{H_{p+1}' H_p'}{H_{p+1} H_p} + \frac{H_p''}{H_p},$$

čili

$$H_p M_{p+1} - M_p H_{p+1} = H_p H_{p+1}'' - 2 H_p' H_{p+1}' + H_p'' H_{p+1}, \tag{19}$$

který učiníme ještě jednodušším.

4. Odvodíme za tím účelem výraz pro H_p'' a M_p. Abychom obdrželi H_p'', derivujme posloupně řádky determinantu H_p, čímž obdržíme nejdříve H_p' ve tvaru jediného determinantu téhož řádu, načež po opětném derivování řádek, zavedeme-li označení

$$H_p^{(1)} = \begin{vmatrix} A, & A'' & \dots & A^{2p} \\ A', & A''' & \dots & A^{2p+1} \\ \vdots & & & \\ A^{p-2}, & A^{p} & \dots & A^{3p-2} \\ A^{p}, & A^{p+2} & \dots & A^{3p} \\ A^{p+1}, & A^{p+3} & \dots & A^{3p+1} \end{vmatrix}, \qquad H_p^{(2)} = \begin{vmatrix} A, & A'' & \dots & A^{2p} \\ A', & A''' & \dots, & A^{2p+1} \\ \vdots & & & \\ A^{p-1}, & A^{p+1} & \dots & A^{3p-1} \\ A^{p+2}, & A^{p+4} & \dots & A^{3p+2} \end{vmatrix},$$

platí pro 2$^{\text{hou}}$ derivaci

$$H_p'' = H_p^{(1)} + H_p^{(2)}. \tag{20}$$

Druhá derivace se skládá ze dvou pouze determinantů patrně všeobecně u každého determinantu $| a_1, a_2 \ldots a_2 |$, jehož následující řádka vzniká derivováním řádky předcházející.

Abychom obdrželi výraz pro M_p, uvažme, že, má-li determinant specielní tvar H_p podle (15), lze druhou derivaci H_p'' vyjádřit ještě jiným způsobem. Druhá derivace determinantu všeobecného D o prvcích a_{ik} se skládá ze součtu determinantů dvojího tvaru, z nichž první tvar se liší od D tím, že vždy prvky jednoho *sloupce* jsou vzaty v 2^hé^ derivaci; determinanty druhého tvaru mají koefficient *2* a mimo to liší se od D vždy ve dvou *sloupcích*, jejichž prvky jsou vzaty v derivaci 1^ní^. U H_p'' první druh determinantů redukuje se na determinant jediný označený M_p v relaci (17), neboť ostatní determinanty vymizejí majíce po dvou sloupcích stejných.

2^hou^ derivaci determinantu D možná však psát jakožto součet determinantů dvojího tvaru, z nichž oba tvary liší se od D právě jako dříve, jenže změna je v *řádcích* místo ve sloupcích. Vypíšeme-li tímto způsobem determinanty druhého tvaru u H_p'', obdržíme jediný determinant $2\, H_p^{(1)}$, neboť ostatní vymizí, majíce po dvou řádcích stejných.

Utvoříme-li 2^hou^ derivaci všeobecně u determinantu D buď derivováním sloupců nebo derivováním řádek, součet determinantů prvního tvaru jest patrně v obou případech týž, poněvadž pouze v něm se vyskytují derivace 2^ho^ řádu; totéž platí tudíž o součtu determinantů druhého tvaru. Následkem toho můžeme pro H_p'' psát též relaci

$$H_p'' = M_p + 2\, H_p^{(1)}. \tag{21}$$

Z dvojích výrazů pro H_p'' (20) a (21) plyne pro M_p relace

$$M_p = H_p^{(2)} - H_p^{(1)}. \tag{22}$$

Pomocí formulí (20), (22) zjednoduší se nyní relace (19) tak, že snadno už odůvodníme její platnost; nabude totiž pak tvaru

$$H_p\, H^{(1)}_{p+1} - H_p'\, H'_{p+1} + H^{(2)}_p\, H_{p+1} = 0. \tag{23}$$

Platnost této relace odůvodníme pomocí determinantu $2\, p + 3$^ho^ řádu

$$\begin{vmatrix} A & , A'' & , A^{IV} & , \ldots A^{2p+4} & — & — & — \\ A' & , A''' & , A^{V} & , \ldots A^{2p+5} & — & — & — \\ \vdots & & & & & & \\ A^{p+2}, & A^{p+4}, & A^{p+6}, & \ldots A^{3p+6} & — & — & — \\ A & , A'' & , A^{IV} & , \ldots A^{2p+4} & — & — & — \\ A' & , A''' & , A^{V} & , \ldots A^{2p+5} & — & — & — \\ \vdots & & & & & & \\ A^{p-1}, & A^{p+1}, & A^{p+3}, & \ldots A^{3p+3} & — & — & — \end{vmatrix},$$

který vznikne, když pod determinant H_{p+2} připíšeme ještě p prvních jeho řádek, prvky posledních p sloupců jakožto libovolné značme čárkami.

Podle věty Laplaceovy[5]) rozveďme tento determinant podle minorů $p+2^{\text{ho}}$ řádu obsažených v prvních $p+2$ sloupcích tím, že je násobíme ne minory k těmto komplementarními $p+1^{\text{ho}}$ řádu, nýbrž minory $p+1^{\text{ho}}$ řádu komplementárními k minorům $p+2^{\text{ho}}$ řádu utvořeným z $p+2$ sloupců posledních. Obdržíme nulu a rozvoj tento je právě relace (23), poněvadž ostatní členy vymizí.

Tím dokázána platnost relace (23), tudíž i relace (14), do níž dosadíme ze $\Lambda_{i-\overline{p+1}}$ hodnotu dle (15), dokázána tedy platnost formule (15) pro index $p+1$, tudíž platnost její všeobecná. Současně tím stvrzena všeobecná platnost formule (16).

5. Abychom mohli pomocí tvaru (12) odvoditi *tvar rovnice* f_{i-p}, uvažme, že podle (16) jest

$$(p_1)_{i-p} = \frac{1}{2}\int (k_{i-p} - h_{i-p})\, d\,x = \frac{d\,l}{d\,x}\,\frac{H_p}{H_{p-1}},$$

takže zbývá ještě odvoditi výraz pro K_{i-p}. Podle § 1. jest

$$\Lambda_{i-p} = \Delta_{i-p} = (p_1)_{i-p}\, k_{i-p} + k'_{i-p} - K_{i-p},$$

tudíž podle (15) platí

$$K_{i-p} = 2\,\frac{d^3\,l}{d\,x^3}\,H_p + 2\,\frac{d\,l}{d\,x}\,\frac{H_p}{H_{p-1}}\,\frac{d^2\,l}{d\,x^2}\,H_p - \frac{H_{p-1}\,H_{p+1}}{H_p^{\,2}}.$$

Rovnici f_{i-p} možná tudíž mimo tvar (11) psát též ve formě pohodlnější

$$\begin{aligned} f_{i-p} = y''' + \left(\frac{d\,l}{d\,x}\,\frac{H_p}{H_{p-1}}\right) y'' = 2\left(\frac{d^2\,l}{d\,x^2}\,H_p\right) y' + \\ + \left(2\,\frac{d^3\,l}{d\,x^3}\,H_p + 2\,\frac{d\,l}{d\,x}\,\frac{H_p}{H_{p-1}}\,\frac{d^2\,l}{d\,x^2}\,H_p - \frac{H_{p-1}\,H_{p+1}}{H_p^{\,2}}\right) y = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

čímž odvozena řada rovnic (4) jednostranně — v pravo — uzavřená.

Vymizí-li mimo invarianty h_i, H_i podle třetí podmínky v § 1 vyslovené též invariant Λ_{-j}, platí podle (15)

$$H_m = 0, \quad m = i + j + 1,$$

což značí, že u determinantu H_m mezi prvky první řádky $A, A'' \ldots A^{2m}$ platí lineárná relace o libovolných stálých koefficientech $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}$

$$A^{2m} + \alpha_{m-1}\,A^{2(m-1)} + \ldots + \alpha_1\,A'' + \alpha_0\,A = 0, \tag{25}$$

čili A je určeno touto lin. diff. rovnicí o stálých koefficientech, čímž první úloha v § 1 předložená rozřešena.

6. *Druhou řadu rovnic* (4) uzavřenou v levo obdržíme podle § 1 za předpokladu (8). U rovnic řádu 2^{ho} byla řada tato totožná s řadou prvního druhu, kde jsou obě řady rovnic různé. Pomocí tvaru pro f_1 odvodíme

---

[5]) Npř. Kowalewski. Determinantentheorie § 19, Satz 13.

z f_{-} v (9) tvar pro f_{-j+1}, f_{-j+2}, . . ., až všeobecně f_{-j+p}. Určíme formuli pro invarianty Δ_{-j+p}, h_{-j+p}, H_{-j+p} a pomocí tvaru

$$f = y''' + [\tfrac{1}{2} \int (k - h)\, d\, x]\, y'' + k\, y' + [H + \tfrac{1}{2} (k' - h')]\, y = 0$$

obdržíme druhý tvar pro f_{-j+p}. Položíme-li $\Delta_i = 0$, vznikne diff. rovnice stanovící B jako v (25) a řada (4) je uzavřena oboustranně.

Na výsledek možná však soudit bez počtu přímo z předešlého. Utvoříme-li totiž k rovnici g adjungované k f transformační řadu rovnic

$$g_{-i} \ldots g_{-1},\ g,\ g_1 \ldots g_j$$

týmž způsobem jako vznikla řada (4), jsou dle reciprocitního theorému[6]) rovnice f_{-j}, g_j adjungovány navzájem. Je-li tedy dáno, že u rovnice f_{-j} vymizí invarianty k_{-j}, K_{-j}, platí u rovnice g_j

$$h_j' = H_j' = 0,$$

takže tato rovnice má tvar analogický (7)

$$g_j = y''' + \left(\frac{d\, l}{d\, x} B\right) y'' + \left(\frac{d^2\, l}{d\, x^2} B^2\right) y' + \left(\frac{d^3\, l}{d\, x^3} B\right) y = 0,$$

značí tedy (10) a (24) též všeobecný tvar rovnice g_{j-p}, dosadíme-li $A \mid B$, $i \mid j$. Pro invariant Δ'_{j-p} platí tedy relace (15), zaměníme-li B za A. Utvořlme-li rovnici ke g_{j-p} adjungovanou, obdržíme všeobecný tvar rovnice f_{-j+p}, při čemž platí tedy o invariantech Δ_{-j+p}, k_{-j+p} relace

$$\Delta_{-j+p} = \frac{K_{p-1}\, K_{p+1}}{K_p{}^2}, \quad k_{-j+p} = 2\, \frac{d^2\, l}{d\, x^2} K_p, \quad K_p = | B,\ B'' \ldots B^{2p} |.$$

Vymizí-li Δ_i, vymizí K_m, a hodnota B je určena touž diff. rovnicí (25) jako hodnota A.

Tím úvahy provedené pro 2^hý^ řád rovnice f rozšířeny též na řád 3^tí^ až na tvar obecného integrálu libovolné rovnice f_{i-p} řady (4); zbývá tu ještě odvoditi pro rovnice 3^ho^ řádu pro tento integrál analogický tvar determinantní jako u rovnic řádu 2^ho^.

---

[6]) RČA. XXII, č. 32, § 4.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 31.

O čediči ze Slánské hory.

Podává

Aug. Ondřej v Praze.

(Se 3 obrazci v textu.)

(Předloženo 24. června 1921.)

O slánské hoře zmiňují se již prastaré kroniky i paměti. Vyvěral totiž na úpatí jejím pramen kdysi slaný, jenž se těšil velké pozornosti celého okolí. Arciť nespolehlivost zpráv tehdejších[1]) nedovoluje učiniti si představy o správném stavu. První vědeckou zprávu podal teprve Fr. Ad. Reuss.[2]) Popisuje zajímavou stavbu sloupů čedičových a usuzuje celkem dosti správně o povaze erupce. Současně uvádí výsledky analysy vody provedené J. Meyerem a podrobuje je diskusi. Slanou příchuť zdá se připisovati obsahu síranu sodného. Z autorů pozdějších M. V. Lipold[3]) popisuje a kreslí polohu sloupů čedičových. Horninu samu řadí k pravým čedičům obsahujícím olivínové vrostlice. Lipold též prvý popisuje kontaktní účinky čediče na sousední horniny. Bořický[4]) zkoumal horninu mikroskopicky i chemicky. Nalezl amfibol, nefelín, magnetit, noseán, olivín, ilmenit, apatit, sklo a jako pochybný uvádí i leucit, a připojuje výkres mikroskopického složení horniny. Krejčí a Helmhacker[5]) opakují výsledky Bořického a připojují stručnou zprávu o stavbě hory. v. Foullon[6]) stotožňuje horninu ze slánské hory s čedičem vinařickým, jež obě označuje jakožto noseanické čediče nefelínické. Posléze A. Sigmund[7]) pojednal rozvláčně o skladbě hory i povaze cele erupce.

---

[1]) Viz na př. zprávu o sopečné činnosti r. 1726 citovanou v díle Sommerově: Das Königreich Böhmen, Praha 1845, sv. XIII, p. 54.

[2]) Sammlung phys. Aufsätze, Drážďany 1794, sv. IV., p. 367.

[3]) Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanstalt, XII. 1862, p. 518, fig. 11.

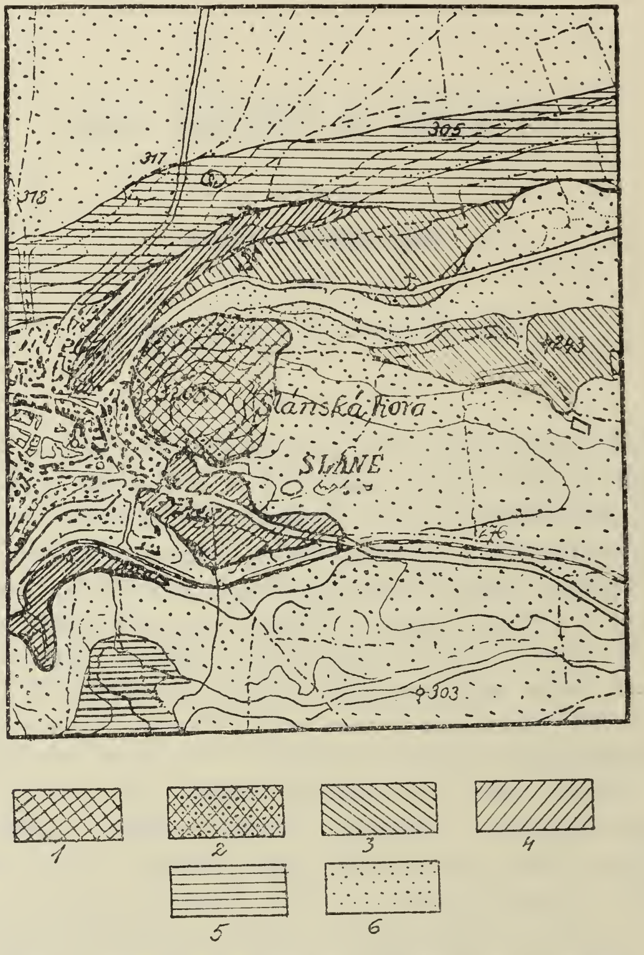
[4]) Archiv pro přírod. prozkoumání Čech II. sv., I. odd. II. Praha 1873, p. 73, tab. 2, obr. 2.

[5]) Ibid. sv. IV, č. 2, Praha 1879, p. 152.

[6]) Verhandl. d. k. k. geol. Reichsanstalt 1885, p. 276.

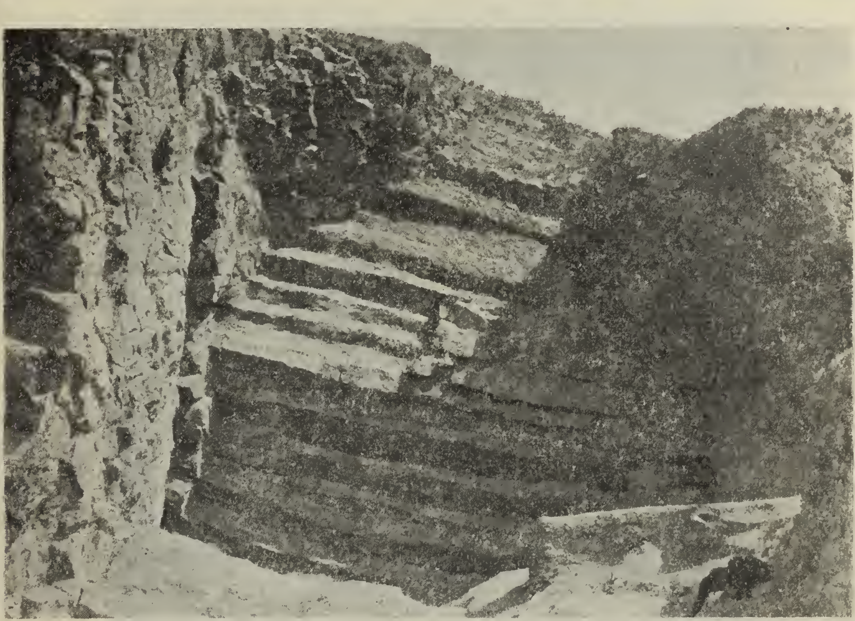
[7]) Die Basaltberge bei Schlan u. Vinařic. Program něm. gymn. na Smíchově 1893.

Slánská hora, ležící těsně na *V* od Slaného, příkře sklání se na *Z* k městu a povlovně na *V*, kdež ztrácí se pod hlínami a písky, týčí se do výše 326 *m* n. m. a asi 50 *m* nad okolním terrainem. Okolí tvořeno jest (obr. 1.) permokarbonskými pískovci a slepenci, nad nimiž uloženy jsou křemité slepence a pískovce spodnokřídové stupně korycanského a peruckého a nad těmito pak opuky. Čedič prorazivší těmito vrstvami neměl velkého účinku ani na uložení jich ani metamorfosu. Poměrně nejvíce přeměnily se úlomky hrubozrnných pískovců neb slepenců křemitých. Křemeny jich sesklovatěly a hlinitoželezitý tmel dostal ráz fluidální základní hmoty, nejméně pak změnil se petrografický ráz opuky.



Obr. 1. Geologická mapka okolí Slánské hory. 1 : 25.000.
1 = čedič, 2 = čedičový tuf, 3 = permokarbon, 4 = pískovce a slepence spodní křídy, 5 = opuky, 6 = písky a hlíny.

Erupce čedičová provázena jest z části tufy, nesoudržným, drobivým materiálem promíšeným úlomky čedičovými, barvy popelové, rezavě hnědé neb nazelenalé. Zejména na severní straně možno dobře přehlédnouti jeho vrstevnatost způsobenou růzností materiálů jednotlivých erupcí. Tu následuje pod 1—2 *m* silnou vrstvou popelu žlutošedé barvy asi ½ *m* silná vrstva tmavohnědá, pod ní ½—1 *m* jemného popelu, pak asi 1 *m* směsi kamení čedičového s tufy, pak zase jemný popel, a pod tímto dále směs tufů a úlomků kamenů čedičových. Tufy zachovány jsou ještě částečně na *Z* svahu a ve zbytcích i na *J*. Vlastní efuse čedičová odehrála se v několika fásích a složitá a častěji přerušovaná plocha ochlazovací způsobila značný chaos v orientaci sloupů čedičových. Původní radiálně paprsčité postavení jich bylo pozdějšími erupcemi porušeno a sloupy desorientovány, jak dobře patrno jest zejména na *J* straně. Konečně utuhlá masa byla několikráte roztržena a pukliny vyplněny erupcemi mladšími. Velmi dobře viditelno jest toto na př. na žíle čedičové (obr. 2.) odhalené opuštěným lomem *J* pod třemi kříži, složené z vodorovně položených krátkých sloupů čedičových vklíněných mezi vysoké velmi příkře stojící sloupy okolní. Žíla má při povrchu síly asi 1—1½ *m*, v hloubi se sesiluje a pokud patrno dosahuje až 5 *m* síly ($h = 3{\cdot}142$). Mikroskopicky čedič žíly této nemá povahy hornin žilných, nýbrž jest s hmotou hlavní téměř shodný. Stejně i v ostatních případech možno z petrografické identity souditi, že nebylo ani velkého časového rozdílu ani úchylek značnějších v povaze magmatu jednotlivých erupcí.



Obr. 2. Lom pod třemi kříži pod vrcholem Slánské hory.
Mladší žíla čedičová o vodorovně položených sloupech proráží hmotou staršího čediče.

Z nerostů čedič provázejících vyskytl se *vápenec*. Tento tvoří v místech, kde asimilací sedimentů obsah CaO čedice se zvětšil, na puklinách neb stěnách dutin povlaky šedozelené barvy, krystalicky vláknitého neb lupenitého slohu, neb hroznovité aggregáty složené z přejemných krystalků omezených na venek tvarem — $\frac{1}{2}R$ $(01\bar{1}2)$. Barva jich jest zelenavě hnědá neb šedavá. Významný jest poměrně značný podíl MnO, jehož zjištěno 0·76 %. Vápenec tvoří dále hlízy ve sklovitých formách lávových a výplně amygdaloidních dutin. Tato odrůda jest celistvým, zelenavě žlutým průsvitným vápencem v menších zrnkách pisolitické struktury. Chemicky jest relativně čistým. Vedle značnějšího podílu FeO a MnO má jen stopy Mg, P a málo nerozpustného zbytku.

Aragonit tvoří hvězdicovité skupiny a vrstvy neb čočky paprsčité skladby, až asi 5 *cm* v průměru a 1 *cm* tloušťky; jest barvy bílé a místy prosvítá hnědým tónem. Spektroskopicky prozrazuje obsah stroncia. Jinak lze dokázati ještě příměs FeO.

Hornina sama jest šedé barvy, velmi jemného, okem nerozlučitelného zrna, slabě ale zřetelně magnetická, neobyčejně veliké pevnosti a tvrdosti. Hanisch[8]) udává pevnost v tlaku na 3321 kg/cm^2 a 4565 kg/cm^2, průměrem tedy 3943 kg/cm^2, což jest nejvyšší hodnota u všech hornin jím uvedených. Pro snadný rozpad v šesti- a pětiboké sloupce není však možno kamene použíti než k účelům dlažebním a štěrkování.

Hustota určena pyknometricky na 3·17.

K mikroskopickému studiu užil jsem preparátů zhotovených z ukázek různých erupcí i veškerého výbrusového materiálu Bořického uloženého ve sbírkách musejních. Srovnáváním tohoto materiálu vyplývá, že mikroskopická skladba horniny neliší se podstatně v různých ukázkách. Hornina složena jest z augitu, nefelínu, magnetitu a hauynu jakožto součástí hlavních, pak obsahuje olivín, ilmenit, akcesoricky ještě apatit a pyrit.

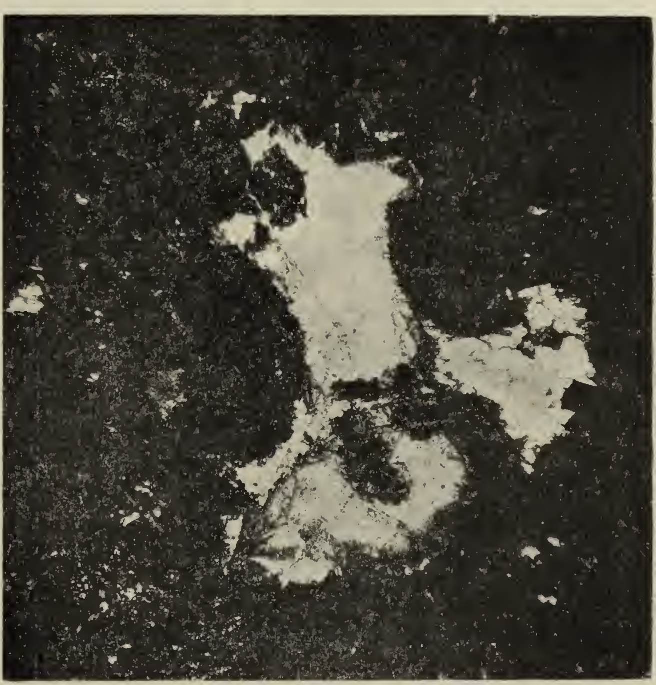
Augit tvoří většinou jen drobné několik setin *mm* velké krystalky; větší mikroporfyrické krystalky, obvyklého typu i optických vlastností jsou velmi řídké. Rýhování, o němž se Bořický zmiňuje, způsobeno jest srůstem dle *a* (100) a jemným rudním práškem vtroušeným v řádkách svislého směru.

Nefelín místy převládá nad augitem, jest mladší tohoto a vyskytuje se ve dvou generacích. Mladší tvoří mezernou hmotu a pojivo krystalů augitových, starší idiomorfní porfyrické vrostlice. Jsou to sloupky až 2 *mm* dlouhé, omezené hranolem a basí, bez optických anomalií, pravidlem prostoupené velikým množstvím přejemných mikrolitů rudních tvaru jehliček hustě seřazených rovnoběžně s vertikálou hostitele. Délka jich obnáší kolem 1 μ, nejvýše 5 μ. Nahloučeny jsou zejmena na obvodu, takže krystal jest při slabším zvětšení šedohnědý, na obvodu černohnědý. V příčných řezech jest patrno, že poloha vodorovně uložených jehliček dána jest orientací hranolovou. Kde vedle mikrolitů hostí nefelín hrubší zrnka rudní, bývá celý krystal neprůhledný a jen skvrnitě modrošedě prosvítající partie dovolují jej rozeznati od rud kompaktních. Nefelín tvoří dále shluky větších rozměrů, nepravidelného tvaru (obr. 3.), složené z krystalů stejné velikosti jako nefelín základní hmoty, k nimž přistupuje i něco isotropní hmoty, v níž Bořický vidí leucit.

---

[8]) Prüfungsergebnisse d. natürl. Bausteine, 1912.

Minerál skupiny sodalitové, jejž Bořický označuje za noseán, poskytuje s kyselinou solnou krystalky sádrovce i zdá se příslušeti spíše k ***hauynu.*** Tvoří krystalky šestibokých průřezů, velikosti 0·1—0·4 *mm,* hustě prostoupené jehličkami ilmenitu neb magnetitu podobnými, orientovanými rovnoběžně s obrysy dodekaedru. Vrostlice tvoří hustý rámec na obvodě krystalu neb kol uzavřenin, jež tvoří aegirin, řidčeji lísteček biotitu neb zrnko magnetitu, po případě oxydací jeho vzniklý haematit. Krystal ohraničen jest rámcem úzkým, úplně čirým, do něhož vrostlice nezasahují. Pokud rámeček tento patří hmotě hauynové či snad, již sklu, těžko jest rozhodnouti. Rámek tento chybí nefelínům vždy, ale mikrolity nefelínové jsou pravidlem jemnější. Hauyn vystupuje ve dvou generacích, obě však jsou četnými přechody spojeny. Některé krystaly hostí i hrubší zrna rud a jsou rudním práškem do té míry impregnovány, že jen místy prosvítají šedomodrým tónem. Přejemný pigment jich jeví se při 2500násobném zvětšení jakožto rovnoměrná směs opáknich teček.



Obr. 3.

Olivín tvoří větší a menší krystalky obvyklého šesti neb osmibokého tvaru, rozměrů až přes 1 *mm*. Zřídka je zachován a proměňuje se za značného uvolňování železných rud. Větší krystaly bývají serpentinisovány, menší pak nahraženy uhličitany.

Tmavé rudy železné náležejí většinou *magnetitu*, jenž vyskytuje se zde ve dvojí generaci, menším dílem *ilmenitu*, i příměs *pyritu* dá se dokázati. V místech kontaktu bývá magnetit pravidlem oxydován v krevel.

Poměr součástí není vždy zcela stálý. Pravidlem však augit převládá nad ostatními, ač někde nefelín se mu téměř vyrovná. Ve zmíněné žíle čedičové vyskytuje se porfyricky vyvinut pouze nefelín, augit a magnetit, hauynu je vůbec málo a olivín chybí zcela; ve vzorcích z lomu na *SZ* okraji hory jest o něco více nefelínu a hauynu, dosti olivínu, avšak augity první generace tu scházejí. V opuštěném lomu blíže vrcholu, *J* od tří křížů, odkudž vzat byl vzorek pro chemickou analysu, jsou poměry vyvinuty tak, že porfyricky vyloučeny jsou nefelín, hauyn, olivín i magnetit a augit téměř zcela patří mladší generaci. Některé preparáty Bořického jsou bohatší hauynem, jiné nefelínem, pravidlem však chybí starší generace augitů. Preparát, k němuž vztahuje se vyobrazení,[9]) a pravděpodobně i popis, jest ze všech nefelínem nejbohatší.

Struktura horniny jest holokrystalicky porfyrická. V základní hmotě struktury hypidiomorfně zrnité, tvořené směsí krystalů augitu, nefelínu, magnetitu a nečetného hauynu vynikají vrostlice nefelínu, olivínu, magnetitu, hauynu a nehojného augitu. Bořický řadí horninu k noseánitům t. j. čedičům složeným z poloviny amfibolem,[10]) z třetiny nefelínem a ze zbytku noseánem a magnetitem, poznamenává však, že od nich hornina naše liší se velikými noseány a nefelíny. K nefelínickým čedičům rovněž není možno ji přičítati z téhož důvodu, od hauynofýrů odlišuje ji mimo jiné přítomnost nefelínu. Nejlépe možno ji vřaditi v systematice Rosenbuschově do skupiny *basaltoidních nefelínitů*, jak silným podílem bezbarvých součástí, tak minerální skladbou i tendencí k anamesitickému slohu. Systematické postavení horniny naší objasní i chemický rozbor její. Tento provedl poprvé Bořický;[11]) výsledky rozboru jeho nejsou však ve shodě s minerálním složením součástí, a zejména podíl MgO jest příliš nízkým vzhledem k přítomnosti olivínu, rovněž hmoty hauynové jest více než plyne z výsledků analysy, což Bořický sám uznává. Novou analysu provedli v ústavu pro analytickou chemii vys. učení technického v Praze pan ing. Jos. Fidler a p. ing. Dr. Jos. Chytrý.

Panu profesoru ing. J. Hanušovi vzdávám za opatření rozboru tohoto i jmenovaným pánům za provedení jeho svůj srdečný dík.

---

[9]) l. c. tab. II-*f* obr. 2.

[10]) správně: augitem.

[11]) l. c. p. 174.

Ve srovnání s výsledky Bořického (I.) nalezena čísla (II.); průměr to dvou dobře se shodujících analys.

	I.	II.
SiO_2	39·479 %	36·65 %
Al_2O_3	19·203	10·81
Fe_2O_3	18·616	7·61
FeO	—	13·34
MnO	—	stopy
CaO	10·478	17·04
MgO	0·304	5·10
Na_2O	6·696	3·81
K_2O	0·621	1·00
P_2O_5	1·859	1·91
SO_3	0·284	—
H_2O	3·253	—
Ztráta žíháním	—	2·82
Součet	100·793 %	100·09 %
h	3·060	3·17

Rozpočtením výsledků nalezených methodou Osannovou získáme čísla následující:

	I.	II.	III.
SiO_2	38·74	64·57	40·69
Al_2O_3	11·43	11·21	7·06
FeO	21·34	29·64	18·68
CaO	18·04	32·16	20·27
MgO	5·39	13·47	8·49
Na_2O	4·03	6·50	4·10
K_2O	1·06	1·13	0·71
Součet	100·00	158·68	100·00

I. původní analysa s přepočtením Fe_2O_3 na FeO a vynecháním vedlejších součástí, přepočtená na 100·00;

II. stonásobná molekulární čísla;

III. táž, přepočtená na 100·00.

Z posledního sloupce plynou hodnoty Osannovy

$s = 40{\cdot}69$, $A = 4{\cdot}81$, $C = 3{\cdot}25$, $F = 43{\cdot}19$, $n = 7{\cdot}92$, a vzorec:

$s_{40\cdot69}\ a_{1\cdot88}\ c_{1\cdot27}\ f_{16\cdot85}\ n_{7\cdot92}$, zkráceně:

$s_{41}\ a_2\ c_1\ f_{17}\ n_8$.

Analysa Bořického vede k vzorci:

$s_{46\cdot84}\ a_{4\cdot5}\ c_{2\cdot5}\ f_{13}\ n_{9\cdot5}$

a na něm založil Osann[12]) skupinu nefelínitů typu „Salzberg“. Do této skupiny patří z nefelínitů jedině nefelínit z Hochstronden ve Štýrsku analysovaný A. Jägerem,[13]) jinak hauynofyr a leucitický nefelínit z vulkánu Etinde v Kamerunu.

Formule naše odpovídá spíše formuli čedičů nefelínických typu Käsegrotte o vzorci $s_{44}\,a_2\,c_1\,f_{17}$, neb typu Uvalde o vzorci $s_{41\cdot5}\,a_1\,c_1\,f_{18}$, čímž naznačena jest jakási příbuznost s magmatem čediče z Vinařické hory.

Mineralogicko-petrografický ústav
vysokého učení technického v ***Praze.***

---

[12]) Tschermak, Mineral. petrogr. Mitt. XX, p. 482.
[13]) ibid. XVI. p. 347.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 32.

O výpočtu tížnicových odchylek se zřetelem k isostasii.

(Pro veliké vzdálenosti od stanice.)

Napsal

Dr. Boh. Kladivo.

(Předloženo dne 26. května 1922.)

1. K následujícím výpočtům byl jsem veden studiem Hayfordovy práce „The Figure of the Earth and Isostasy from Measurements in the United States“ (Washington, 1909) a Helmertova pojednání „Die isostatische Reduktion der Lotrichtungen“ (Sitzb. d. k. preuss. Ak. d. Wiss., 1914, str. 440—453).

Jde o výpočet odchylky tížnice způsobené přitažlivostí hmoty země.

Kdyby hmota země byla rozložena kolem středu C_z v soustředných homogenních kulových vrstvách, byla by na stanici S na povrchu země horizontální komponenta atrakce v každém směru rovna nule, a také odchylky tížnice od směru $S C_z$ by byly rovny nule.

Skutečné rozložení hmoty působí, že horizontální komponenta atrakce není obecně rovna nule. Označíme-li její složku v určité rovině R_0, procházející body S, C_z, písmenem a_h a svislou složku atrakce písmenem a_s, je tížnicová odchylka (o) v uvažované rovině R_0 dána vzorcem:

$$tg\, o = \frac{a_h}{a_s}, \quad o'' = \varrho'' \, arctg \frac{a_h}{a_s}.$$

Svislá složka a_s se nemění podstatně pro různá rozložení hmoty země, jež budeme uvažovati. Je-li stanice S ve výšce v_s nad hladinou moře (nad povrchem koule o poloměru $r = 6371{\cdot}2\ km$[1]), jest

$$a_s \doteq g_0 \left(1 - \frac{2\, v_s}{r}\right)$$

(g_0 jest urychlení tíže v hladině moře).

---

[1] Poloměr koule nahražující Hayfordův rotační elipsoid. Srv. Helmert: Theorieen der höheren Geodäsie, 1., str. 68.

Horizontální složka a_h závisí na skutečném rozložení hmoty země. Hayford i Helmert předpokládají:

1. Hmota rozložená uvnitř kulové plochy K (střed C_z, poloměr $r - H$, H jest asi 120 *km*) nepřispívá ničím k složce a_h.

2. Hmota vně plochy K je vázána podmínkou isostasie: Tlak na plošnou jednotku plochy K je všude stejný (K je „plocha vyrovnaného tlaku").

Podmínka isostasie se vyjadřuje přibližně: Nad plošnou jednotkou kulové plochy ve hloubce H *km* pod hladinou moře je všude stejně mnoho hmoty.

Hmotu vně plochy K si myslíme rozdělenu v obory O rovinami R procházejícími body S, C_z a svírajícími s rovinou R_0 určité úhly, a kuželovými plochami o vrcholu C_z a ose $C_z S$, jichž osové řezy mají určité úhly při vrcholu C_z.

Při výpočtu horizontální složky a_h nahražují Hayford i Helmert podmínku isostasie „pracovní hypothesou", že přebytek (nedostatek) hmoty v oborech pevninových (mořských) je nahrazen nedostatkem (přebytkem) hmoty rozděleným rovnoměrně od plochy vyrovnaného tlaku až po hladinu moře.

Hayford si myslí přebytek (nedostatek) hmoty, který je v pevninových oborech (mořských oborech) mezi hladinou moře a povrchem země (dnem moře) zhuštěný na povrchu koule o poloměru 6370 *km*. Počítá odchylku („topografickou odchylku") způsobenou touto zhuštěnou hmotou. Při výpočtu redukčního faktoru, kterým se má násobiti topografická odchylka, abychom dostali hledanou tížnicovou odchylku redukovanou se zřetelem k isostasii, zanedbává vliv zakřivení země. Při velkých vzdálenostech přitahující hmoty zanedbává vliv výšky stanice. — Velikost chyb, které tímto zjednodušováním vznikají, odhaduje. — Počítá tížnicovou odchylku ještě pro hmoty vzdálené od stanice o 4126 *km*.

Helmert navrhuje počítati topografickou odchylku bez zřetele k zakřivení země. Redukční faktor počítá přibližně, se zřetelem k zakřivení země (poloměr země 6371 *km*); opravu redukčního faktoru s ohledem na výšku stanice počítá přibližně, zanedbávaje vliv zakřivení země. — Chyby vzniklé zjednodušováním výpočtů odhaduje. — Redukční faktory jsou uvedeny ještě pro vzdálenost 5682 *km* od stanice.

Původně položil jsem si úlohu: zbaviti výpočet tížnicové odchylky nepřesností rázu početního a při tom zachovati snadnost číselného výpočtu.¹)

Zmíněná „pracovní hypothesa" byla nahražena předpoklady fysikálně možnými (odst. 2).

---

¹) Pro všechny rovnice přicházející v úvahu mohly býti sestrojeny nomogramy (à points alignés).

Postupem, který byl zvolen pro výpočet tížnicové odchylky, oddělily se chyby vzniklé z nepřesností v předpokladech rázu fysikálního od chyb z nepřesností početních.

Zjednodušování přesných výrazů a rozměry oborů byly voleny tak, že chyby z početních nepřesností byly udrženy v jistých mezích (odst. 4).

Úvaha o vlivu nepřesností ve vystižení podmínky isostasie, v předpokladech o rozdělení hustoty (odst. 5) změnila úlohu, kterou jsem si původně položil v tuto: Dokázati (odst. 6) tvrzení: Pokud nebudou odstraněny pochybnosti o vyjádření podmínky isostasie, skutečného rozložení hustoty, musíme příspěvek k tížnicové odchylce, pocházející od oborů vzdálených od stanice o více než 600 *km*, považovati za nejistý.

2. *Výpočet hustoty.*

Uvažujeme vrstvy zemské kůry do hloubky 130 *km* pod hladinou moře. Vypočteme hustotu v jednotlivých oborech O za různých jednoduchých předpokladů a při dvou různých vyjádřeních podmínky isostasie.

a) Předpokládáme pro jednoduchost, že hustota hmoty od povrchové vrstvy zemské kůry do hloubky H *km* pod hladinou moře je stálá a značíme písmeny h_0 (h_v, $h_{\cdot v'}$) hustotu ve vrstvě sahající do výšky hladiny moře (do výšky v nad hladinu moře, do hloubky v' pod hladinou moře), písmenem h' hustotu mořské vody.

Nahradíme-li podmínku isostasie podmínkou: hydrostatický tlak na plošnou jednotku plochy vyrovnaného tlaku je všude stejný, jsme vedeni k těmto vztahům mezi hustotami na různých místech:

$$h_v = h_0 \frac{H}{H+v} = h_0 \left(1 - \frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2} - \vartheta_1 . \frac{5{\cdot}063}{10^4}\right)$$
$$= h_0 \left(1 - \frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2} - \frac{v^3}{H^3} + \frac{v^4}{H^4} - \overline{\vartheta}_1 . \frac{3{\cdot}390}{10^6}\right),$$
$$h_{\cdot v'} = h' + (h_0 - h') \frac{H}{H-v'} = h' + (h_0 - h') \left(1 + \frac{v'}{H} + \frac{v'^2}{H^2} + \vartheta_2 . \frac{8{\cdot}265}{10^4}\right) \quad (a)$$
$$= h' + (h_0 - h') \left(1 + \frac{v'}{H} + \frac{v'^2}{H^2} + \frac{v'^3}{H^3} + \frac{v'^4}{H^4} + \overline{\vartheta}_2 . \frac{6{\cdot}831}{10^6}\right)^{1)};$$
$$0 \leqq \vartheta_1,\ \overline{\vartheta}_1,\ \vartheta_2,\ \overline{\vartheta}_2 < 1.$$

b) Nahradíme-li podmínku isostasie přibližně podmínkou: nad plošnou jednotkou kulové plochy ve hloubce H *km* pod hladinou moře je všude stejně mnoho hmoty, jsme vedeni k vztahům:

$$h_0 \{r^3 - (r-H)^3\} = h_v \{(r+v)^3 - (r-H)^3\}$$
$$= h_{\cdot v'} \{(r-v')^3 - (r-H)^3\} + h' \{r^3 - (r-v')^3\}.$$

Odtud:

$$h_v = h_0 \frac{r^3 - (r-H)^3}{(r+v)^3 - (r-H)^3} = h_0 \left(1 - \frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2} - \vartheta_1' . \frac{1{\cdot}826}{10^3}\right),$$

---

1) V tomto odstavci byly uvažovány meze:

110 *km* $\leqq H \leqq$ 130 *km*, 0 $\leqq$ výška $v \leqq$ 9 *km*, 0 $\leqq$ hloubka $v' \leqq$ 10 *km*.

$$h_{-v'} = h' + (h_0 - h')\frac{r^3 - (r-H)^3}{(r-v')^3 - (r-H)^3} \qquad (b)$$
$$= h' + (h_0 - h')\left(1 + \frac{v'}{H} + \frac{v'^2}{H^2} + \vartheta_2' \,.\, \frac{2{\cdot}575}{10^3}\right);$$
$$0 \leqq \vartheta_1',\ \vartheta_2' < 1.$$

Kdybychom předpokládali, že mimo hmotu takto rozloženou je rozložena vně plochy vyrovnaného tlaku ještě hmota s hustotou, závislou jen na vzdálenosti od plochy vyrovnaného tlaku (stejnou v oborech pod mořem i pod pevninou), nemělo by to na další výpočty vlivu.

K stejnému rozložení hmoty vedou tyto předpoklady:

Pro pevninové obory: Od hladiny moře po povrch země (do výšky v) je rozložena hmota s hustotou h_0, od plochy vyrovnaného tlaku po povrch země kompensující hmota s hustotou h_v' takovou, že celková hmota

$$h_0 \{(r+v)^3 - r^3\} + h_v' \{(r+v)^3 - (r-H)^3\} = 0.$$

Pro obory pod mořem: Od hladiny do dna moře je rozložena hmota s hustotou $h' - h_0$, odtud po plochu vyrovnaného tlaku kompensující hmota s hustotou $h'_{-v'}$, takovou, že celková hmota

$$(h' - h_0)\{r^3 - (r-v')^3\} + h'_{-v'}\{(r-v')^3 - (r-H)^3\} = 0.$$

(V těch pevninových oborech, které sahají po hladinu moře, není hmoty, jež by měla býti uvažována.)

K srovnání uvádím předpoklady Hayfordovy:[1])

Pro pevninové obory: Od hladiny moře po povrch země (do výšky v) je rozložena hmota s hustotou h_0, od plochy vyrovnaného tlaku po hladinu moře kompensující hmota s hustotou $-h_0\dfrac{v}{H}$.

Pro mořské obory: Je-li hloubka moře v', je od hladiny moře do hloubky $v'\dfrac{h_0 - h'}{h_0}$ rozložena hmota s hustotou $-h_0$ a od hladiny moře po plochu vyrovnaného tlaku kompensující hmota s hustotou $h_0\dfrac{v'}{H}\dfrac{h_0 - h'}{h_0}$.

Podržíme-li ve vzorcích (b) ještě členy, které mohou dosáhnouti as hodnot $\dfrac{h_0}{10^4}$, $\dfrac{h_0 - h'}{10^4}$, bude:

$$h_v = h_0\left(1 - \frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2} - \frac{v^3}{H^3} + \frac{v^4}{H^4} - \frac{v}{r} + \frac{v^2}{rH} + \overline{\vartheta_1'}\right),$$
$$h_{-v'} = h' + (h_0 - h')\left(1 + \frac{v'}{H} + \frac{v'^2}{H^2} + \frac{v'^3}{H^3} + \frac{v'^4}{H^4} + \frac{v'}{r} + \frac{v'^2}{rH} + \overline{\vartheta_2'}\right); \qquad (b_1)$$
$$-\frac{1}{10^5}\,6{\cdot}077 < \overline{\vartheta_1'} \leqq 0, \quad 0 \leqq \overline{\vartheta_2'} < +\frac{1}{10^5}\,8{\cdot}911.$$

---

[1]) cit. práce, str. 68—9.

$-\frac{1}{10^5}6{\cdot}077\left(+\frac{1}{10^5}8{\cdot}911\right)$ není minimum (maximum) zbytku $\overline{\vartheta_1'}$ $(\overline{\vartheta_2'})$;

$$-\frac{1}{10^5}6{\cdot}077 \doteq \frac{\text{minimum čitatele zbytku}}{\text{min. jmen. zbytku}};$$

$$+\frac{1}{10^5}8{\cdot}911 \doteq \frac{\text{maximum čitatele zbytku}}{\text{min. jmen. zbytku}}.$$

Podmínka, z níž byly tyto vzorce odvozeny: nad plošnou jednotkou plochy vyrovnaného tlaku je všude stejně mnoho hmoty, je za uvažovaných předpokladů identická s podmínkou: váha tuhé hmoty, tvaru podobného komolému jehlanu, spočívající nad plošnou jednotkou plochy vyrovnaného tlaku, je všude stejná.

c) Dosavadní předpoklady byly takto změněny: Hustoty od povrchu zemské kůry do hloubky plochy vyrovnaného tlaku rovnoměrně přibývá. Hustota v hloubce h pod povrchem zemské kůry je $\overline{h}\left(1+k_1\frac{h}{r}\right)$, $\overline{h}=\overline{h_v}$ $(\overline{h_0}, \overline{h_{-v'}})$, sahá-li země do výšky v nad hladinu moře, (do výšky hladiny moře, do hloubky v' pod hladinou moře), $\overline{h_v}$ značí hustotu povrchové vrstvy, je-li její nadmořská výška v, $\overline{h_0}=h_0$ značí hustotu povrchové vrstvy země ve hladině moře, $\overline{h_{-v'}}$ hustotu povrchové vrstvy, sahá-li kůra do hloubky v' pod hladinu moře.

Řádová velikost konstanty k_1: Z Helmertova vzorce pro hustotu $(h_{r'})$ ve vzdálenosti r' *km* od středu země[1]) plyne:

$$h_{r'} = 11{\cdot}3\left\{1-1{\cdot}04\left(\frac{r'}{r}\right)^2+0{\cdot}275\left(\frac{r'}{r}\right)^4\right\} \doteq 2{\cdot}66\left\{1+4{\cdot}2\,\frac{H'}{r}\ldots\right\}$$

(H' *km* je hloubka uvažovaného místa pod hladinou moře).

Urychlení tíže od hladiny moře do hloubky plochy vyrovnaného tlaku přibývá také rovnoměrně. Ve hloubce H' pod hladinou moře je rovno $g_0\left(1+k_2\frac{H'}{r}\right)$.

Řádová velikost konstanty k_2: Ze vzorce pro urychlení tíže $(g_{r'})$ ve vzdálenosti r' *km* od středu země[2]) plyne:

$$g_{r'} = 4\pi k\,.\,11{\cdot}3\,r'\left\{\frac{1}{3}-\frac{1{\cdot}04}{5}\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\frac{0{\cdot}275}{7}\left(\frac{r'}{r}\right)^4\right\} \doteq g_0\left\{1+0{\cdot}6\,\frac{H'}{r}\ldots\right\}.$$

(k je gravitační konstanta).

Ve hloubce h pod povrchem země, sahá-li země do výšky v nad hladinou moře, jest urychlení tíže $g_0\left(1-\frac{1}{r}\,\frac{v-h}{2}\right)$.

Za těchto předpokladů plynou z podmínky, že hydrostatický tlak na plošnou jednotku plochy vyrovnaného tlaku je všude stejný, vzorce:

---

[1]) Helmert: T. d. h. G., 2., str. 487.

[2]) tamtéž, str. 493.

$$\left(1+k_1\frac{h}{r}\right)\overline{h_v} \doteq h_0\left\{1-\frac{v}{H}+\frac{v^2}{H^2}-\frac{v^3}{H^3}+\frac{v^4}{H^4}+\frac{v}{2r}\left[k_1\left(1-\frac{2H'}{H}\right)+k_2\right]\right.$$
$$\left.+\frac{v^2}{2rH}\left[-2k_2-k_1\left(1-\frac{2H'}{H}\right)+\frac{1}{2}\right]\right\}+h_0k_1\frac{H'}{r},$$

$$\left(1+k_1\frac{h}{r}\right)\overline{h_{-v'}} \doteq (h_0-h')\left\{1+\frac{v'}{H}+\frac{v'^2}{H^2}+\frac{v'^3}{H^3}+\frac{v'^4}{H^4}\right.$$
$$\left.+\frac{v'}{2r}\left[-k_1\left(1-\frac{2H'}{H}\right)-k_2\right]+\frac{v'^2}{2rH}\left[-k_1\left(1-\frac{2H'}{H}\right)-k_2\right]\right\}$$
$$+h'\left(1+k_1\frac{v'^2}{2rH}\right)+h_0k_1\frac{H'}{r}.$$

Pro první případ je $-v \leqq H' \leqq +H$, v druhém $v' \leqq H' \leqq H$. (Je čítána kladně od hladiny moře k ploše vyrovnaného tlaku.)

Pro pevninové obory sahající do výšky hladiny moře je hustota $h_0\left(1+k_1\frac{H'}{r}\right)$.

Přimyslíme si k hustotě mořské vody ještě hustotu $h_0k_1\frac{H'}{r}-h_0k_1\frac{H'}{r}$. Člen $h_0k_1\frac{H'}{r}$, stejný ve všech případech, můžeme vynechati pro $0 \leqq H' \leqq H$.

d) Za stejných předpokladů plynou z podmínky, že váha tuhé hmoty, tvaru podobného komolému jehlanu, spočívající nad plošnou jednotkou plochy vyrovnaného tlaku, je všude stejná, vzorce:

$$\left(1+k_1\frac{h}{r}\right)\overline{h_v} \doteq h_0\left\{1-\frac{v}{H}+\frac{v^2}{H^2}-\frac{v^3}{H^3}+\frac{v^4}{H^4}+\frac{v}{2r}\left[k_1\left(1-\frac{2H'}{H}\right)+k_2-2\right]\right.$$
$$\left.+\frac{v^2}{2rH}\left[-2k_2-k_1\left(1-\frac{2H'}{H}\right)+\frac{5}{2}\right]\right\}+h_0k_1\frac{H'}{r},$$

$$\left(1+k_1\frac{h}{r}\right)\overline{h_{-v'}} \doteq (h_0-h')\left\{1+\frac{v'}{H}+\frac{v'^2}{H^2}+\frac{v'^3}{H^3}+\frac{v'^4}{H^4}\right.$$
$$\left.+\frac{v'}{2r}\left[-k_1\left(1-\frac{2H'}{H}\right)-k_2+2\right]+\frac{v'^2}{2rH}\left[-k_1\left(1-\frac{2H'}{H}\right)-k_2+2\right]\right\}$$
$$+h'\left[1+\frac{v'^2}{2rH}(k_1+2)\right]+h_0k_1\frac{H'}{r}.$$

Člen $h_0k_1\frac{H'}{r}$ budeme moci zase vynechati pro $0 \leqq H' \leqq H$, přimyslíme-li si k hustotě mořské vody ještě hustotu $h_0k_1\frac{H'}{r}-h_0k_1\frac{H'}{r}$.

Je patrno, že za uvažovaných vyjádření podmínky isostasie a za různých přijatelných předpokladů, liší se vzorce pro hustotu v členech, které dosahují hodnoty $\frac{h_0}{10^3}$. — Podržíme-li jen členy, které mohou dosáhnouti hodnoty $\frac{h_0}{10^2}$, dojdeme pro všechny uvažované případy k stejným vzorcům:

$$h_v = h_0\left(1 - \frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2}\right), \quad h_{v'} = h' + (h_0 - h')\left(1 + \frac{v'}{H} + \frac{v'^2}{H^2}\right). \qquad (1)$$

Tyto vzorce byly přijaty za základ výpočtů.

V případě pevninových oborů můžeme [v souhlasu s vzorci (1)] počítati horizontální komponentu atrakce a_h' (v rovině R_0), pocházející od hmoty rozložené v uvažovaném oboru s hustotou $h_0\left(-\frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2}\right)$ od povrchu koule K do výšky v_s (nadmořská výška stanice S), a s hustotou $\pm h_0\left(1 - \frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2}\right)$ od výšky v_s do v ($\pm$ dle toho, je-li $v \gtreqless v_s$, v ($\geqq 0$) značí střední nadmořskou výšku zemského povrchu v uvažovaném oboru).

Při $v = v_s$ počítáme horizontální komponentu od hmoty rozložené v uvažovaném oboru s hustotou $h_0\left(-\frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2}\right)$ od povrchu koule K do výšky $v_s = v$.

V případě mořských oborů možno počítati [v souhlase s vzorci (1)] horizontální komponentu atrakce a_h'' (v rovině R_0) od hmoty rozložené v uvažovaném oboru s hustotou $(h_0 - h')\left(\frac{v'}{H} + \frac{v'^2}{H^2}\right)$ od výšky v_s do hloubky H, s hustotou $(h_0 - h')\left(-1 - \frac{v'}{H} - \frac{v'^2}{H^2}\right)$ od výšky v_s do hloubky v' a s hustotou $-h'$ od výšky v_s do hladiny moře (v' značí střední hloubku moře v uvažovaném oboru).

3. *Výpočet tížnicové odchylky.*

Vypočteme-li hodnoty $\overline{o''}$ (jsou to přibližně odchylky příslušné horizontálním komponentám a_h', a_h'') podle vzorce

$$\overline{o''} = \varrho'' \cdot \frac{a_h'}{a_s}, \quad \text{nebo} \quad \overline{o''} = \varrho'' \cdot \frac{a_h''}{a_s},$$

bude celková odchylka v rovině R_0 dána součtem $o'' \doteq \Sigma\, \overline{o''}$. (Součet se vztahuje na všechny obory O.)

Chybu, která vzniká tím, že klademe $o'' = \varrho'' \cdot \frac{\Sigma\, a_h}{a_s}$ místo správného $\varrho'' \cdot arctg \frac{\Sigma\, a_h}{a_s}$, můžeme zanedbati. — Je-li $\left|\varrho'' \cdot \frac{\Sigma\, a_h}{a_s}\right| \leqq 60''$ (což asi vždy bude splněno), jest $\left|\varrho''\left(arctg \frac{\Sigma\, a_h}{a_s} - \frac{\Sigma\, a_h}{a_s}\right)\right| < \frac{1{\cdot}7''}{10^6}$.

V případě pevninových oborů jest

$$\overline{o''} = \frac{\varrho''}{a_s}\left\{k\, h_0\left(-\frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2}\right)\int\limits_{r-H}^{r+v_s}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{r'^3 \sin^2\varphi \cos\lambda\, d r'\, d\varphi\, d\lambda}{[r'^2 - 2 r' (r + v_s) \cos\varphi + (r + v_s)^2]^{3/2}}\right.$$

$$\left. - k\, h_0\left(1 - \frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2}\right)\int\limits_{r+v}^{r+v_s}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{r'^3 \sin^2\varphi \cos\lambda\, d r'\, d\varphi\, d\lambda}{[r'^2 - 2 r' (r + v_s) \cos\varphi + (r + v_s)^2]^{3/2}}\right\}.$$

Písmena λ_1, λ_2 ($\lambda_2 > \lambda_1$) značí úhly, které svírají dvě sousední roviny R s rovinou R_0, písmena $2\varphi_1$, $2\varphi_2$ ($\varphi_2 > \varphi_1$) úhly osových řezů dvou sousedních kuželových ploch (odst. 1., str. 2).

(Všechny případy $v \gtreqless v_s$ jsou zde zahrnuty.)

Integrujeme-li dle λ a zavedeme novou proměnnou x rovnicí

$$r' = (r + v_s)\,\frac{1 + x}{1 - x},$$

jest:

$$\overline{o''} = \frac{\varrho''}{a_s}\, k\, h_0 (\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1)\, \frac{r + v_s}{4} \left\{ -\left(-\frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2} \right) f(\varphi_1, \varphi_2, x_1) \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2} \right) f(\varphi_1, \varphi_2, x_2) \right\},$$

$$f(\varphi_1, \varphi_2, x) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int\limits_{o}^{x} \frac{(1 + x)^3 \sin^2\varphi\, d\varphi\, dx}{(1 - x)^2 \sin^3\frac{\varphi}{2} \left(1 + x^2 \cot^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{3/2}},$$

$$x_1 = \frac{-H - v_s}{2r - H + v_s}, \quad x_2 = \frac{v - v_s}{2r + v + v_s}.$$

Pro mořské obory jest:

$$\overline{o''} = \frac{\varrho''}{a_s}\, k\, (h_0 - h') (\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1)\, \frac{r + v_s}{4} \left\{ -\left(\frac{v'}{H} + \frac{v'^2}{H^2} \right) f(\varphi_1, \varphi_2, x_1) \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{v'}{H} + \frac{v'^2}{H^2} \right) f(\varphi_1, \varphi_2, x_3) + \frac{h'}{h_0 - h'}\, f(\varphi_1, \varphi_2, x_4) \right\},$$

$$x_3 = \frac{-v' - v_s}{2r - v' + v_s}, \quad x_4 = \frac{-v_s}{2r + v_s}.$$

V dalším uvažujeme tyto meze:

$110\,km \leqq H \leqq 130\,km$, $0 \leqq$ výška stanice $v_s \leqq 9\,km$, $0 \leqq$ výška $v \leqq 7\,km$, $0 \leqq$ hloubka $v' \leqq 8\,km$.

$$f(\varphi_1, \varphi_2, x) = (1 + \varepsilon) \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sin^3\frac{\varphi}{2}} \int\limits_{o}^{x} \frac{dx}{\left[1 + x^2 \cot^2\frac{\varphi}{2} \right]^{3/2}}$$
$$+ 5 \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sin^3\frac{\varphi}{2}} \int\limits_{o}^{x} \frac{x\, dx}{\left[1 + x^2 \cot^2\frac{\varphi}{2} \right]^{3/2}} + 12 \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sin^3\frac{\varphi}{2}} \int\limits_{o}^{x} \frac{x^2\, dx}{\left[1 + x^2 \cot^2\frac{\varphi}{2} \right]^{3/2}},$$

$$-\frac{1}{10^5}\, 2{\cdot}6309 < \varepsilon' < 0, \quad -\frac{1}{10^8}\, 4{\cdot}7393 < \varepsilon'' < +\frac{1}{10^9}\, 3{\cdot}3128.^{1)}$$

---

[1] $\varepsilon = \varepsilon'$ pro $x = x_1$, $\varepsilon = \varepsilon''$ pro $x = x_2, x_3, x_4$. Podobně veličiny Zb_0', Zb_0'', Zb_1', Zb_1''; atd.

Poslední integrál můžeme psáti tak:

$$4\,(1+Z\,b_0)\,x^3\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}-\frac{18}{5}x^5\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}\cot^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$+\frac{45}{14}x^7\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}\cot^4\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

$$-\frac{1}{10^3}\,4{\cdot}3808<Z\,b_0'<0,\quad -\frac{1}{10^8}\,1{\cdot}5866<Z\,b_0''<0.$$[1]

V prvních dvou integrálech integrujeme dle x. Zavedeme novou proměnnou z rovnicí $z=\sin\frac{\varphi}{2}$. (Příslušné meze označíme písmeny z_1, z_2).

$$f(z_1,z_2,x)=8\,x\,(1+\varepsilon)\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{(1-z^2)^{1/2}\,dz}{(z^2+x^2-z^2x^2)^{1/2}}$$

$$-40\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{z\,dz}{(1-z^2)^{1/2}}\left[\frac{z}{(z^2+x^2-z^2x^2)^{1/2}}-1\right]+32\,(1+Z\,b_0)\,x^3\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{(1-z^2)^{1/2}\,dz}{z}$$

$$-\frac{144}{5}x^5\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{(1-z^2)^{3/2}\,dz}{z^3}+\frac{180}{7}x^7\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{(1-z^2)^{5/2}\,dz}{z^5}.$$

$$(z^2+x^2-z^2x^2)^{-1/2}=\frac{1}{z\,(1-x^2)^{1/2}}\left(1+\frac{x^2}{z^2\,(1-x^2)}\right)^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{z\,(1-x^2)^{1/2}}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{z^2\,(1-x^2)}+\frac{3}{8}\,\frac{x^4}{z^4\,(1-x^2)^2}-\frac{5}{16}\,\frac{x^6}{z^6\,(1-x^2)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{35}{128}\,\frac{x^8}{z^8\,(1-x^2)^4}-\frac{63}{256}\,\frac{x^{10}}{z^{10}\,(1-x^2)^5}+Z\,b_1\right),$$

$$+\frac{1}{10^{26}}\,4{\cdot}2890<Z\,b_1'<+\frac{1}{10^6}\,1{\cdot}0706,\quad 0\leqq Z\,b_1''<+\frac{1}{10^{17}}\,1{\cdot}1962.$$

V integrálu

$$-40\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{z\,dz}{(1-z^2)^{1/2}}\left[\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{z^2\,(1-x^2)^{3/2}}+\frac{3}{8}\,\frac{x^4}{z^4\,(1-x^2)^{5/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{5}{16}\,\frac{x^6}{z^6\,(1-x^2)^{7/2}}+\frac{35}{128}\,\frac{x^8}{z^8\,(1-x^2)^{9/2}}-\frac{63}{256}\,\frac{x^{10}}{z^{10}\,(1-x^2)^{11/2}}+\frac{Z\,b_1}{(1-x^2)^{1/2}}-1\right]$$

píšeme

$$\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}-1=\frac{1}{2}\,x^2+Z\,b_2,$$

$$+\frac{1}{10^9}\,2{\cdot}1561<Z\,b_2'<+\frac{1}{10^9}\,5{\cdot}5171,\quad 0\leqq Z\,b_2''<+\frac{1}{10^{12}}\,1{\cdot}1877.$$

---

[1] Dle předběžných výpočtů přijaty meze: $1^0\ 44'\ 10{\cdot}042''\leqq\frac{\varphi}{2}\leqq 90^0$.

Provedeme integrace dle z a přejdeme zpět k proměnné φ; při tom značíme pro krátkost:

$$\cos\frac{\varphi_2}{2}-\cos\frac{\varphi_1}{2}=A\,;\quad l\frac{tg\,\frac{\varphi_2}{4}}{tg\,\frac{\varphi_1}{4}}=B\,;\quad \frac{\cos\frac{\varphi_2}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_2}{2}}-\frac{\cos\frac{\varphi_1}{2}}{\sin^2\frac{\varphi_1}{2}}=C\,;$$

$$\frac{\cos\frac{\varphi_2}{2}}{\sin^4\frac{\varphi_2}{2}}-\frac{\cos\frac{\varphi_1}{2}}{\sin^4\frac{\varphi_1}{2}}=D\,;\quad \frac{\cos\frac{\varphi_2}{2}}{\sin^6\frac{\varphi_2}{2}}-\frac{\cos\frac{\varphi_1}{2}}{\sin^6\frac{\varphi_1}{2}}=E\,;$$

$$\frac{\cos\frac{\varphi_2}{2}}{\sin^8\frac{\varphi_2}{2}}-\frac{\cos\frac{\varphi_1}{2}}{\sin^8\frac{\varphi_1}{2}}=F\,;\quad \frac{\cos\frac{\varphi_2}{2}}{\sin^{10}\frac{\varphi_2}{2}}-\frac{\cos\frac{\varphi_1}{2}}{\sin^{10}\frac{\varphi_1}{2}}=G.$$

$\frac{1}{4}f(\varphi_1, \varphi_2, x)$ můžeme psáti ve tvaru $a'A+b'B+c'C+d'D+e'E+f'F+g'G$. Koeficienty $a', \ldots g'$ rozvineme dle rostoucích mocnin x a podržíme vhodný počet členů. Na př. koeficient u F jest

$$-\frac{35}{512}\frac{x^9}{(1-x^2)^{9/2}}-\frac{315}{1024}\frac{x^{10}}{(1-x^2)^{11/2}}-\frac{63}{10240}\frac{x^{11}}{(1-x^2)^{11/2}}$$

$$+\varepsilon\left\{-\frac{35}{512}\frac{x^9}{(1-x^2)^{9/2}}-\frac{63}{10240}\frac{x^{11}}{(1-x^2)^{11/2}}\right\}=-\frac{35}{512}x^9-\frac{315}{1024}x^{10}+m_7,$$

$$+\frac{1}{10^{24}}2{\cdot}2395<m_7'<+\frac{1}{10^{23}}8{\cdot}5341,\quad -\frac{1}{10^{35}}4{\cdot}3781<m_7''<+\frac{1}{10^{33}}7{\cdot}4210.$$

Celkem jest

$$\frac{1}{4}f(\varphi_1, \varphi_2, x)=(A+B)\,[2x+5x^2+9x^3]+B\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{45}{8}x^4\right]$$

$$+C\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{15}{8}x^4+\frac{711}{160}x^5\right]+D\left[-\frac{3}{16}x^5-\frac{25}{32}x^6\right]$$

$$+E\left[\frac{5}{48}x^7+\frac{175}{384}x^8\right]+F\left[-\frac{35}{512}x^9-\frac{315}{1024}x^{10}\right]+A\,m_1$$

$$+(A+B)\,m_2+B\,m_3+C\,m_4+D\,m_5+E\,m_6+F\,m_7+G\,m_8\,;$$

$$+\frac{1}{10^8}2{\cdot}0419<m_1'<+\frac{1}{10^5}1{\cdot}0762,\quad -\frac{1}{10^{14}}3{\cdot}0420<m_1''<+\frac{1}{10^{11}}1{\cdot}1878$$

pro menší vzdálenosti,¹)

$$+\frac{1}{10^8}2{\cdot}0394<m_1'<+\frac{1}{10^8}5{\cdot}5240,\quad -\frac{1}{10^{14}}3{\cdot}0420<m_1''<+\frac{1}{10^{11}}1{\cdot}1878$$

pro větší vzdálenosti,²)

---

¹) Dle předběžných výpočtů přijaty meze: $1^0\,44'\,10{\cdot}042'' \leqq \frac{\varphi}{2} \leqq 4^0\,4'\,18{\cdot}24''$.

²) $4^0\,4'\,18{\cdot}24'' \leqq \frac{\varphi}{2} \leqq 90^0$.

$$-\frac{1}{10^8}\,2{\cdot}3720 < m_2' < +\frac{1}{10^7}\,6{\cdot}2630,\ -\frac{1}{10^{11}}\,5{\cdot}2045 < m_2'' < +\frac{1}{10^{10}}\,1{\cdot}2646,$$

$$-\frac{1}{10^9}\,1{\cdot}8459 < m_3' < -\frac{1}{10^{10}}\,5{\cdot}5347,\ -\frac{1}{10^{14}}\,4{\cdot}8373 < m_3'' < +\frac{1}{10^{16}}\,6{\cdot}2801,$$

$$+\frac{1}{10^{12}}\,1{\cdot}5010 < m_4' < +\frac{1}{10^{11}}\,2{\cdot}3685,\ -\frac{1}{10^{18}}\,3{\cdot}9324 < m_4'' < +\frac{1}{10^{17}}\,7{\cdot}6009,$$

$$+\frac{1}{10^{15}}\,7{\cdot}1085 < m_5' < +\frac{1}{10^{14}}\,4{\cdot}0836,\ -\frac{1}{10^{23}}\,6{\cdot}9176 < m_5'' < +\frac{1}{10^{20}}\,1{\cdot}5785,$$

$$-\frac{1}{10^{19}}\,8{\cdot}5188 < m_6' < -\frac{1}{10^{20}}\,5{\cdot}0125,\ -\frac{1}{10^{27}}\,5{\cdot}0033 < m_6'' < +\frac{1}{10^{29}}\,3{\cdot}8828,$$

$$+\frac{1}{10^{24}}\,2{\cdot}2395 < m_7' < +\frac{1}{10^{23}}\,8{\cdot}5341,\ -\frac{1}{10^{35}}\,4{\cdot}3781 < m_7'' < +\frac{1}{10^{33}}\,7{\cdot}4210,$$

$$-\frac{1}{10^{23}}\,1{\cdot}4237 < m_8' < -\frac{1}{10^{24}}\,1{\cdot}0743,\ -\frac{1}{10^{33}}\,1{\cdot}1721 < m_8'' < +\frac{1}{10^{38}}\,6{\cdot}7327.$$

Násobitel $\frac{\varrho''}{a_s}\,k\,h_0\,(\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1)\,\frac{r+v_s}{4}$ se rovná

$$\frac{3}{4}\,\frac{\varrho''}{\pi}\,\frac{h_0}{h_m}\,(\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1)\,.\,\frac{1}{4}\,\frac{1+2q}{1-4q}.$$

(Dosadili jsme $a_s \doteq g_0\left(1 - \frac{2\,v_s}{r}\right)$, $g_0 \doteq \frac{4}{3}\,\pi\,r\,h_m\,k$, a zavedli označení $\frac{v_s}{2\,r} = q$; h_m je střední hustota země.)

Zavedeme ještě označení

$$p = \frac{H}{2\,r},\quad \pi' = \frac{v}{2\,r},\quad -\frac{v'}{2\,r},\quad \frac{0}{2\,r}.$$

Pak

$$x_1 = \frac{-(p+q)}{1-p+q},\quad x_{2,3,4} = \frac{\pi'-q}{1+\pi'+q}.$$

x, $x^2, \ldots$ x^{10} rozvineme v řady postupující dle mocnin p, q (π', q). V činiteli u $(A+B)$ podržíme členy třetího stupně, u B čtvrtého, u C pátého, u D šestého, u E osmého stupně, u F jen členy p^9, $p^8 q$, p^{10}, $p^9 q$ ($\pi^{\,9}$, $\pi'^8 q$, π'^{10}, $\pi'^9 q$).

Na př. v činiteli u C dosazujeme pro $x = x_1$:

$$x^3 = -(p+q)^3 - 3\,(p+q)^3\,(p-q) - 6\,(p+q)^3\,(p-q)^2 - z\,b_3,$$
$$+\frac{1}{10^{12}}\,4{\cdot}1047 < z\,b_3 < +\frac{1}{10^{11}}\,1{\cdot}1452,$$

$$x^4 = (p+q)^4 + 4\,(p+q)^4\,(p-q) + z\,b_4,\quad +\frac{1}{10^{12}}\,4{\cdot}2110 < z\,b_4 < +\frac{1}{10^{11}}\,1{\cdot}3016,$$

$$x^5 = -(p+q)^5 - z\,\bar{b}_5,\quad +\frac{1}{10^{12}}\,2{\cdot}1239 < z\,\bar{b}_5 < +\frac{1}{10^{12}}\,7{\cdot}5474;$$

pro $x = x_2, x_3, x_4$:

$$x^3 = (\pi' - q)^3 - 3(\pi' - q)^3 (\pi' + q) + 6(\pi' - q)^3 (\pi' + q)^2 + z b_3'$$

$$-\frac{1}{10^{18}} 5{\cdot}8820 < z b_3' < +\frac{1}{10^{17}} 4{\cdot}6925,$$

$$x^4 = (\pi' - q)^4 - 4(\pi' - q)^4 (\pi' + q) + z b_4', \qquad 0 \leqq z b_4' < +\frac{1}{10^{17}} 4{\cdot}9825,$$

$$x^5 = (\pi' - q)^5 + z b_5', \quad -\frac{1}{10^{17}} 1{\cdot}3294 < z b_5' < +\frac{1}{10^{17}} 2{\cdot}6437.$$

Meze zbytků rozvojů pro $x = x_1$, byly počítány přesně. Počítáno minimum a maximum, kterých zbytek dosahuje. — Pro $x = x_2, x_3, x_4$ byl rozveden jmenovatel výrazu x^n, určeno minimum m a maximum M zbytku rozvoje, a jako dolní (horní) mez bylo vypočteno nejmenší (největší) z čísel: $m \,.\, min\,(\pi' - q)^n$, $m \,.\, max\,(\pi' - q)^n$, $M \,.\, min\,(\pi' - q)^n$, $M \,.\, max\,(\pi' - q)^n$.

Pro pevninové obory bylo nutno vypočísti výraz:

$$\left[\left(\frac{\pi'}{p} - \frac{\pi'^2}{p^2}\right)\frac{1}{4} f(\varphi_1, \varphi_2, x_1) + \left(1 - \frac{\pi'}{p} + \frac{\pi'^2}{p^2}\right)\frac{1}{4} f(\varphi_1, \varphi_2, x_2)\right] \frac{1 + 2q}{1 - 4q}.$$

V činitelích u B, D, E, F klademe $\frac{1 + 2q}{1 - 4q} = 1 + 6q + Zb'$, $0 \leqq Zb' < +\frac{1}{10^5} 1{\cdot}2007$, v činitelích u $(A + B)$, C klademe $\frac{1 + 2q}{1 - 4q}$ $= 1 + 6q + 24q^2 + Zb''$, $0 \leqq Zb'' < +\frac{1}{10^8} 3{\cdot}3922$.

Byly podrženy jen hlavní členy. Pro zanedbané členy vypočteny meze. (V jednoduchých případech přesně, v složitých dle pravidel:

Minimum (maximum) součtu je větší (menší) nebo rovno součtu minim (maxim) jednotlivých sčítanců. — Značí-li (m', M'), (m'', M'') minimum a maximum výrazů v_1, v_2, je minimum (maximum) součinu $v_1 v_2$ větší (menší) nebo rovno nejmenšímu (největšímu) z čísel $m' \,.\, m''$, $m' \,.\, M''$, $M' \,.\, m''$, $M' \,.\, M''$).

Tak bylo vypočteno

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\pi'}{p} - \frac{\pi'^2}{p^2}\right)\frac{1}{4} f(\varphi_1, \varphi_2, x_1) + \left(1 - \frac{\pi'}{p} + \frac{\pi'^2}{p^2}\right)\frac{1}{4} f(\varphi_1, \varphi_2, x_2)\right] \frac{1 + 2q}{1 - 4q} \\
&= (A + B)\left\{\left(3\pi' p - \pi' p^2 - 3\frac{\pi'^3}{p} + 2\frac{\pi'^3}{p^2}\right) + q(3\pi' p) - 2q - 5q^2 - 27q^3\right\} \\
&+ B\left\{\left(-\frac{1}{2}\pi' p^2 + \frac{33}{8}\pi' p^3 + \frac{1}{2}\pi'^2 p\right) + q\left(-\frac{3}{2}\pi' p\right) - \frac{1}{2}q^3 + \frac{33}{8}q^4\right\} \\
&\qquad + C\left\{\left(-\frac{1}{2}\pi' p^2 + \frac{3}{8}\pi' p^3 + \frac{1}{2}\pi'^2 p - \frac{3}{8}\pi'^2 p^2 + \frac{1}{2}\pi'^3\right)\right. \\
&\qquad\quad \left. + q\left(-\frac{3}{2}\pi' p + \frac{3}{2}\pi' p^2 + \frac{3}{2}\frac{\pi'^3}{p}\right) - \frac{1}{2}q^3 + \frac{3}{8}q^4 - \frac{1071}{160}q^5\right\} \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$+D\left\{\left(\frac{3}{16}\pi' p^4+\frac{5}{32}\pi' p^5-\frac{3}{16}\pi'^2 p^3\right)+q\left(\frac{15}{16}\pi' p^3-\frac{15}{16}\pi'^2 p^2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{3}{16}q^5-\frac{19}{32}q^6\right\}$$

$$+E\left\{\left(-\frac{5}{48}\pi' p^6+\frac{5}{48}\pi'^2 p^5\right)+q\left(-\frac{35}{48}\pi' p^5\right)-\frac{5}{48}q^7+\frac{215}{384}q^8\right\}$$

$$+F\left\{\left(\frac{35}{512}\pi' p^8\right)+q\left(\frac{315}{512}\pi' p^7\right)\right\}$$

$$+A\,l_1+(A+B)\,l_2+B\,l_3+C\,l_4+D\,l_5+E\,l_6+F\,l_7+G\,l_8;$$

$$-\frac{1}{10^7}\,8{\cdot}432<l_1<+\frac{1}{10^7}\,6{\cdot}441 \text{ (pro menší}^{1)}\text{ vzdálenosti),}$$

$$-\frac{1}{10^9}\,4{\cdot}328<\overline{l_1}<+\frac{1}{10^9}\,3{\cdot}319 \text{ (pro větší}^{2)}\text{ vzdálenosti)}$$

$$-\frac{1}{10^8}\,5{\cdot}454<l_2<+\frac{1}{10^8}\,5{\cdot}166,\quad -\frac{1}{10^9}\,1{\cdot}436<l_3<+\frac{1}{10^9}\,1{\cdot}005,$$

$$-\frac{1}{10^{11}}\,2{\cdot}976<l_4<+\frac{1}{10^{11}}\,1{\cdot}194,\quad -\frac{1}{10^{14}}\,7{\cdot}650<l_5<+\frac{1}{10^{14}}\,6{\cdot}373,$$

$$-\frac{1}{10^{17}}\,1{\cdot}019<l_6<+\frac{1}{10^{17}}\,1{\cdot}434,\quad -\frac{1}{10^{21}}\,2{\cdot}335<l_7<+\frac{1}{10^{21}}\,1{\cdot}422,$$

$$-\frac{1}{10^{25}}\,8{\cdot}520<l_8<+\frac{1}{10^{24}}\,1{\cdot}116.$$

Pokud $\frac{\varphi}{2} \geqq 4^0\,29'$,³) budeme psáti:

$$\left[\left(\frac{\pi'}{p}-\frac{\pi'^2}{p^2}\right)\frac{1}{4}f(\varphi_1,\varphi_2,x_1)+\left(1-\frac{\pi'}{p}+\frac{\pi'^2}{p^2}\right)\frac{1}{4}f(\varphi_1,\varphi_2,x_2)\right]\frac{1+2q}{1-4q}$$

$$=(A+B)\left\{\left(3\pi' p-\pi' p^2-3\frac{\pi'^3}{p}+2\frac{\pi'^3}{p^2}\right)+q\,(3\pi' p)-2q-5q^2-27q^3\right\}$$

$$-(B+C)\left\{\left[\frac{\pi'}{2}p\left(p-\frac{3}{4}p^2\right)-\frac{\pi'^2 p}{2}\right]+q\left(\frac{3}{2}\pi' p\right)\right\}+B\left(-\frac{1}{2}q^3+\frac{33}{8}q^4\right) \quad (3)$$

$$+C\left(-\frac{1}{2}q^3+\frac{3}{8}q^4-\frac{1071}{160}q^5\right)+D\left(\frac{3}{16}q^5-\frac{19}{32}q^6\right)$$

$$+E\left(-\frac{5}{48}q^7+\frac{215}{384}q^8\right)$$

$$+A\,l_1+(A+B)\,l_2+B\,l_3'+C\,l_4'+D\,l_5'+E\,l_6'+F\,l_7'+G\,l_8,$$

$$-\frac{1}{10^9}\,3{\cdot}936<l_3'<+\frac{1}{10^9}\,3{\cdot}192,\quad -\frac{1}{10^{10}}\,2{\cdot}685<l_4'<+\frac{1}{10^{10}}\,1{\cdot}758,$$

$$-\frac{1}{10^{12}}\,1{\cdot}910<l_5'<+\frac{1}{10^{12}}\,1{\cdot}495,\quad -\frac{1}{10^{16}}\,1{\cdot}026<l_6'<+\frac{1}{10^{16}}\,1{\cdot}284,$$

$$-\frac{1}{10^{20}}\,1{\cdot}051<l_7'<+\frac{1}{10^{21}}\,8{\cdot}575.$$

---

¹) **$1^0\,44'\,10{\cdot}042'' < \frac{\varphi}{2} \leqq 4^0\,4'\,18{\cdot}24''$.**

²) **$4^0\,4'\,18{\cdot}24'' < \frac{\varphi}{2} \leqq 90^0$.**

³) Důvod je vyložen ve 4. odstavci.

V případě pevninových oborů můžeme tedy při stálém p a pro určitá φ_1, φ_2, λ_1, λ_2 psáti $\overline{o''}$ jako funkci π', q (shrneme zvláště členy závisící jen na proměnné q):

$$\overline{o''} = f_1 \,.\, \sigma\,(\pi',\ q,\ p) + f_1 \,.\, \sigma_1\,(q) + f_1\, ch,$$

$$f_1 \doteq \frac{3}{4}\,\frac{\varrho''}{\pi}\,\frac{h_0}{h_m}\,(\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1), \quad \pi' = \frac{v}{2\,r},$$

$$-\,a < f_1\, ch = f_1\,(A\,l_1 + (A+B)\,l_2 + \ldots + G\,l_8) < +\,b;$$

význam zkratek $\sigma\,(\pi',\ q,\ p)$, $\sigma_1\,(q)$ a čísel $-\,a$, $+\,b$ je patrný.

V případě mořských oborů jest:

$$\overline{o''} = \frac{h_0 - h'}{h_0} f_1 \sigma\,(\pi',\ q,\ p) + \left(1 - \frac{h'}{h_0}\right) f_1 \,.\, \sigma_1\,(q) + \left(1 - \frac{h'}{h_0}\right) f_1\, ch'$$

$$+ \frac{h'}{h_0} f_1\,[\sigma_1\,(q) + ch''],$$

$$\pi' = -\,\frac{\vartheta'}{2\,r}, \quad -\,a < f_1\, ch',\ f_1\, ch'' < +\,b.$$

$$\overline{o''} = \frac{h_0 - h'}{h_0} f_1 \,.\, \sigma\,(\pi',\ q,\ p) + f_1 \,.\, \sigma_1\,(q) + f_1\,\overline{ch}, \quad -\,a < f_1\,\overline{ch} < +\,b.$$

4. *Volba veličin* λ, φ.

Úhel λ počítáme kladně ve směru pohybu hodinových ručiček od severu nebo od východu dle toho, chceme-li určiti tížnicovou odchylku v meridiánu nebo v prvním vertikálu. Pro počáteční směr klademe $\lambda_1 = 0$. Ostatní λ jsou určena tak, aby v 1. a 4. (2. a 3.) kvadrantu bylo

$$\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1 = +\,\tfrac{1}{8},\ (-\,\tfrac{1}{8}).$$

Hodnota $\sigma_1\,(q)$ je pro každý obor téhož prstenu (mezi stejnými φ_1, φ_2) stejná. Tedy součet hodnot $(\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1)\ \sigma_1\ (q)$ pro všechny obory mezi stejnými φ_1, φ_2 je roven 0.

Budeme uvažovati pro pevninové obory odchylku $\overline{o_1''}$ danou výrazem

$$\overline{o_1''} = f_1 \,.\, \sigma\,(\pi',\ q,\ p),$$

pro mořské obory výrazem

$$\overline{o_1''} = \frac{h_0 - h'}{h_0} f_1 \,.\, \sigma\,(\pi',\ q,\ p).$$

Pokud $\frac{\varphi}{2} \geqq 4^0\, 29'$, byly určovány úhly φ tak, aby

$$|\,f_1\,(A\,l_1 + (A+B)\,l_2 + B\,l_3' + C\,l_4' + D\,l_5' + E\,l_6' + F\,l_7' + G\,l_8)\,| < \frac{1''}{10^4};$$

$\Big($pro $\frac{\varphi}{2} \geqq 4^0\, 29'$ užije se při výpočtu odchylky $\overline{o_1''}$ vzorce [3]$\Big)$.

Má tedy býti

$$|\,A\,l_1 + (A+B)\,l_2 + B\,l_3' + C\,l_4' + D\,l_5' + E\,l_6' + F\,l_7' + G\,l_8\,| < \frac{1}{10^8}\, 3{\cdot}285.^{1)}$$

---

1) $h_0 = 2{\cdot}73$, $h_m = 5{\cdot}52$, $h' = 1{\cdot}03$.

Na př. pro $\varphi_2 = 180^0$ a $\varphi_1 = 60^0\,30'$ jest

$$A\,l_1 + (A+B)\,l_2 + B\,l_3' + C\,l_4' + D\,l_5' + E\,l_6' + F\,l_7' + G\,l_8 \geqq - \frac{3{\cdot}289}{10^8};$$

volíme-li $\varphi_1 = 60^0\,40'$, jest

$$-\frac{1}{10^8}\,3{\cdot}276 \leqq A\,l_1 + (A+B)\,l_2 + B\,l_3' + C\,l_4' + D\,l_5' + E\,l_6' + F\,l_7' + G\,l_8 \leqq + \frac{1}{10^8}\,3{\cdot}170;$$

tedy v tomto případě jest absolutní hodnota chyby $f_1\,ch$ ($f_1\,\overline{ch}$) jistě menší než $\frac{1''}{10^4}$.

Tak (zkusmo) byly určeny postupně hodnoty

$$\varphi = 60^0\,40',\ 33^0\,20',\ 20^0\,30',\ 14^0\,30',\ 11^0\,36',\ 10^0\,00',\ 8^0\,58'.$$

Obory, které tak vznikají, jsou s počátku velmi rozlehlé. Je na snadě myšlenka, že odchylka $\overline{o_1}''$ vypočtená za předpokladu, že hmota sahá v celém oboru všude do střední výšky oboru, by se mohla značně lišiti od správné odchylky (vypočtené způsobem, který by bral zřetel k skutečnému tvaru povrchu). — Dalo by se ukázati, že lze obory O rozděliti na menší obory (tím se přiblížíme skutečnému tvaru povrchu) a že při tom výpočty zůstávají jednoduchými.

Pro $\frac{\varphi}{2} < 4^0\,29'$ by se rozdíly $\varphi_2 - \varphi_1$, vypočtené vyloženým způsobem, velmi rychle zmenšovaly. Počet prstenů by vzrostl. Odtud tedy musíme při výpočtu odchylky $\overline{o_1}''$ užíti přesnějšího vzorce (2).

Kdybychom však v tomto případě rozdělili některý obor O v menší, byl by výpočet příslušné odchylky složitý.

K určení dalších úhlů φ vedla tato úvaha: Pro $\frac{\varphi_1}{2} = 1^0\,45'$ bylo vypočteno $\frac{\varphi_2}{2}$ ($= 1^0\,51'$) tak, že

$$|f_1\,(A\,l_1 + (A+B)\,l_2 + B\,l_3 + C\,l_4 + D\,l_5 + E\,l_6 + F\,l_7 + G\,l_8)| < \frac{1''}{10^4}.$$

Část kulového pásu omezenou na kouli K_1 (střed C_z, poloměr r) oblouky kružnic, v nichž protínají kouli K_1 roviny R_1, R_2 (procházející body C_z, S a odchýlené od R_0 o $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$) a kužele K_1', K_2' (osa $C_z\,S$, úhly osových řezů $2\varphi = 2\varphi_1$, $2\varphi_2$) rozpůlíme (části P_1, P_2) kružnicí, v níž je koule K_1 protata kuželem K_s' (osa $C_z\,S$, úhel osového řezu $2\varphi = 2\varphi_s$, φ_s plyne z rovnice $\cos\varphi_s = \frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2}{2}$).

Myslíme si dvojí velmi nepříznivé rozložení hmoty:

1. Nad plochou P_1 sahá povrch země do výšky 7 *km* nad hladinou moře a pod plochou P_2 je hloubka moře 8 *km*.

2. Pod plochou P_1 je hloubka moře 8 *km* a nad plochou P_2 sahá povrch země do výšky 7 *km* nad hladinou moře.

Vypočteme v prvním i druhém případě odchylku $\overline{o_1}''$, rozdíl obou hodnot označíme písmenem Δ. Při tom klademe $H = 120$ *km*.

Pro $\frac{\varphi_1}{2} = 1^0\,45'$, $\frac{\varphi_2}{2} = 1^0\,51'$, jest rozdíl $\Delta = \frac{1}{10^3}\,1{\cdot}0168''$.

Vyjdeme od hodnoty $\frac{\varphi_2}{2} = 4^0\,29'$ a hledáme takové $\frac{\varphi_1}{2}$, aby příslušný rozdíl Δ byl $\leqq \frac{1}{10^3}\,1{\cdot}0168''$. Volíme-li $\frac{\varphi_1}{2} = 4^0\,04'$, je příslušné $\Delta = \frac{1}{10^3}\,0{\cdot}9946''$; volíme-li $\frac{\varphi_1}{2} = 4^0\,03'$, je $\Delta = \frac{1}{10^3}\,1{\cdot}0818''$. Tedy hledané $\frac{\varphi_1}{2}$ je rovno $4^0\,04'$, $\varphi_1 = 8^0\,08'$.

Tak (zkusmo) byly postupně vypočteny ostatní hodnoty φ (srov. tab. hodnot φ).

Při tom je pro všechny prsteny splněna podmínka

$$|f_1\,[A\,l_1 + (A + B)\,l_2 + B\,l_3 + C\,l_4 + D\,l_5 + E\,l_6 + F\,l_7 + G\,l_8]| < \frac{1''}{10^4}.$$

Pro $\frac{\varphi}{2} > 4^0\,29'$ nemohl býti tento způsob výpočtu dodržen, protože by rozdíly $\varphi_2 - \varphi_1$ byly značně menší než dle dřívějšího způsobu; počet prstenů by se značně zvětšil.

Tabulka hodnot φ a příslušných oblouků $\frac{\pi\,r}{180}\cdot\varphi^0$ (v *km*).
($r = 6371{\cdot}2$ *km*)

Prsten	φ	Oblouk	Prsten	φ	Oblouk
1	180^0	20015·7	11	$6^0\,48'$	756·15
2	$60^0\,40'$	6746·0	12	6 16	696·84
3	33 20	3706·6	13	5 48	644·95
4	20 30	2279·6	14	5 24	600·47
5	14 30	1612·4	15	5 02	559·70
6	11 36	1289·9	16	4 42	522·63
7	10 00	1112·0	17	4 24	489·27
8	8 58	997·08	18	4 08	459·62
9	8 08	904·42	19	3 54	433·67
10	7 26	826·58	20	3 42	411·43
	6 48	756·15		3 30	389·20

5. *Vliv hlavních chyb.*

Při výpočtu chyb, kterými jsou zatíženy vzorce (2), (3) jsme považovali rovnici

$$a_s = \frac{4}{3}\pi r h_m k\left(1 - \frac{2v_s}{r}\right) \tag{4}$$

a vzorce pro hustotu:

$$h_v = h_0\left(1 - \frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2}\right), \quad h_{\cdot v'} = h' + (h_0 - h')\left(1 + \frac{v'}{H} + \frac{v'^2}{H^2}\right)$$

za přesně správné.

Předpokládáme-li, že největší možná chyba rovnice (4) je 1%, a je-li největší možná chyba v číslech, která píšeme místo podílů $\frac{h_0}{h_m}$, $\frac{h_0 - h'}{h_m}$ asi 7%,[1]) byla by největší možná chyba ve vypočtené odchylce o_1'', zaviněná těmito dvěma nepřesnostmi, asi 8%.

Chyba Ch (Ch'), která vzniká v tížnicové odchylce vypočtené se zřetelem k isostasii zanedbáváním dalších členů ve vzorcích pro hustotu, je veliká.

Uvažujeme vzorce (a), (b), které se dají psáti

$$h_v = h_0\left[1 - \frac{v}{H} + \frac{v^2}{H^2} + \chi(v)\right], \quad h_{\cdot v'} = h' + (h_0 - h')\left[1 + \frac{v'}{H} + \frac{v'^2}{H^2} + \chi'(v')\right].$$

Pro pevninové obory jest (srov. odstavec 3., str. 7)

$$|Ch| = \frac{\varrho''}{a_s} k h_0 |\chi(v)(\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1)| \frac{r + v_s}{4} \int_{x_1}^{x_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(1+x)^3 \sin^2\varphi\, d\varphi\, dx}{(1-x)^2 \sin^3\frac{\varphi}{2}\left[1 + x^2\cot^2\frac{\varphi}{2}\right]^{3/2}}.$$

Pro mořské obory:

$$|Ch'| = \frac{\varrho''}{a_s} k (h_0 - h')|\chi'(v')(\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1)| \frac{r + v_s}{4} \int_{x_1}^{x_3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(1+x)^3 \sin^2\varphi\, d\varphi\, dx}{(1-x)^2 \sin^3\frac{\varphi}{2}\left[1 + x^2\cot^2\frac{\varphi}{2}\right]^{3/2}}.$$

Protože

$$\frac{1}{10}\, 8\cdot3027 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sin^3\frac{\varphi}{2}} \int_{x_1}^{x_2(x_3)} \frac{(1+x)^3\, dx}{(1-x)^2} < J$$

$$= \int_{x_1}^{x_2(x_3)}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(1+x)^3 \sin^2\varphi\, d\varphi\, dx}{(1-x)^2 \sin^3\frac{\varphi}{2}\left[1 + x^2\cot^2\frac{\varphi}{2}\right]^{3/2}} < \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sin^3\frac{\varphi}{2}} \int_{x_1}^{x_2(x_3)} \frac{(1+x)^3\, dx}{(1-x)^2},$$

$$\frac{1}{10}\, 8\cdot3027 \,.\, 8(A + B) \,.\, \frac{1}{10^3}\, 7\cdot1910 < J < 8(A + B) \,.\, \frac{1}{10^2}\, 1\cdot1266,$$

jest

$$(A + B)\, 36\cdot350 < \frac{|Ch|}{|\chi(v)|} < (A + B)\, 68\cdot883,$$

$$(A + B)\, 22\cdot635 < \frac{|Ch'|}{|\chi'(v')|} < (A + B)\, 42\cdot895.$$

---

[1]) Hayford, citov. práce, str. 128.

Je patrno, že

$$|Ch| > 36{\cdot}350\,(A + B)\,|\chi\,(v)|, \qquad |Ch'| > 22{\cdot}635\,(A + B)\,|\chi'\,(v')|.$$

V případě méně přesných vzorců (*a*) jest

$$-\frac{1}{10^4}\,5{\cdot}063 < \chi\,(v) \leq 0, \qquad 0 \leq \chi'\,(v') < +\frac{1}{10^4}\,8{\cdot}265.$$

Největší hodnota $(A + B)$ jest $\frac{1}{10}\,5{\cdot}206$.

Pro krajní hodnoty jest

$$36{\cdot}350\,(A + B)\,|\chi\,(v)| = \frac{1}{10^3}\,9{\cdot}581, \qquad 22{\cdot}635\,(A + B)\,|\chi'\,(v')| = \frac{1}{10^3}\,9{\cdot}739.$$

Podobně v případě vzorců (*b*) jest

$$-\frac{1}{10^3}\,1{\cdot}826 < \chi\,(v) \leq 0, \qquad 0 \leq \chi'\,(v') < +\frac{1}{10^3}\,2{\cdot}575.$$

Pro krajní hodnoty jest

$$36{\cdot}350\,(A + B)\,|\chi\,(v)| = \frac{1}{10^2}\,3{\cdot}455, \qquad 22{\cdot}635\,(A + B)\,|\chi'\,(v')| = \frac{1}{10^2}\,3{\cdot}034.$$

Největší hodnota tížnicové odchylky pro uvažované obory (počítaná dle vzorce (3)) jest $\frac{1}{10^2}\,3{\cdot}1''$. — Chyba vzniklá vlivem zanedbaných členů hustoty může dosáhnouti hodnot větších, než je celá vypočtená hodnota odchylky.

6. Abychom číselně odůvodnili tvrzení vyslovené na konci úvodu (odst. 1.), byla vypočtena (stejně jako v odstavci 3. pro hustotu danou vzorci (1)) tížnicová odchylka za předpokladu, že hustota je dána přesnějšími vzorci (*a*), (b_1).

Vyjdeme-li od vzorců (*a*) (při tom jest absolutní hodnota chyby *Ch* (*Ch'*) vzniklé zanedbáním dalších členů ve vzorcích pro hustotu

$$|Ch| < (A + B)\,.\,68{\cdot}883\,.\,\frac{3{\cdot}390}{10^6} \doteq \frac{1}{10^4}\,1{\cdot}216,$$

$$\left[|Ch'| < (A + B)\,.\,42{\cdot}895\,\frac{6{\cdot}831}{10^6} \doteq \frac{1}{10^4}\,1{\cdot}526\right],$$

dojdeme k vzorci:

$$\begin{aligned}\frac{o_1''}{f_1} = {} & (A + B)\,\{(3\,\pi'\,p - \pi'\,p^2) + q\,(3\,\pi'\,p)\} \\ & + B\left\{\left(-\frac{1}{2}\,\pi'\,p^2 + \frac{33}{8}\,\pi'\,p^3 + \frac{1}{2}\,\pi'^2\,p\right) + q\left(-\frac{3}{2}\,\pi'\,p\right)\right\} \\ & + C\left\{\left(-\frac{1}{2}\,\pi'\,p^2 + \frac{3}{8}\,\pi'\,p^3 + \frac{1}{2}\,\pi'^2\,p - \frac{3}{8}\,\pi'^2\,p^2\right) + q\left(-\frac{3}{2}\,\pi'\,p + \frac{3}{2}\,\pi'\,p^2\right)\right\} \\ & + D\left\{\left(\frac{3}{16}\,\pi'\,p^4 + \frac{5}{32}\,\pi'\,p^5 - \frac{3}{16}\,\pi'^2\,p^3\right) + q\left(\frac{15}{16}\,\pi'\,p^3 - \frac{15}{16}\,\pi'^2\,p^2\right)\right\} \quad (2a)\end{aligned}$$

$$+E\left\{\left(-\frac{5}{48}\pi' p^6+\frac{5}{48}\pi'^2 p^5\right)+q\left(-\frac{35}{48}\pi' p^5\right)\right\}$$

$$+F\left\{\left(\frac{35}{512}\pi' p^8\right)+q\left(\frac{315}{512}\pi' p^7\right)\right\}$$

$$+At_1'+(A+B)t_2'+Bt_3'+Ct_4'+Dt_5'+Et_6'+Ft_7'+Gt_8',$$

$$-\frac{1}{10^7}\,8{\cdot}477<t_1'<+\frac{1}{10^7}\,6{\cdot}467 \text{ (pro menší 1) vzdálenosti)},$$

$$-\frac{1}{10^9}\,4{\cdot}351<t_1'<+\frac{1}{10^9}\,3{\cdot}332 \text{ (pro větší 2) vzdálenosti)},$$

$$-\frac{1}{10^8}\,8{\cdot}516<t_2'<+\frac{1}{10^8}\,6{\cdot}068,\quad -\frac{1}{10^9}\,1{\cdot}278<t_3'<+\frac{1}{10^{10}}\,9{\cdot}029,$$

$$-\frac{1}{10^{11}}\,1{\cdot}707<t_4'<+\frac{1}{10^{11}}\,1{\cdot}063,\quad -\frac{1}{10^{14}}\,8{\cdot}321<t_5'<+\frac{1}{10^{14}}\,6{\cdot}777,$$

$$-\frac{1}{10^{17}}\,1{\cdot}050<t_6'<+\frac{1}{10^{17}}\,1{\cdot}482,\quad -\frac{1}{10^{21}}\,2{\cdot}377<t_7'<+\frac{1}{10^{21}}\,1{\cdot}448,$$

$$-\frac{1}{10^{25}}\,8{\cdot}555<t_8'<+\frac{1}{10^{24}}\,1{\cdot}122.$$

Vyjdeme-li od vzorců (b_1) (při tom jest

$$|Ch|<(A+B)\,.\,68{\cdot}883\,.\,\frac{6{\cdot}077}{10^5}\doteq\frac{1}{10^3}\,2{\cdot}180,$$

$$|Ch'|<(A+B)\,.\,42{\cdot}895\,.\,\frac{8{\cdot}911}{10^5}\doteq\frac{1}{10^3}\,1{\cdot}990),$$

dojdeme k vzorci:

$$\frac{\overline{o}_1''}{t_1}=(A+B)\left\{\left(-\pi' p+5\pi' p^2+\frac{4\pi'^3}{p}\right)+q(-\pi' p)\right\}$$

$$+B\left\{\left(-\frac{1}{2}\pi' p^2+\frac{25}{8}\pi' p^3+\frac{1}{2}\pi'^2 p\right)+q\left(-\frac{3}{2}\pi' p\right)\right\} \qquad (2b)$$

$$+C\left\{\left(-\frac{1}{2}\pi' p^2-\frac{5}{8}\pi' p^3+\frac{1}{2}\pi'^2 p+\frac{5}{8}\pi'^2 p^2\right)+q\left(-\frac{3}{2}\pi' p-\frac{3}{2}\pi' p^2\right)\right\}$$

$$+D\left\{\left(+\frac{3}{16}\pi' p^4+\frac{17}{32}\pi' p^5-\frac{3}{16}\pi'^2 p^3\right)+q\left(\frac{15}{16}\pi' p^3-\frac{15}{16}\pi'^2 p^2\right)\right\}$$

$$+E\left\{\left(-\frac{5}{48}\pi' p^6+\frac{5}{48}\pi'^2 p^5\right)+q\left(-\frac{35}{48}\pi' p^5\right)\right\}$$

$$+F\left\{\left(\frac{35}{512}\pi' p^8\right)+q\left(\frac{315}{512}\pi' p^7\right)\right\}$$

$$+At_1''+(A+B)t_2''+Bt_3''+Ct_4''+Dt_5''+Et_6''+Ft_7''+Gt_8'',$$

$$-\frac{1}{10^7}\,8{\cdot}623<t_1''<+\frac{1}{10^7}\,6{\cdot}578 \text{ (pro menší 1) vzdálenosti)},$$

$$-\frac{1}{10^9}\,4{\cdot}426<\overline{t_1}''<+\frac{1}{10^9}\,3{\cdot}389 \text{ (pro větší 2) vzdálenosti)},$$

---

1) 2) srov. pozn. str. 13.

$$-\frac{1}{10^7}\,1{\cdot}088 < t_2'' < +\frac{1}{10^8}\,6{\cdot}076, \qquad -\frac{1}{10^9}\,1{\cdot}163 < t_3'' < +\frac{1}{10^{10}}\,8{\cdot}406,$$

$$-\frac{1}{10^{11}}\,1{\cdot}490 < t_4'' < +\frac{1}{10^{11}}\,1{\cdot}655, \qquad -\frac{1}{10^{14}}\,9{\cdot}507 < t_5'' < +\frac{1}{10^{14}}\,7{\cdot}604,$$

$$-\frac{1}{10^{17}}\,1{\cdot}264 < t_6'' < +\frac{1}{10^{17}}\,1{\cdot}743, \qquad -\frac{1}{10^{21}}\,2{\cdot}587 < t_7'' < +\frac{1}{10^{21}}\,1{\cdot}619,$$

$$-\frac{1}{10^{25}}\,8{\cdot}702 < t_8'' < +\frac{1}{10^{24}}\,1{\cdot}141.$$

Z nových členů jsme vynechávali všechny, které jsou stejné řádové velikosti jako členy zanedbávané při výpočtu vzorce (2). — Srovnání hodnot t_i', t_i'' a l_i, l_i' ukazuje, že je jistě

$$|t_1 (A t_1 + (A + B) t_2 + B t_3 + C t_4 + D t_5 + E t_6 + F t_7 + G t_8| < \frac{2''}{10^4}.$$

Vypočteme pro prsteny 12—20 meze procentového rozdílu $\frac{|(2\,b) - (2\,a)|}{|(2\,a)|}\,.\,100$. (Proměnné jsou π', q; $H = 120\,km$). — Došli jsme k těmto číslům:

Prsten	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Horní mez procentového rozdílu	63·4	58·6	54·1	49·8	45·8	42·1	38·8	35·9	33·2
Dolní mez procentového rozdílu	53·1	48·5	44·3	40·3	36·7	33·5	30·6	28·1	25·8

Pro prsteny 1—11 jsou meze vyšší. — Kdybychom počítali čísla $\frac{|(2\,b) - (2\,a)|}{|(2\,b)|}\,.\,100$, došli bychom také k vyšším mezím.

Uzavíráme: V podrobně uvažovaných případech — hustota dána vzorci (a), (b), (b_1) — se ukázalo, že příspěvek k tížnicové odchylce, pocházející od oborů vzdálených od stanice o více než 600 *km*, závisí podstatně na tom, jak vyjádříme podmínku isostasie, a že členy řádu $\frac{h_0}{10^3}$ ve vzorcích pro hustotu mají na vypočtený příspěvek ještě podstatný vliv. — Které z různých vyjádření podmínky isostasie, které z různých rozložení hustoty se nejvíce přibližuje skutečnosti, je nerozhodnuto. — Za této nejistoty musíme považovati příspěvek k tížnicové odchylce, pocházející od oborů vzdálených od stanice o více než 600 *km*, za nejistý.

Děkuji p. prof. dr. B. Macků a p. prof. dr. A. Semerádovi za poskytnuté rady a zájem, s kterým mou práci sledovali.

Nález eocenního útvaru na ostrově Prviči v severním moři Adriatickém.

Podává

Dr. Otakar Matoušek.

(Předloženo 23. června 1922.)

Ostrov *Prvič* (Pervicchio) leží v severním Adriatickém moři, jižně od ostrova Krku; táhne se ve výši kolem tři set metrů (Guarda 356 *m*, Kur 351 *m*) jako pokračování jeho západního hřbetu. Byl studován vždy jenom mimochodem, jaksi dodatkem k sousedním ostrovům, k čemuž přispěla hlavně jeho úplná neobydlitelnost a nepřístupnost.

Dosavadní vědomosti o něm jsou dány Waagenovou mapou a vysvětlivkami k ní, vyšlými v letech 1903—1911 v bývalém geologickém ústavě říšském ve Vídni: Podle nich je Prvič budován na západě pruhem spodních vápenců rudistových, k nimž se přikládá východně plášť svrchních rudistových vápenců — jiných útvarů na něm podle Waagena a jeho předchůdců není.*)

Během svých studií v letech 1921 a 1922 jsem zjistil řadu základních změn a to hlavně v tektonické stavbě těchto krajin; práce o nich jednající jsem částečně již předložil, většinou však teprve předložím k tisku během letošního roku. Zde podávám menší příspěvek ke geologii regionální.

* * *

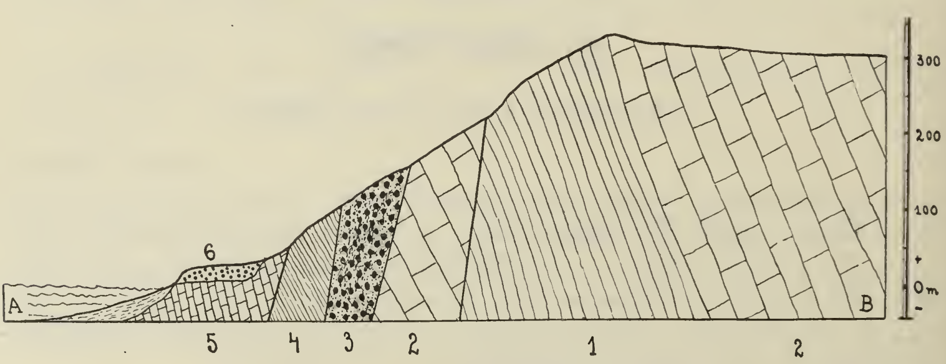
---

*) Jediné věty, týkající se Prviče v nich, jsou tyto: „Die Fortsetzung dieses axialen Aufbruches (unteren Rudistenkalkes) findet sich auf der Insel Pervicchio.“ „Oberen Rudistenkalken, deren östlicher Zug sich auf die Insel Pervicchio fortsetzt“. Waagen, Erläuterungen zur geologischen Karte, Veglia und Novi, strana 7. a 9.). K tomu mapa.

Práce dřívější jsou Waagenem použity a v tomto se neliší. Novější je, pokud vím, pouze zmínka v Schubertově geologickém průvodci severní Adrií (Sammlung geol. Führer, Berlin 1921), kde na str. 126 praví stručně a neúplně: „Inseln Gregorio und Pervicchio . . . die aus Gesteinen der oberen Kreide bestehen.“

Západní část ostrova Prviče není budována prostě pruhem křídy, nýbrž mimo ni i křídou svrchní a hlavně eocénem všech skoro stupňů, které jsou zastoupeny na Krku, a konečně i písky a brekciemi mladými. Rozloha jejich je znázorněna přiloženým náčrtem geologické mapy a profilem.

Nejlépe nám to ukáže profil, vedený napříč proti ostrůvku Gnivici. Je volen právě pro tento účel; nevystihuje tedy tektonické stavby krajiny, leč v nedůležitém detailu. Výběžek P^{ta} Gnivica je kryt mocnými uloženinami červenavě žlutých písků, pískovců a brekcií, petrograficky i jinak zcela podobnými vrstvám známým z Krku. Waagen přičítal tam stáři plistocenní („altquartärer Sand“), sám jsem je na základě některých poznatků považoval za mladopliocenní. Přes to, že důkazů naprosto bezpečných není, je tento předpoklad velmi pravděpodobný. Stáří nejmladšího pliocenu přičítám ovšem tedy i pískovcům nalezeným na Prviči.*)



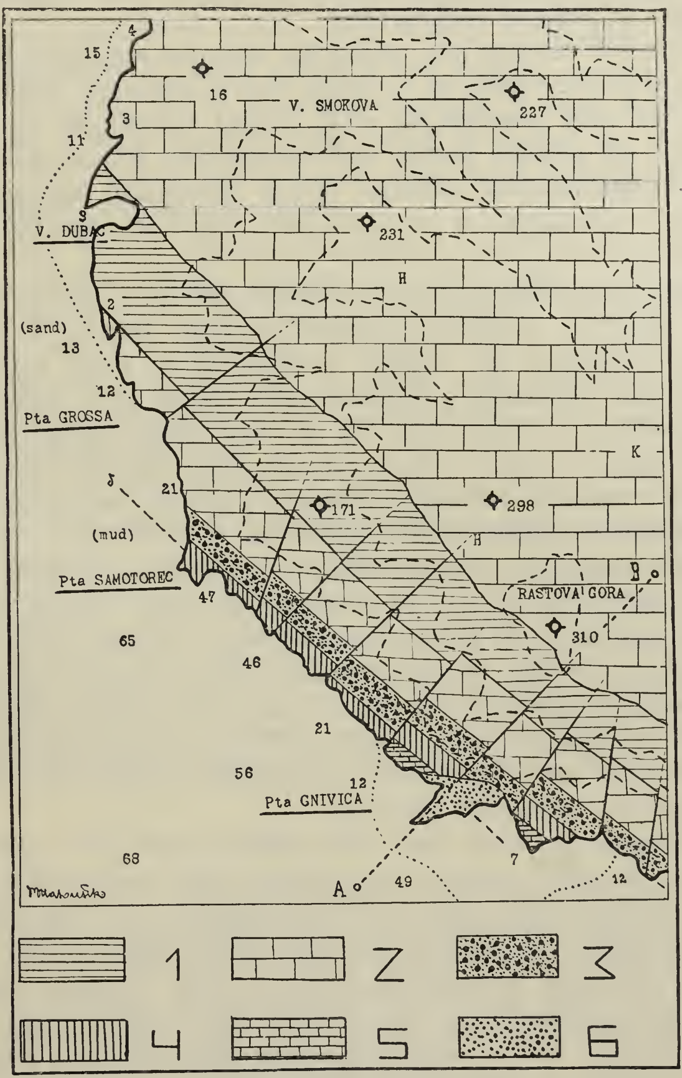
Pod těmito pěkně zvrstvenými písky plistocenními nalezneme šedé, někdy poněkud nažloutlé pískovce, střídající se s vložkami břidličnatých jílů a slínů. Vrstvy ty jsou totožny s t. zv. „svrchními vrstvami nummulitovými“ (název je nevhodný), a to s vyšším jejich horizontem, jak je ve své stratigrafické práci rozeznávám. Z příčin tektonických tu chybějí obzory nejspodnější a vyšší, tvořící střed *antiklinály,* **) kterou jsem nalezl u Jurandvora na Krku. Slíny i zde se vyznačují svou charakteristickou vlastností, že zadržují vodu, která ovšem brzy po dešti úplně vyschne, nejsouc doplňována novým přítokem.

Nad těmito vrstvami, zdánlivě v nadloží, probíhá mocná porucha podélná a to zlom nejstaršího systému, podélný. Směr jeho je asi h 9½ (obyčejně bývá h 10½) a je na těchto místech dobře patrný i morfologicky; dislokace s ní paralelní dává i směr pobřeží mezi P^{ta} Samotorec a P^{ta} Gnivica, jak již z topografické mapy je dobře patrno. Následuje obvyklé podloží ve vrstvách lokálně skoro na hlavy postavených, někdy i překocených, pokud jsem mohl z velmi nezřetelné vrstevnatosti poznati: jsou to písčité vápence a vápence nummulitové (Waagenovy spodní vápence nummulitové, pouze však část svrchní). Mocnost jejich je zde nepatrná vlivem zmíněných poruch tektonických. Waagen spojuje tyto vrstvy s vápenci alveolinovými, což ovšem značně usnadňuje mapování, ale je hlavní příčinou, že pak unikají důležité poznatky tektonické. Oboje jsou od sebe velmi dobře rozeznatelny a to jak petrograficky, tak i palaeontologicky; mocnost vrstev přechodních je malá poměrně. Je tedy starý názor Stachův, Waagenem zamítnutý, v podstatě správný.

---

*) Srovnej: Otakar Matoušek, Předběžná zpráva o geologii lázní Bašky a okolí na ostrově Krku. Předloženo do Rozprav Čes. Akademie r. 1921.

**) Jak jsem poznamenal, jsou tektonické představy zcela odlišné, od dřívějších. Poněvadž v nejbližší době uveřejním specielní práce o tom jednající, nepodávám zvláštního výkladu. Totéž platí i pro některé další zmínky.


4
15
16
V. SMOKOVA
227
3
11
S
V. DUBAC
231
H
2
(sand)
13
12
Pta GROSSA
K
21
(mud)
171
298
H
Pta SAMOTOREC
47
RASTOVA GORA
310
65
46
21
56
12
Pta GNIVICA
68
7
A
49
12
1
2
3
4
5
6

Podloží písčitých vápenců nummulitových budují čisté krasové vápence alveolinové, nejčastěji pěkně narůžovělé, někdy poněkud žlutavé. Tu a tam se v nich vyskytne i nummulit velikých rozměrů, jací jsou význačni pro vápence nummulitové, což i podle zkušeností z jiných míst svědčí, že jde o horizonty vyšší, blízké přechodu; vzhledem k nepřetržité sedimentaci je přechod pochopitelný.

Alveolinové vápence jsou nejstarším stupněm eocenním. Pro všechen tamější kraj je pravidlem, že — vyjma vrstvy některých pískovců a slinů — je eocén vždy přeplněn na první pohled viditelnými nummulity či alveolinami, po případě jinými makroskopickými foraminiferami. Jejich nálezem je nezvratitelně dokázán výskyt (středního) eocenu na Prviči v místech, mapovaných a považovaných dosud za příslušné k svrchní křídě.

Avšak ani podklad útvaru eocenního není ze spodních rudistových vápenců, nýbrž z vápenců svrchnorudistových. Barvou a vlastnostmi krasovými upomínají na vápence alveolinové, od nichž jsou odděleny nápadnou linií tektonickou. Vápence tyto, i když jsou úplně na první pohled podobny alveolinovým, liší se vždy nepřítomností nummulitů, kterýžto negativní znak v těchto místech úplně dostačí; nálezy rudistů jsou ovšem významné, leč místy nehojné. V polohách stratigraficky nižších (geograficky zde vyšších) mají vápence barvu čistě bílou.

Že jde skutečně o svrchní vápence hippuritové, soudím z důvodů různých, především z toho, že petrograficky jsou totožny s bezpečně zjištěnými vrstvami na Krku, dále že všude, kde jsem mohl sledovati tyto poměry, spočívaly vrstvy alveolinové na svrchních vápencích rudistových, nikdy na spodních. K tomu by bylo třeba dislokace ještě mnohem větší než se vyskytují v těchto místech. Přes to, že palaeontologicky stáří svrchnorudistové pro přímé podloží tamějšího eocenu jsem nemohl dokázati, nemůže o něm býti pochyby.

A konečně potvrzují názor ten brekcie, které jsem nalezl výše a které jsou obvykle vyvinuty na rozhraní obou rudistových oddělení. Sledování profilu přímo stává se dále obtížným pro naprostou nepřístupnost strmých skal. Částečně je možno (nechceme-li použíti provazu), použijeme-li průlomů, působených četnými zlomy příčnými a to obou systémů mnou popsaných (h 4½ a h 2). K jihu je možno další sledování jen velmi obtížně, ale vzhledem k pravidelnému průběhu a tomu, že jak patrno přecházejí za krátko pod hladinu mořskou, dostačí jistě pozorování ve směru severozápadním.

S počátku jdeme stále po vrstvách, rovnoběžně s břehem, až k výběžku P^{ta} Samotorec, kde se pobřeží otáčí k severu, šikmo napříč vrstev. Odtud dále přes P^{ta} grossa směrem k zátoce V. Dubac projdeme tyto vrstvy za sebou tak, jak ukázal kolmý profil u Gnivice; přesná hranice je těžko zjistitelna pro suť kamení, hlavně úlomků krasových vápenců křídových.

Mezi P^{ta} Samotorec a P^{ta} grossa leží hranice eocénu a svrchních vápenců rudistových. Dále nalezneme brekcie, za nimiž následují určitě rozeznatelné vápence spodní, tmavě šedavé, místy načervenalé, proti svrchnímu oddělení vždy barev neživých.*)

Rozeznání obou je přes tyto znaky někdy dosti nesnadné. Dobrým vodítkem je stratigrafická poloha obou brekcií, materiálem odlišných.

V okolí zátoky V. Dubac následují opět brekcie, jimiž pak přejdeme do vrstev svrchních, jak je dosavadní literatura a mapa správně uvádí. Hranici udal Waagen správně, jižněji však již patrně ani on, ani jiný geolog pro skoro úplnou nepřístupnost nešel, takže neočekávaný výskyt útvaru eocenního zůstal jim neznám.

Tak jako jinde v studované krajině, je i na Prviči nalezený eocén podmíněn *prolomem*, v tomto případě poměrně nevelikým, vzniklým tektonickými pochody v době po usazení turonských a coniacienových vápenců, tedy patrně v palaeocénu. Poněvadž jde o poruchy směrné, je možno hledati jejich pokračování a ovšem i výskyt eocénu na ostrově Krku: Nalezl jsem je skutečně a to v okolí P^{ta} Braciol; promluvím o této krajině a podám mapu jinde.

Zajímavo je, že spojíme-li jednotlivá pásma příslušná na obou ostrovech, shledáme, že Prvič je posunut poněkud k západu (přesněji k jihozápadu). Poruchové pásmo, podle něhož se tak stalo, ať již prohnutím vztyčených vrstev či příčným zlomem (h 4) — či, což je nejpravděpodobnější, kombinací obou — je patrno z průlivu Bocca di Segna. Že oboje tu působilo, je zřejmo z některých poznatků, o nichž se zde podrobněji nešířím: Zlomy příčné jsou tu zjevem tak běžným, že vliv jejich je samozřejmý, a ohnutí vrstev dokazuji nesporně z jižní části ostrova Krku. I poněkud abnormální směr vrstev na Prviči je jím částečně působen.

* * *

Vyplnil jsem tak úkol tohoto pojednání: Publikovati nalezení útvarů na ostrově Prviči dosud neznámých, a což důležitější, podle dosavadních představ zcela neočekavatelných. Jest možno, že i na pobřeží východním se vyskytne nepatrný útržek kaenozoika, což by však bylo zcela bezvýznamné, poněvadž takovéto pokračování vrstev z Krku je samozřejmé, existuje a je známo, ovšem mořem zatopeno.

Naproti tomu je zřejmo, že výskyt mladých sedimentů eocenních na místech, kde byly předpokládány právě vrstvy nejstarší, spodnorudistové, má za následek i změnu v představách tektonických. O nich, jak bylo řečeno, pojednávám v práci jiné.

---

*) Slova „vápence" užívám v tomto pojednání ve významu spíše stratigrafickém, bez ohledu na chemické složení (dolomity!) nebo v tomto smyslu nevýznamné vložky jiných hornin.

Ke konci budiž mi dovoleno, abych upřímně poděkoval svému učiteli, panu prof. dru Filipu Počtovi, řediteli geologického ústavu university Karlovy, za velmi četné pokyny a laskavost, jakou provází všechny mé práce.

Vysvětlivky k náčrtku mapy a profilu.

(Měřítko 1 : 25.000.)

1. Spodní rudistový vápenec s nadložím tmavých brekcií.
2. Svrchní rudistový vápenec s nadložím pestrých brekcií (patrně stáří montienu).
3. Alveolinové vápence krasové.
4. Nummulitové vápence ze středního lutétienu.
5. Flyšové pískovce a slíny.
6. Mladé písky a brekcie.

* * *

Poznámka při korektuře:

Studie paleontologického materiálu, jimiž jsem se zabýval po předložení tohoto příspěvku, ukazují, že stáří paleogenových vrstev přesahuje částečně (a to značně) dobu středního eocenu, jíž byly přičítány. Stratigrafii bude věnována publikace zvláštní.

Na mapce je morfologicky z průběhu vrstevnic dobře patrna směrná porucha, probíhající křídou směrem *sz—jv* mezi kotami 231 a 227. Poněvadž v krasových vápencích jsou tyto dislokace těžko zjistitelny a nemají podstatného významu, nejsou v náčrtku zakresleny.

Geologický ústav Karlovy university
v Praze.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 34.

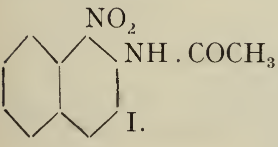
Nitrace β acetnaftalidu.

Napsali

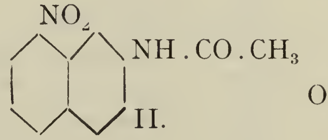
Dr. Vítězslav Veselý a ing. Miloslav Jakeš.

(Předloženo dne 22. října 1922.)

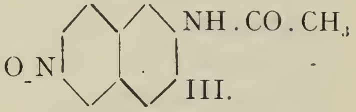
Nitraci β-acetnaftalidu provedl poprve Jacobson[1] v bezvodé kyselině octové; isoloval při ní pouze *1-nitroacetnaftalid-2* (I). Heilpern a Spielfogel[2] nalezli, že reakční produkt obsahuje také *8-nitroacetnaftalid-2* (II). Konečně Friedländer a Littner[3] prohlašují, že zbytek po oddělení 1-nitroderivátu obsahuje hlavně 5- a 8-nitroacetnaftalid-2. Toto tvrzení není v uvedené práci ničím doloženo a spočívá patrně na omylu; nám se přes všechno úsilí nepodařilo isolovati ze směsi derivát 2,5, získali jsme však z ní poměrně značný podíl neznámého dosud *6-nitroacetnaftalidu-2* (III) b. t. 224°, jenž zmýdelněním poskytl *6-nitronaftylamin-2* b. t. 203°, rovněž neznámý.



I.



II.



III.

Konstituce jeho byla dokázána redukcí na naftylendiamin, jichž je známo všech 10 Diamin získaný taje při 222°, nejvýše tající popsaný, totiž *2,6-naftylendiamin,* pouze při 216—218°.[4] Přes tento rozdíl v bodech tání nebylo pochyby, že naše látka je totožná s diaminem Langeho a protože je čistší, taje výše. Pro kontrolu však provedeno ještě zjištění její konstituce převedením na dichlorderivát, jenž tál při 135°, což je právě bod tání *2,6-dichlornaftalinu.*

Poloha nitroskupiny v novém isomeru byla potvrzena ještě jinak: Náhradou amino-skupiny hydroxylem vzniká z něho *2,6-nitronaftol* tající při 158° (IV). Gaess[5]) popsal nitro-β-naftol tající při 156—158° a určil jeho konstituci do té míry, že zůstalo nerozhodnuto mezi polohami 6 a 7 pro nitroskupinu; mimo to zjistil,[6]) že jeho ethylether (V), tající při 114°, poskytuje při další nitraci dinitro-β-ethoxynaftalin tající při 144°, již dříve známý,[7]) jehož konstituci určili později Kehrmann a Matis:[8]) má nitroskupiny v pohách 1 a 6 (VI). Je tudíž v Gaessově nitronaftolu nitroskupina v poloze 6, a nikoliv 7. Náš preparát, o něco čistší než Gaessův, je s ním identický.

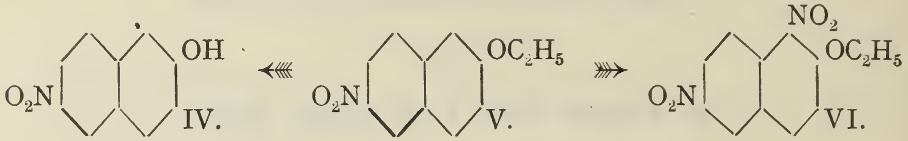
---

[1] B. B. *14.*, (1881), 805.

[2] Mitt. d. technol. Gew.-Mus. Wien (2) *8.*, (1898), 316—323.

[3] B. B. *48.*, (1915), 330.

[4] Lange, Chem.-Ztg. *12.*, (1888), 856.



Diazotací nového nitronaftylaminu a nahrazením nitroskupinou jsme obdrželi *2,6-dinitronaftalin* b. t. 268°, tající tedy mnohem výše než všechny dosud známé dinitronaftaliny; je to první připravený β,β-dinitronaftalin.

Přehled bodů tání dosud známých a nově připravených 2,6-(amfi-) derivátů naftalinu (mimo sulfokyseliny) podává tabulka:

Dichlornaftalin	135°	Bromacetnaftalid	192°
Dibromnaftalin	158°	Aminonaftol (za rozkl.)	190/5°
Dioxynaftalin	215/6°	Methoxynaftylamin	98°
Dimethoxynaftalin	150°	Ethoxynaftylamin	90/1°
Diacetoxynaftalin	175°	Methoxyacetnaftalid ...	183°
Diaminonaftalin	222°	Ethoxyacetnaftalid.....	184½°
Dinitronaftalin	268°	Nitronaftol............	158°
Chlornaftol	115°	Nitromethoxynaftalin ..	134°
Bromnaftol	127°	Nitroethoxynaftalin	114°
Bromnaftolacetat	103°	Nitroacetoxynaftalin ...	151/2°
Brommethoxynaftalin ..	105°	Nitronaftylamin	203°
Bromethoxynaftalin ...	80°	Nitroacetnaftalid	224°
Bromnaftylamin	128°		

Bideriváty vzniklé nitrací β-acetnaftalidu náležejí vesměs těm řadám, v nichž je theoreticky možný[9]) *chinon*: ze 4 možných „chinogenních" isomerů (2,1 — 2,3 — 2,6 — 2,8) se vytvořily 3, kdežto nechinogenní nebyl zjištěn ani jeden. Rovněž oba isomery vznikající nitrací α-acetnaftalidu jsou chinogenní (1,2 — 1,4). Totéž platí i v řadě benzolové, neboť nitrací acetaminů vznikají tu deriváty ortho a para, což jsou obě možné polohy chinogenní.

---

[5]) J. f. prakt. Ch. (2) *45.*, (1892), 616.

[6]) J. f. prakt. Ch. (2) *43.* (1891), 23. — Sr. též Davis, Chem. News, *74.*, (1896), 302.

[7]) B. B. *17.* (1884), 1172.

[8]) B. B. *31.* (1898), 2418.

[9]) Viz Willstätter a Parnas, B. B. *40.* (1907), 1403.

Vznikání chinogenních derivátů při substitučních reakcích je v řadě naftalinové stejně jako v benzolové mnohem obecnější: jeví se hlavně při nitraci, sulfonaci a halogenisaci acetnaftalidů, naftolů a do značné míry i halogennaftalinů. Pravidlo se netýká jen prvního vstupujícího substituentu, nýbrž platí i pro další, ať jsou již stejné nebo různé.

Jak se osvědčuje, je zřejmo z tabulky obsahující přehled zmíněných reakcí substitučních, pokud byly doposud provedeny. (Isomery, které pravidlu nevyhovují, jsou označeny †.)

Výchozí derivát naftalinu:	Místo, kam vstoupí substituent při		
	nitraci	sulfonaci	halogenisaci
1-acetnaftalid	2 — 4 2, 4	5 5, 7	4 2, 4
1-naftol	2 (?) 2, 4 2, 4, 5 — 2, 4, 7	2 — 4 — 7 2, 4 — 2, 7 2, 4, 7	2—4 (?) 2, 4
1-naftol-(m)ethylether	(2) — 4 2, 4 — 4, 5 2, 4, 5 (?)	4	4
1-halogen-naftalin	4 — 5 — (8 †) 4, 5 — 4, 8 † 2, 4, 5, 7 — 2, 4, 5, 8 †	4 — 5 — 7 — 6 † 4, 7 2, 4, 7	4 — 5 — (2—7)
2-acetnaftalid	1 — 6 — 8		1 1, 6
2-naftol	1 (?) 1, 6	1 — 6 — 8 3, 6 — 6, 8 3, 6, 8	1 1, 6
2-naftol-(m)ethylether	1 —6 — 8 1, 6 — 1, 8 1, 6, 8 (?)	1 — 6 — 8	1 — 6 1, 6
2-halogen-naftalin	8 1, 6 (?) — 1, 8 1, 6, 8 (?)	6 — 8 6, 8 — (4, 6 †)	8

U 1-derivátů jsou chinogenní polohy 2, 4, 5, 7; u 2-derivátů 1, 3, 6, 8.

Při nitraci, sulfonaci a halogenisaci aromatických acetamino- a oxyderivátů vstupují substituenty do poloh chinogenních.

Willstätter a Parnas[9]) poznali, že naftochinony tvoří dvě velmi ostře oddělené skupiny:

1. chinony stálé: 1,2 a 1,4; jedno jádro jejich je benzolové, nezměněné.

2. chinony nestálé: 2,3 — 1,5 — 2,6 — 2,8; obě jádra jsou přetvořena chinonově. Tato druhá skupina odpovídá svou nestálostí benzochinonům.

Rozdílnost obou skupin se jeví velmi zřetelně i u nitrace acetnaftalidů: vznikají převážně ty isomery, které odpovídají *stálým* chinonům první skupiny, totiž při α-acetnaftalidu 1,2 a 1,4, při β-acetnaftalidu 2,1. Z isomerů odpovídajících chinonům nestálým nebyl v prvním případě nalezen žádný; v druhém 2,6 a 2,8 v menším množství, nikoli však 2,3 — patrně bude chinon jemu odpovídající ještě méně stálý než oba předchozí.

Zákonitosti obdobné těm, které byly právě popsány, objevují se i při jiných reakcích v řadě naftalinové; na př. velmi nápadně při přeměně diazotovaných nitronaftylaminů na příslušné dinitronaftaliny:[10]) v nejhorším výtěžku se získávají dinitronaftaliny 1,2*) a 1,4, tedy ty, jež odpovídají *stálým* naftochinonům; v mnohem lepším isomery 2,5 — 2,6 — 2,8. Rovněž o- a p-nitranilin dávají dobré výtěžky a vskutku oba benzochinony svou nestálostí odpovídají nestálým naftochinonům.

Část pokusná.

Nitrování β-acetnaftalidu bylo prováděno v celku podle Liebermanna a Jacobsona[11]) a Heilperna a Spielfogela;[2]) po nitraci však není radno dlouho čekati, jak tito doporučují, neboť pak se vyloučí všechny 3 isomery pohromadě, čímž se jejich oddělování neobyčejně ztíží. Nejvýhodnějším se ukázal tento postup:

30 g β-acetnaftalidu se rozpustí na vodní lázni ve 40 g bezvodé kyseliny octové, pak se za stálého míchání rychle ochladí ledovou vodou a získaná hustá kaše se opatrně nitruje přikapáváním 86%ní kyseliny dusičné (16 g, nebo též 20 g 65%ní kyseliny). Teplotu nenecháme přestoupiti 25—30°. Kaše s počátku poněkud zřídne, ale pak ještě více zhoustne,

---

[10]) Veselý a Dvořák, Rozpr. Čes. Akad. 1922, 31, tř. II., č. 11.

*) Tento dinitronaftalin, tající při 158°, mohl býti při této reakci isolován sotva ve množství stačícím na určení bodu tání, a to pouze při užití pevné soli diazoniové. Dá se však snadno připraviti v libovolném množství z 1, 2-dinitrotetralinu (viz čs. pat. přihl. z 10. VI. 1922). Příprava a přeměny této zajímavé látky budou popsány později.

[11]) A. *211*, (1882), 44.

a teprve ke konci zase zřídne. Po skončeném přidávání vyjmeme z chladicí lázně a mícháme, až se vše rozpustí na roztok červenohnědý. (Nechá-li se hmota reakčním teplem příliš zahřáti, je roztok temný, až černý, a obsahuje mnoho mazů.)

Po chvíli naočkujeme roztok jemně rozetřeným čistým 1-nitro-2-acetnaftalidem, načež se počne vylučovati hojnost krystalů. Asi po ½ hodině hustou krystalickou kaši odssajeme a promyjeme 50%ní kyselinou octovou (po př. ještě etherem). Získáme tak 15 g látky tající mezi 117—119°, jež překrystalováním z lihu dá snadno čistý *1-nitroacetnaftalid-2.*

(Nejsme-li však dosti opatrní a naočkuje-li se roztok náhodou i druhými isomery, vyloučí se všechny zároveň, což se pozná snadno podle toho, že získaná látka není při 120° ještě úplně roztálá: počíná sice táti už níže, obyčejně při 113°, ale úplně roztaje až při 130—140°. Isolování jednotlivých isomerů z takové směsi viz dále.)

Z matečného roztoku vykrystalovaly pak ještě tyto podíly:

II. podíl tající při 138—145°,
III. „ „ „ 144—155°,
IV. „ „ „ 121—123°.

Surové produkty obsahují nějakou látku nestálou na světle, neboť nabíhají na povrchu do červena až do hněda; nejspíše je to naftalindiazooxyd-2,1 nebo nějaký jeho nitroderivát.

Celkový výtěžek 35 g, čili 93% theorie (při špatném chlazení mnohem méně, mnohdy jen 60%). Množství jednotlivých isomerů možno zhruba odhadnouti takto: I. podíl obsahuje téměř jen 1-nitroacetnaftalid-2; je ho 15 g, t. j. 40% theor. výtěžku. II. a III. podíl, jichž bývá 15—18 g, obsahují všechny 3 isomery asi ve stejných množstvích, tedy asi po 15% theorie. IV. podíl je zase pouhý 1,2, bývá ho však málo, 1—2 g čili asi 5% theor. Nitrace poskytuje tudíž celkem asi 40 + 15 + 5 = 60% isomeru 1,2 a po 15% isomerů 2,6 a 2,8.

Oddělení 1-nitroacetnaftalidu-2 dá se provésti několikerým způsobem:

1. Nejlépe je odděliti největší část jeho hned po nitraci, jak už bylo popsáno. Pak se ho dají podíly II. a III. snadno zbaviti překrystalováním z vroucího xylolu, v němž jsou oba výše tající isomery těžko rozpustny; hned po vychladnutí se vyloučené krystaly odssají. Neobsahují-li již derivátu 1,2, počínají táti až kolem 170°, což jest bod tání eutektické směsi 6- a 8-nitroacetnaftalidu-2.

2. Dělení směsi, jež obsahuje mnoho isomeru 1,2, je dosti obtížné, a nedá se obyčejně docíliti tak jednoduše, jak popisují Heilpern a Spielfogel. Dosti dobře se osvědčilo krystalovati opatrně z lihu a odssáti včas, dokud se vyloučil pouze 1-nitroacetnaftalid-2. Pak poskytuje matečný roztok směs, v níž převládají isomery výše tající, a ta se dá už rozděliti podle prvního způsobu.

3. Směs se zmýdelní zředěnou kyselinou sírovou. 1-nitronaftylamin-2 neutvoří síranu, neboť je jen velmi slabě zásaditý, a dá se z větší části odděliti odfiltrováním za horka, jeť i v horké zřeď. kyselině jen málo rozpustný. Ve filtrátu se vyloučí sírany 6- a 8-nitronaftylaminu-2. Postup tento není výhodný pro přípravu 1-nitronaftylaminu-2, neboť ten při zmýdelňování značně zmazovatí.

4. Zmýdelňuje-li se směs nedostatečným množstvím alkoholického drasla, zůstanou oba výše tající nitroacetnaftalidy nerozloženy a vyloučí se (příp. po zředění vodou), kdežto zmýdelněním vzniklý snadno rozpustný 1-nitronaftylamin-2 se získá z matečného roztoku.

Rozdělení isomerů 2,6 a 2,8.

1. Oba nitroacetnaftalidy jsou v obvyklých rozpustidlech skoro stejně rozpustné, proto jejich rozdělení velmi obtížné. Podařilo se nám takto: Odbarvený filtrovaný a, aby se nenaočkoval zárodky ze vzduchu, vatou ucpaný roztok se nechá zvolna chladnouti. Z přesyceného roztoku se počne v příznivém případě vylučovati jen jeden isomer; odssajeme rychle a určíme bod tání: počíná-li látka táti nad 200° (obyčejně mezi 210—220°), je to *2,6-nitroacetnaftalid*; pakli kolem 190°, je to *8-nitroacetnaftalid-2*; a konečně když taje už od 170°, vyloučila se zase směs a nutno pokus opakovati. Po oddělení jednoho isomeru druhý počne hned krystalovati z přesyceného jím matečného roztoku. Oba takto získané isomery se snadno vyčistí překrystalováním z lihu.

2. Mnohem pohodlněji možno provésti oddělení po zmýdelnění: Směs tající od 170° se rozpustí na vodní lázni ve zředěné kyselině sírové (1 : 1 podle objemu čili 62½%ní; je jí třeba aspoň desetinásobné množství), pak se zředí stejným objemem vody, čímž se rozpuštěná látka zase srazí, a vaří se na síťce až do opětného rozpuštění (asi ½ hod.). Roztok obsahující asi 30% H_2SO_4 má maximální koncentraci iontů $H^{\cdot}$ a tudíž největší schopnost zmýdelňovací; nitroacetnaftalidy se v něm rozpouštějí jen nepatrně, kdežto vznikající sírany nitronaftylaminů za horka velmi snadno.

Reakční kapalinu zředíme zase stejným objemem vody, zahřejeme k varu a odfiltrujeme od malého množství černých nečistot. Z filtrátu jasně červenohnědého se vyloučí zchladnutím žluté sírany obou nitronaftylaminů téměř kvantitativně. Odssajeme je a rozmícháme v amoniaku. Vyloučené rudé zásady zase odssajeme a rozpustíme v horkém lihu (za přidání trochy alkoholického ammoniaku). Zchladnutím se vyloučí asi $^1/_3$ použitých zásad ve způsobě světle červené látky tající při 201—202°; je to téměř čistý *2,6-nitronaftylamin.*

Z matečného roztoku vyloučí se po zahuštění někdy ještě menší množství této látky, častěji vykrystaluje už zároveň i druhý isomer. Abychom jej isolovali, nutno směs zacetylovati; překrystalováním z lihu obdržíme *8-nitroacetnaftalid-2*. Matečný roztok poskytne po zahuštění zase směs, jež se rozdělí po zmýdelnění jako dříve.

2,6-nitroacetnaftalid.

Z lihu se vylučuje ve světle žlutých, plsťovitých jehličkách. Čistý taje při 224°. Rozpouští se dosti dobře také v konc. kys. octové, méně v xylolu a v benzolu, nepatrně ve vroucí vodě; ve studené vodě a v etheru je téměř nerozpustný.

0·1100 g látky dalo 11·65 cm³ N_2 při 17° C a 740 mm Hg:

$C_{12}H_{10}O_3N_2$: Vypočteno 12·15% N.
Nalezeno 12·0 % N.

2,6-nitronaftylamin.

Získá se zmýdelněním 2,6-nitroacetnaftalidu zřeď. kyselinou sírovou (stejně jak popsáno při zmýdelnění směsi). Produkt se zbaví anorganických nečistot (síranu ammonného) rozmícháním ve vroucí vodě; po vychladnutí se odssaje, promyje a překrystaluje z lihu, v němž je látka i za horka dosti těžko rozpustná.

Tenké lupínky (často šípovité, ze dna do výše postavené), silně kovově lesklé, světle oranžové, taje při 203°. Nečistý bývá mnohem tmavěji zbarven: karmínově červený, hnědočervený, ba až téměř černý.

0·1912 g látky dalo 24·75 cm³ N_2 při 13° C a 738 mm Hg:

$C_{10}H_8O_2N_2$: Vypočteno 14·89% N.
Nalezeno 14·83% N.

Při zmýdelňování 2,6-nitroacetnaftalidu bylo pozorováno, že někdy získaný slabě nažloutlý síran 2,6-nitronaftylaminu již po odssátí na Wittově destičce překrystaluje na tvar jehlicovitý, barvy našedlé. Proto jsme sírany blíže prostudovali:

1. Na přípravu síranu ze zásady je potřebí kyseliny sírové aspoň 5%ní; ve slabší se síran již hydrolysuje (zčervená). Z horkého roztoku krystaluje při chladnutí *normální síran* $(NO_2 . C_{10}H_6NH_2)_2 . H_2SO_4$; pod mikroskopem tyčinky až vlásky velmi dlouhé. Odssáty, rozetřeny na pórovitém talíři a ponechány přes noc v exsikkátoru. Množství H_2SO_4 určeno v nich titrací: 0·1547 g povařeno s malým přebytkem $\frac{1}{10} n$ ⊙ KOH a titrováno na fenolftalein; spotřeba louhu 7·0 cm³ $\frac{n}{10}$ ⊙:

$(C_{10}H_8O_2N_2)_2 . H_2SO_4$: Vypočteno 20·7% H_2SO_4.
Nalezeno 22·2% H_2SO_4.

Vyšší výsledek je způsoben tím, že na pórovitém talíři se neodstraní všechna přebytečná kyselina sírová; promytím vodou se odstraniti nesmí, neboť by se sůl zhydrolysovala.

Necháme-li kapku roztoku s krystaly delší dobu na mikroskopickém sklíčku, kyselina sírová se vypařováním koncentruje a zanedlouho počne od okrajů kapky krystalovati kyselý síran v dlouhých našedlých jehličkách kdežto normální síran znenáhla mizí.

2. Ze silnější kyseliny (30—60%ní) vykrystaluje *kyselý síran* $NO_2 . C_{10}H_6NH_2 . H_2SO_4$ nejprve v bílých nebo slabě nažloutlých shlucích, jež ani pod mikroskopem nejeví určitého tvaru krystalického. Za nedlouho (po naočkování ihned) se počne přeměňovati na velmi dlouhé a úzké jehlice bezbarvé, našedlé, jež se pod mikroskopem jeví jako dlouhé sloupky, na konci šikmo seříznuté. Odssáty, rozetřeny na pórovitém talíři a analysovány jako dříve. 0·1174 g spotřebovalo $9{\cdot}1\ cm^3 \frac{n}{10}$ ⊙ KOH:

$C_{10}H_8O_2N_2 . H_2SO_4$: Vypočteno $34^{1}/_{4}{}^{0}/_{0}$ H_2SO_4.
Nalezeno $38^{0}/_{0}$ H_2SO_4.

Rozdíl proti výpočtu je zde ještě větší, což je způsobeno silnější koncentrací použité H_2SO_4 (50%).

2,6-diaminonaftalin.

0·7 g 2,6-nitronaftylaminu rozmícháno v horké kyselině solné a přidáváno po částech 2 g cínu (něco více než 3 mol.); zahříváno na vodní lázni, pokud vyjmutý vzorek silně zředěn vodou vylučuje červenou látku (hydrolysou uvolněný nitronaftylamin). Pak ochlazeno, vyloučený *chlorid 2,6-diaminonaftalinu* odssát, rozpuštěn v horké vodě a po odfiltrování nečistot z cínu sražen stejným objemem konc. kys. solné; tímto postupem se zbaví cínu. Překrystalováním z vody se obdrží plsťovité krystalky v podobě podlouhlých lupínků.

Zásada uvolněna ammoniakem a překrystalována z vody, v níž je i za varu těžko rozpustná; roztok slabě hnědožlutý fluoreskuje silně do fialova. Bezbarvé destičky, jež překrystalovány z lihu tají při 222⁰, při čemž se barví černě; nepatrně tmavějí i za obyčejné teploty na vzduchu a světle.

2,6-dichlornaftalin.

Za chladu nasycený vodný roztok diaminchlorhydrátu sražen stejným objemem konc. kys. solné, ochlazen na 0⁰ a opatrně zdiazotován. Sraženina se rozpustila a vzniklý načervenalý roztok vlit na suspensi měděného prášku v konc. kys. solné. Z reakčního produktu, jenž obsahuje mnoho mazů, se dichlornaftalin vydestiluje vodní parou, odssaje a překrystaluje z lihu. Taje při 135⁰.

2,6-nitronaftalindiazoniumsulfát.

2,6-nitronaftylamin se rozpustí za varu asi v desetinásobném množství 30%ní kyseliny sírové, za míchání se rychle ochladí a zdiazotuje vypočteným množstvím dusitanu sodného. Hustá kaše síranu zřídne, ale už při diazotaci se počne vylučovati málo rozpustný síran nitronaftalindiazonia. V prostředí dostatečně kyselém je i za tepla značně stálý, pročež možno diazotovati bez chlazení ledem. Teprve když se zahřeje až téměř k varu, odštěpuje dusík a dává nitronaftol (viz dále).

Vlijeme-li produkt diazotace do přebytku chladné vody, rozpustí se jasně, avšak záhy se počnou v kapalině objevovati jemné červené vločky (nejspíše oxyazolátka), jichž vylučování trvá několik týdnů. Dají se velmi těžko odssávati; v obvyklých rozpustidlech se nerozpouštějí, zbarví je pouze sytě červeně.

2,6-nitronaftol.

2,6-nitronaftylamin zdiazotován způsobem právě popsaným, vlit do 20%ní kyseliny sírové, k níž přidáno trochu močoviny, a roztok zahříván. Když byla kapalina již téměř ve varu, počal vývoj dusíku a zároveň se vytvořilo něco zmíněné tmavě červené látky. Po důkladném zavaření byla tato za horka odfiltrována; filtrát vyloučil ochlazením nitronaftol, jenž po překrystalování z vody tál při 158°. Novým překrystalováním z benzolu se již bod tání nezměnil.

Tvoří žluté jehlice, velmi snadno rozpustné v lihu a ve vroucím benzolu, dobře v horké vodě, téměř nerozpustné v benzinu. V louhu a v ammoniaku se rozpouští na roztok oranžově červený, okyselením se zase srazí.

0·1553 g poskytlo 10·65 cm³ N_2 při 17° C a 736 mm Hg:

$C_{10}H_7O_3N$: Vypočteno 7·4% N.
Nalezeno 7·7% N.

2,6-dinitronaftalin.

2·25 g 2,6-nitronaftylaminu rozpuštěno v 25 g zřeď. kys. sírové (30%ní), zdiazotováno a vlito do suspense 5 g měděného prášku ve 30 cm³ 25%ního roztoku dusitanu sodného. Silně třepáno, pak zahřáto na vodní lázni, odssáto, vymyto vodou a vysušeno. Vyvařeno dvakrát benzolem, spojené roztoky odbarveny dvakrát karboraffinem a benzol oddestilován. Suchý zbytek rozpuštěn v ledové kyselině octové a znovu odbarven; vychladnutím se vyloučily krystaly načervenalé, jež novým překrystalováním z octové kyseliny poskytly 0·2 g dinitronaftalinu tajícího při 268°.

Krystaly tence šupinkovité, okraje nepravidelně zubatého. V lihu je i za horka velmi těžko rozpustný; snáze v benzolu, z něhož však těžko krystaluje; snadno krystaluje z kyseliny octové.

0·1547 g dalo 17·5 cm³ N_2 při 14½° C a 747½ mm Hg:

$C_{10}H_6O_4N_2$: Vypočteno 12·84% N.
Nalezeno 13·08% N.

Z ústavu chemie organické
na české vysoké škole technické v Brně.

XXXIV.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 35.

Titrace iontu rtuťnatého chloridovým a její upotřebení k analyse rumělky i organických sloučenin rtuti.

Podávají

prof. Emil Votoček a Dr. techn. Ladislav Kašpárek.

Předloženo dne 22. října 1922.

Již v obou předchozích studiích o titraci dusičnanem rtuťnatým*) ukázal prvý z nás, že lze reakce mezi iontem Cl' a iontem $Hg^{\cdot\cdot}$ užiti netoliko ke stanovení řečeného halogenu, nýbrž obráceně též k volumetrickému určování rtuti, a doložil správnost navržené methody řadou dokladů číselných. Přítomná práce jest pokračováním výzkumů těch a měla za účel podrobné vypracování merkurimetrické methody, zvláště se zřetelem na stanovení rtuti v rumělce a v organických derivátech rtuti.

Princip methody jest, jak ostatně uvedeno již v prvých dvou citovaných publikacích, tento: Do vodného roztoku, obsahujícího rtuť v podobě kyslíkaté soli rtuťnaté (tedy převážně iontu $Hg^{\cdot\cdot}$) a v němž způsoben byl přídavkem trochy nitroprussidu sodného zřetelný zákal bílý (nitroprussid rtuťnatý), připouští se roztok nejčistšího chloridu sodného o známé hodnotě ($n/10$ a pod.) tak dlouho, až zákal právě vymizí. Účinnost roztoku NaCl se zřetelem na roztok $Hg^{\cdot\cdot}$ vyplývá z empirických dat, uvedených v předchozích publikacích prvého z nás (l. c.), neboť vedle reakce hlavní:

$$Hg^{\cdot\cdot} + 2\,Cl' = HgCl_2$$

probíhá, třebaže v míře nepatrné, též reakce:

$$Hg^{\cdot\cdot} + Cl' = HgCl^{\cdot},$$

---

*) E. Votoček: O novém způsobu titrace iontu chlorového (Cl') rtuťnatým ($Hg^{\cdot\cdot}$) a E. Votoček: Nový způsob titrace iontů Cl', Br', CN' a $Hg^{\cdot\cdot}$ (viz Rozpravy této Akademie r. 1915 resp. 1916.

při níž váže se iontem Hg˙˙ pouze polovice iontu chloridového co předešle. Zbývalo toliko 1. zjistiti vliv teploty na průběh a výsledek titrace (neboť nitroprussid rtuťnatý rozpouští se v roztocích NaCl za tepla rychleji než za chladu) a 2. vyšetřiti optimálné množství indikátoru (nitroprussidu sodného).

Část pokusná.

Základní roztoky. — $^1/_{10}$- Normálný roztok soli kuchyňské upraven tím, že 5·8460 *g* ($^1/_{10}$ *g*-ekvivalentu) nejčistšího Kahlbaumova přetaveného NaCl rozpuštěno ve vodě a roztok doplněn v litr.

K přípravě $^1/_{10}$ norm. roztoku rtuťnatého rozpuštěno 10·8301 *g* ($^1/_{10}$ *g*-ekvivalentu) nejčistšího Kahlbaumova HgO v přebytku chloruprosté kyseliny dusičné a roztok doplněn vodou v litr.

Vliv teploty na výsledek titrace. Předběžné pokusy ukázaly, že konec reakce jest mnohem ostřejší při titraci za tepla, neboť se tu zákal nitroprussidu rtuťnatého mnohem rychleji rozpustí v prvém přebytku soli kuchyňské než je tomu za obyčejné teploty. Zdálo by se z toho zvýšení teploty velmi výhodným pro praxi merkurimetrickou, kdyby nebylo jiné okolnosti, jež mluví rozhodně proti titraci za tepla. Výsledky získané za teploty zvýšené jsou totiž znatelně nižší než čísla resultující při titraci za chladu. Ukazuje to tato řada pokusná, při níž titrován $^1/_{10}$ n. NaCl roztokem Hg $(NO_3)_2$ o účinnosti $^1/_{10}$ n. vůči $^1/_{10}$ n. NaCl.

Užito roztoku rtuťnatého	Přidáno vody	Přidáno indikátoru	Teplota na začátku titrace	Teplota na konci titrace	Spotřebováno na 1 cm^3 $^1/_{10}$ n. HgO
50 cm^3	150 cm^3	0,06 *g*	15^0	15^0	0·9989 cm^3
50 cm^3	150 cm^3	0,06 *g*	32^0	28^0	0·9884 cm^3
50 cm^3	150 cm^3	0,06 *g*	33^0	43^0	0·9846 cm^3
50 cm^3	150 cm^3	0,06 *g*	80^0	56^0	0·9836 cm^3

Že stoupající teplotou klesá poměrná spotřeba NaCl, dá se snadno vyložiti. Příčinou jest zajisté nestálost vodných, a zvláště okyselených roztoků nitroprussidu sodného při vyšších teplotách, kterou pozoroval svého času již K. Bhaduri.*) Při složitém rozkladu nitroprussidu minerálnými kyselinami uvolňuje se vždy kyanovodík. Za chladu jest ovšem rozklad řečený velmi pomalý a nepřichází v průběhu titrace (jejíž praktické provedení nevyžaduje nikdy více než $^1/_4$ hodiny) ani k platnosti. Jinak jest tomu, ostaví-li se kapalina po skončené titraci po delší dobu, nebo provádí-li se titrace za tepla. Zde uvolňuje se rozkladem nitroprussidu již znatelné množství kyanovodíku, a ježto se váže na přítomný v roztoku ion rtuťnatý dle schematu:

$$2\,CN' + Hg^{\cdot\cdot} = Hg(CN)_2,\ \text{(téměř nedissoc.)}$$

---

*) Die Zersetzung von Nitroprussiden, Z. f. anorg. Ch. r. 1913.

ochuzuje se roztok o jistý podíl iontů $Hg^{\cdot\cdot}$, takže se při titraci spotřebuje menší množství soli kuchyňské.

Z uvedeného vyplývá, že sluší titrovati roztoky $Hg^{\cdot\cdot}$ za přítomnosti nitroprussidu solí kuchyňskou vždy za teploty obyčejné, tedy za podmínek nepříznivých rozkladu indikátoru (nitroprussidu).

Vliv množství indikátoru. — Aby byl vyšetřen, titrován $^1/_{10}$ n. roztok HgO $^1/_{10}$ n. roztokem NaCl u přítomnosti stoupajících kvant nitroprussidu sodného. První řada titrací provedena při 15% i nalezeny výsledky tyto:

Užito roztoku rtuťnatého	Přidáno vody	Užito nitroprussidu	Spotřebováno $^1/_{10}$ n. NaCl	Na 1 cm^3 roztoku rtuťnatého připadá
49·905 cm^3	150 cm^3	0·01 g	49·03 cm^3	0·9807 cm^3
49·905 cm^3	150 cm^3	0·01 g	49·03 cm^3	0·9807 cm^3
49·905 cm^3	150 cm^3	0·02 g	49·14 cm^3	0·9828 cm^3
49·905 cm^3	150 cm^3	0·02 g	49·14 cm^3	0·9828 cm^3
49·905 cm^3	150 cm^3	0·03 g	49·24 cm^3	0·9848 cm^3
49·905 cm^3	150 cm^3	0·04 g	49·34 cm^3	0·9868 cm^3
49·905 cm^3	150 cm^3	0·04 g	49·34 cm^3	0·9868 cm^3
49·905 cm^3	150 cm^3	0·05 g	49·44 cm^3	0·9888 cm^3
49·905 cm^3	150 cm^3	0·05 g	49·39 cm^3	0·9878 cm^3
49·905 cm^3	150 cm^3	0·06 g	49·54 cm^3	0·9909 cm^3
49·905 cm^3	150 cm^3	0·06 g	49·52 cm^3	0·9904 cm^3

V druhé řadě titrací postupováno stejně, ale při teplotě 50^0. Spotřeba cm^3 $^1/_{10}$ n. NaCl na 1 cm^3 $^1/_{10}$ n. HgO byla tu:

při 0·01 g indikátoru ..... 0·9659
při 0·02 g indikátoru ..... 0·9687
při 0·03 g indikátoru ..... 0·9720
při 0·04 g indikátoru ..... 0·9750
při 0·05 g indikátoru ..... 0·9770
při 0·06 g indikátoru ..... 0·9780

Znázorníme-li výsledky obou řad graficky, nabudeme diagramu, z jehož křivek vysvítá, že — ať se titruje za chladu nebo za tepla — spotřeba NaCl stoupá rostoucím množstvím indikátoru, a to velmi pravidelně.

Pro další, praktické používání indikátoru toho při titračním určování rtuti rozhodli jsme se pro množství 0·06 g nitroprussidu sodného na celkový objem kapaliny 200 cm^3, neboť užití vyšších koncentrací indikátoru toho neslo by ssebou tu závadu, že by titrovaný roztok byl znatelně zbarven, což by bylo na úkor přesnému vystižení konce reakce.

Při 0·06 g indikátoru v celkových 200 cm^3 reakční kapaliny spotřebuje 1 cm^3 $^1/_{10}$ n. HgO 0·9907 cm^3 $^1/_{10}$ n. NaCl, kterýžto faktor jest přirozeně zrcadelným číslem k faktoru 1·0093, nalezenému prvým z nás pro stanovení Cl' za uvedených podmínek koncentrace i množství indikátoru. Abychom tudíž přepočetli spotřebované cm^3 $^1/_{10}$ n. NaCl na rtuť, dělíme je řečeným faktorem 0·9907 a pak znásobíme desítitisícinou ekvivalentu rtuti:

$$\text{gramy rtuti} = \frac{cm^3\, {}^1/_{10}\, \text{n. NaCl} \times 0{\cdot}01003}{0{\cdot}9907}$$

Ježto 0·01003:0·9907 = 0·010124, znásobíme cm^3 $^1/_{10}$ n. NaCl prostě tímto činitelem.

Praktické použití merkurimetrie.

Stanovení rtuti v lučebně čistém sirníku rtuťnatém. — K pokusům svým brali jsme nejčistší Merckův preparát a rozkládali jej zahříváním s oxydační směsí, složenou z 1 obj. konc. kyseliny dusičné (h. 1·4) a 2 objemů konc. kyseliny sírové (h. 1·84), obou chloruprostých. K úplnému a přiměřeně rychlému rozkladu osvědčilo se bráti na každých 0·25 *g* HgS 50 cm^3 řečené směsi oxydační. Práškovitý preparát vařen se směsí tou v baňce kjeldahlisační tak dlouho, až hmota zbělela, a pak ještě dalších 10 minut. Nebylo nikterak nutno, aby oxydací vzniklá sůl rtuťnatá úplně se rozpustila; stačilo, oxydovala-li se docela síra výchozího sirníku. Pak vlita reakční směs do vody, ve které — bylo-li dobře pracováno — musila se rozpustiti na roztok čirý. Roztok ten obsahoval vždy něco kyseliny dusité, jež vznikla z kysličníku dusičitého, obsaženého v reakční kyselé kapalině, hydrolytickým působením vody:

$$N_2O_4 + H_2O = HNO_3 + HNO_2.$$

Jelikož kyselina dusitá při titraci merkurimetrické vadí (jak ukázal prvý z nás v dříve citovaných publikacích), odstraňovali jsme ji přídavkem vodného manganistanu draselného až do slabě růžového zbarvení, a malý přebytek $KMnO_4$ jsme pak opět zrušili roztokem kyseliny šťavelové. Toto odstraňování kyseliny dusité prováděli jsme buď přímo v baňce kjeldahlisační, nebo teprve na alikvotním podílu roztoku určeného k titraci.

Doklad: 1·1004 *g* HgS rozloženo na vylíčený způsob 180 cm^3 oxydační kapaliny. Vychladlý obsah baňky zředěn vodou do rozpuštění, odstraněna kyselina dusitá, a kapalina doplněna v 1 *litr* při 15⁰. S roztokem tím provedeno čtvero titrací:

	Užito roztoku rtuťnatého	Přidáno vody	Nalezeno rtuti	Do práce vzato rtuti	Rozdíl ve rtuti
1.	100 cm^3	100 cm^3	0·09522 *g*	0·09488 *g*	— 0·00034 *g*
2.	10 cm^3	100 cm^3	0·09562 *g*	0·09488 *g*	— 0·00074 *g*
3.	100 cm^3	100 cm^3	0·09552 Hg	0·09488 *g*	+ 0·00064 *g*
4.	200 cm^3	0	0·19099 *g*	0·18976 *g*	+ 0·00123 *g*

Nalezeno tedy

v pokuse 1. 100·35 % množství theoretického
v pokuse 2. 100·77 % množství theoretického
v pokuse 3. 100·67 % množství theoretického
v pokuse 4. 100·64 % množství theoretického.

Stanovení rtuti v minerálu rumělce. — Nerost ten rozkládá se oxydační směsí sírovo-dusičnou mnohem pomaleji než umělý sirník rtuťnatý, pročež nutno rozetříti jej velice jemně v misce achatové.

0·3000 *g* takto práškované rumělky vařeno s oxydační směsí kyselin po 6 hodin v baňce kjeldahlisační, až hmota všechna zbělela, načež rozpuštěno ve vodě a roztok zředěn v litr. Ve 200 *cm*^{3} roztoku určena rtuť titrací. Spotřebováno tu 4·77 *cm*^{3} $^1/_{10}$ n. NaCl, což odpovídá 0·04834 *g* rtuti, čili analysovaná rumělka obsahuje 93·44 % sirníku rtuťnatého. — V jiných 200 *cm*^{3} určena pro kontrolu rtuť vážkově, a to dle předpisu Treadwell-Volhardova, platného pro roztoky silně kyselé. Nalezeno tím 0·0560 *g* HgS, dle čehož obsahuje analysovaný nerost 93·33 % HgS. Výsledek ten souhlasí výborně s hodnotou nalezenou při titraci (93·44 %). Ukazuje to, že se dá titrační methody naší s prospěchem použíti k rozboru netoliko čistého sirníku rtuťnatého, nýbrž i přirozené rumělky.

Stanovení rtuti v jejích organických derivátech. — K rozrušení organického podílu látky a převedení rtuti ve formu ionisovatelnou na Hg·· užili jsme předem téže oxydační směsi ($HNO_3 + H_2SO_4$), jaká brána k rozkladu rumělky. Jak se dalo očekávati, dává oxydační směs ta dobré výsledky u látek snadno rozložitelných, t. j. náležejících do řady mastné.

Zde *příklad* 1:

0·7585 *g* čistého, při 100^0 vysušeného jantaranu rtuťného vařeno v baňce kjeldahlisační s 30 *cm*^{3} konc. HNO_3 a 55 *cm*^{3} konc. H_2SO_4. Po 2 hodinách vešla veškerá látka v roztok, z něhož se po vychladnutí vyloučily krystallické soli rtuťnaté (dusičnan resp. síran). Všechen obsah baňky rozpuštěn ve vodě a doplněn na ½ litru. S roztokem provedeny dvě titrace, před nimiž pokaždé odstraněna kyselina dusitá:

	Užito roztoku	Přidáno vody	Spotřeba $^1/_{10}$ n. NaCl	Nalezeno rtuti	Nalezeno v jantaranu rtuti
a)	200 *cm*^{3}	0	23·4 *cm*^{3}	0·2369 *g*	78·08 %
b)	100 *cm*^{3}	100 *cm*^{3}	11·66 *cm*^{3}	0·11804 *g*	77·81 %

Rozdíl proti theoretickému obsahu rtuti v bezvodém jantaranu rtuťném (77·57 %) jest v pokuse prvém + 0·51 %, ve druhém + 0·24 %, což jest dostatečný stupeň přesnosti pro určování rtuti ve sloučeninách organických.

K rozrušení takových organických derivátů rtuti, jež náležejí řadě aromatické, by směs kyselin dusičné a sírové přirozeně nestačila, ježto tu jest působení její spíše nitrační. Zkoušena proto zprvu oxydace v 10% kyselině sírové za přidávání konc. roztoku $KMnO_4$. Směs ta neukázala výhod, ježto jest účinek její příliš pomalý a kapalina se při záhřevu snadno přehřeje, takže překypí.

Výborně osvědčila se za to k oxydaci aromatických derivátů směs konc. kyseliny dusičné a tuhého $KMnO_4$, kterou svého času doporučil Ch. Marie*) k oxydačnímu stanovení fosforu v látkách organických. Postupovali jsme tudíž po způsobu řečeného autora francouzského takto: Preparát k rozboru určený rozpuštěn v konc. HNO_3, tak aby na 1 *g* látky připadlo 15 až 20 cm^3 kyseliny. Na to směs zahřívána na vodní lázni, přidáván (po malých dávkách) jemně práškovitý manganistan. S každou další dávkou jeho sečkáno tak dlouho, až se předchozí odbarvila, a přidávání zastaveno tenkráte, kdy roztok podržel po několik minut svoji barevnost. Celková spotřeba $KMnO_4$ odpovídala 5 až 6 násobné váze užitého preparátu organického. Pak nechána reakční kapalina (i s obsaženým v ní kysličníkem manganu) vychladnouti a přidáván k ní roztok dusitanu alkalického (1 : 10) tak dlouho, až všechen kysličník manganu přešel v roztok a kapalina se vyjasnila. K odstranění kyseliny dusité okyseleno kyselinou sírovou a přidáváno nasyceného roztoku $KMnO_4$ v takovém množství, aby kapalina podržela po několik minut barvu růžovou. Zbarvení tomu odpovídající malý přebytek $KMnO_4$ odstraňován několika kapkami vodného roztoku kyseliny šťavelové.**)

Doklady: *Příklad* 2. — 0·8915 *g* benzoanu rtuťnatého spáleno dle hořejšího postupu a kapalina na konec doplněna v 1 litr.

Užito roztoku	Přidáno vody	Nalezeno titrací
100 cm^3	100 cm^3	0·0435 *g* rtuti
100 cm^3	100 cm^3	0·0437 *g* rtuti
200 cm^3	0	0·0870 *g* rtuti
200 cm^3	0	0·0880 *g* rtuti

Theorie vyžadovala by pro norm. benzoan rtuťnatý ve 100 cm^3 hořejšího roztoku 0·0404 *g* rtuti, kdežto titrací nalezeny hodnoty o něco vyšší. Přes to jsou čísla ta správná, neboť vážkové stanovení rtuti ve 100 cm^3 téhož roztoku poskytlo 0·0505 *g* HgS čili 0·0435 *g* rtuti, což dobře souhlasí s nahoře uvedenými čísly z titrací. Ukázalo se zkrátka, že užitý preparát nebyl zcela čistý, nýbrž obsahoval o něco málo více HgO než co odpovídá soli normálné.

Příklad 3. — Methoda naše applikována zde na látku, v níž je rtuť přímo vázána na atomy uhlíkové, t. j. podrobena rozboru difenylortuť

---

*) C. R. 1899 II, 766.

**) Kyseliny té užíti nutno jen tolik, kolik právě stačí k odbarvení roztoku, neboť při přebytku kyseliny šťavelové vylučují se během titrace jemné krystallky, jež znemožňují vystihnouti přesně konec titrace.

$Hg(C_6H_5)_2$: 1·1933 *g* difenylortuti spáleno 25 cm^3 konc. HNO_3 a 8 *g* $KMnO_4$. S podíly reakční kapaliny provedeny tři titrace i nalezeno

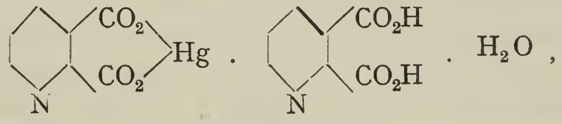
a) 0·1265 *g* rtuti proti theoretickým 0·1254 *g*,
b) 0·1888 *g* rtuti proti theoretickým 0·1882 *g*,
c) 0·1255 *g* rtuti proti theoretickým 0·1254 *g*.

I zde se tudíž methoda naše plně osvědčila.

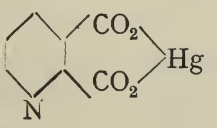
Příklad 4. — Zkoušeno zde, stačí-li oxydační směs Marie-ova i k rozrušení odolných heterocyklů, jakým jest na př. jádro pyridinové. Abychom to zjistili, analysovali jsme rtuťnatou sůl jedné z kyselin pyridinkarbonových, totiž kyseliny chinolinové.

Sůl ta není dosud v literatuře popsána, i bylo nutno teprve ji připraviti. Za tím účelem rozpuštěna kyselina chinolinová za horka v nejmenším množství vody a ke vroucímu roztoku přidáván čerstvě sražený kysličník rtuťnatý, pokud vcházel v roztok. Malý přebytek jeho rozpuštěn přídavkem trochy chinolinové kyseliny. Roztok vyloučil ochladnutím chinolinan rtuťnatý v podobě nahnědlé moučky těžko rozpustné, jež odssáta a vysušena na pórovitém talíři.

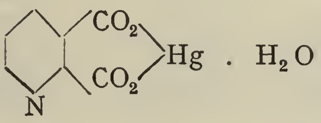
K rozboru vzato 0,4029 *g* preparátu na vzduchu vysušeného i nalezeno v něm (po oxydaci) třemi titracemi 36·34%, 36·65%, 36·41%, čili průměrem 36·57% rtuti. Nález ten ukazuje, že analysovaný preparát jest kyselým chinolinanem rtuťnatým s 1 mol. H_2O:



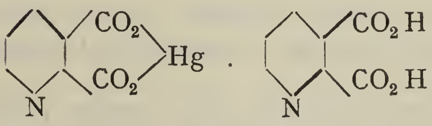
jenž vyžaduje theoreticky 36·42% rtuti, kdežto ostatní možné chinolinany rtuťnaté mají složení valně odlišné:



theoreticky 54,86% rtuti



„ 52,28% „



„ 37,65% „;

Přímé sušení soli při 105° potvrdilo nahoře uvedený obsah 1 mol. vody, neboť 0·8010 *g* soli na vzduchu vysušené ztratilo při 105° celkem 0·0256 *g*, což souhlasí výborně s theoretickým číslem pro monohydrát soli kyselé, jenž žádá ztrátu 0·0262 *g*.

Příklad 5. — Analysován sulfokyanid rtuťnatý. 0·5699 *g* preparátu zoxydováno dle postupu Marie-ova a rtuťnatý roztok zředěn na konec v ½ litr. Ve 150 cm^3 roztoku toho nalezeno titrací 0·1067 *g* rtuti, což odpovídá 62·23 % rtuti ve zkoumané soli, proti 63·33 %, jež vyžaduje theorie. Se 100 cm^3 téhož roztoku rtuťnatého provedena kontrolní analysa vážková, jíž nalezeno 0·1123 *g* HgS = 0·0712 *g* rtuti, čili 62·46 % rtuti, tedy tolik, kolik zjištěno bylo titrací.

Příklad 6. — Podroben rozboru kapalný derivát merkurorganický, totiž diethylortuť $Hg(C_2H_5)_2$. 0·2667 *g* preparátu rozloženo směsí Marieovou a v reakční kapalině určena rtuť titrací. Nalezeno tak 0·2052 *g* rtuti proti 0·2068 *g*, jež žádá si vzorec $(C_2H_5)_2Hg$.

Stanovení rtuti v halogenderivátech anorganických i organických. — Jak přirozeno, nelze solí kuchyňskou titrovati roztoků takových merkurisolí, jež jsou ve vodném roztoku jen nepatrně ionisovány ($HgCl_2$ a pod.). Lze však titraci naši applikovati i na ně, srazíme-li rtuť v nich obsaženou sírovodíkem jakožto sirník rtuťnatý, jejž zoxydujeme směsí kyselin dusičné a sírové, načež titrujeme vzniklý $Hg^{\cdot\cdot}$ solí kuchyňskou. K pokusům svým užili jsme nejčistšího (Merckova) kysličníku rtuťnatého a postupováno vždy takto: Známé množství kysličníku rozpuštěno v kyselině solné a roztok sražen za chladu nadbytečným sírovodíkem, tak aby vznikla černá sedlina sirníku rtuťnatého. Tato sfiltrována a promyta na filtru chloruprostém (Schleicher-Schüllově) vroucí vodou.*) Když jsme byli sirník rtuťnatý dokonale promyli (o čemž se ve filtrátě přesvědčíme dusičnanem stříbrným), vpravíme filtr i se sedlinou do baňky kjeldahlisační a zahříváme s oxydační směsí 1 d. konc. HNO_3 a 2 d. konc. H_2SO_4 tak dlouho, až se vše čiře rozpustí. Na to necháme vychladnouti, vlijeme do destillované vody a doplníme ke známce.

Doklady:

	Užito HgO	K rozpuštění vzato kyseliny solné	Filtr	Nalezeno rtuti	Theorie žádá rtuti	Rozdíl
a)	0·1718 *g*	15 cm^3	obyčejný	0·1573 *g*	0·1591 *g*	— 0·0018
b)	0·2203 *g*	20 cm^3	Schleicher-	0·2038 *g*	0·2040 *g*	— 0·0002
c)	0·1659 *g*	15 cm^3	Schüllův	0·1538 *g*	0·1536 *g*	+ 0·0002

Jak zřejmo, dochází se k výsledkům výborným, užije-li se filtru chloruprostého. Hodí se tudíž titrace chloridem sodným i k určování rtuti v jejích halogenderivátech a jest výhodna tím, že při ní odpadá loužení sušeného sirníku rtuťnatého sírouhlíkem.

---

*) Promývá-li se studenou vodou, zbývá totiž něco chloru v sedlině, což má za následek znatelné snížení výsledků titrace. Týž následek má i užití obyčejného papíru filtračního, jenž není prost chloru. Skýtá-li užitý filtrační papír znatelný zbytek popele, jest dobře určiti v něm chlor a bráti nalezené číslo v počet.

Methoda vedoucí přes sirník rtuti jest nezbytna i při titraci rtuti u takových organických derivátůn rtuti, jež obsahují vedle rtuti zároveň chlor. Přímou titrací utvořilo by se chloru odpovídající množství chloridu rtuťnatého, jenž by unikl titraci chloridem sodným, kdežto po předchozím převedení v sirník určiti lze titrací rtuť veškeru.

Příklad: 0·7625 *g* chloridu ethylnato-rtuťnatého, C_2H_5HgCl, rozloženo oxydační směsí Marie-ovou, roztok doplněn v ½ litr a rozdělen ve dvě polovice po 250 cm^3. V prvé polovici určena rtuť přímo solí kuchyňskou, i nalezeno 0·1445 *g* rtuti proti 0·1442 *g*, jež žádá theorie pro rtuť přímo titrovatelnou. Druhá polovice sražena sírovodíkem a získaný sirník rtuťnatý rozložen oxydační směsí řečenou. Nalezeno 0·2877 *g* rtuti proti 0·2884 *g*, jež žádá theorie pro veškeru rtuť užitého preparátu. Z výsledku přímé titrace (bez předchozího převedení v sirník) vyplývá i množství chloru obsaženého v preparátu, neboť

$$0{\cdot}1445 : x = 200{\cdot}6 : 35{\cdot}46.$$

Nalezeno tak	0·0260 *g* chloru,
theorie žádá	0·0255 *g* chloru,
rozdíl činí	0·0005 *g* chloru.

Titrace $Hg^{\cdot\cdot}$ u přítomnosti jiných kationtů kovových.

Přímá titrace rtuti solí kuchyňskou dá se provésti též u přítomnosti takových kationtů, které s aniontem nitroprussidovým neskýtají nerozpustného nitroprussidu. Jsou to vedle kovů alkalických a žíravých zemin na př. olovo, zinek, hliník, trojmocný chrom, trojmocné železo a konečně dvojmocný mangan. Zde několik dokladů:

Rtuť a olovo. — Roztok rtuťnatý (I): Rozpuštěno 2·1660 *g* HgO v kyselině dusičné a zředěno v litr. Roztok olovnatý (II): 1·2745 *g* $Pb(NO_3)_2$ rozpuštěno a doplněno v ½ litr.

Užito roztoku rtuťnatého	Užito roztoku olovnatého	Nalezeno
50 cm^3 = 0·1003 *g* Hg	0	0·1008 *g* rtuti
50 cm^3 = 0·1003 *g* Hg	100 cm^3 = 0·2220 *g* Pb	0·1008 *g* rtuti.

Přítomnost $Pb^{\cdot\cdot}$ nemá tudíž vlivu na výsledek titrace. Toho lze užiti při stanovení rtuti v látkách obsahujících i olovo. Třeba jen roztok olovnato-rtuťnatý sraziti sírovodíkem a vzniklou směs sirníků (HgS + PbS) rozrušiti oxydační směsí (1 obj. HNO_3 a 2 obj. H_2SO_4). Příklad: Směs 50 cm^3 roztoku I. (= 0·1003 *g* rtuti) se 100 cm^3 roztoku II. (= 0·2220 *g* olova) sražena sírovodíkem. Sraženina sfiltrována a důkladně promyta, načež filtr i s ní vpraven do baňky kjeldahlisační, přelit 10 cm^3 konc. H_2SO_4, a po zuhelnění filtru dodáno směsi konc. HNO^3 a konc. H_2SO^4 v takovém poměru, aby byl objemový poměr obou kyselin 1 : 2. Záhřevem přešel sirník olovnatý v síran, sirník rtuťnatý v rozpustný dusičnan a síran. Na to přidán dostatek vody (aby se kyseliny zředily a síran olovnatý úplně vyloučil), filtrováno a sedlina i filtr dobře promyty horkou vodou. Ve filtrátě nalezeno při titraci chloridem sodným 0·1003 *g* rtuti proti 0·1008 *g* zjištěným titrací přímou (viz nahoře).

Výsledek ten ukazuje, že lze rtuť ve směsi HgS a PbS správně titrací naší stanoviti.

Rtuť a zinek. — Roztok rtuťnatý vzat byl týž jako nahoře. Roztok zinečnatý připraven rozpuštěním 1·1678 *g* l. č. ZnO v kyselině dusičné a zředěním na ½ litr.

Přímá titrace:

	Užito roztoku rtuťnatého	Užito roztoku zinečnatého	Nalezeno titrací	Rozdíl
a)	73·11 cm^3 = 0·1465 *g* Hg	100 cm^3 = 0·1996 *g* Zn	0·1462 *g* Hg	— 0·0003
b)	50 cm^3 = 0·1003 *g* Hg	150 cm^3 = 0·2844 *g* Zn	0·0999 *g* Hg	— 0·0004.

Titrace nepřímá (po předchozím převedení obou kovů v sirníky):

a) Směs 100 cm^3 roztoku rtuťnatého a 50 cm^3 roztoku zinečnatého sražena bílým sirníkem ammonným, sirníky sfiltrovány, promyty a oxydovány směsí HNO_3 a H_2SO_4 až do rozpuštění. Ve vychladlé kapalině zrušena kyselina dusitá a pak titrováno. Nalezeno tak 0·2002 *g* rtuti proti 0·2006 *g* vzatým do práce, rozdíl jest tudíž — 0·0004 *g* rtuti.

b) 50 cm^3 roztoku rtuťnatého sraženo sírovodíkem a sedlina sfiltrována. Na týž filtr vpravena sedlina získaná účinkem sírovodíku na roztok připravený tím, že 100 cm^3 hořejšího roztoku zinečnatého zneutralisováno a pak okyseleno kyselinou octovou. Nalezeno tak u přítomnosti 0·1896 *g* zinku 0·1002 *g* rtuti proti 0·1003 *g*, jež vzaty do práce. Rozdíl = — 0·0001 *g*.

Rtuť a hliník. — Kombinace ta, jakož i obě následující, zkoušeny z toho důvodu, že bývají kovy příslušné obsaženy v nerostu rumělce a tudíž přecházejí při rozboru do roztoku.

0·3747 *g* HgO (t. j. 0·3470 *g* Hg) rozpuštěno v kyselině dusičné a přidán roztok 6·5400 *g* čistého kamence hlinito-ammonného (= 0·3960 *g* Al). Nalezeno titrací 0·3450 *g* rtuti čili 99·42 % rtuti vzaté do práce.

Rtuť a železo trojmocné. — Provedeny tři titrace u přítomnosti l. č. kamence železito-ammonného.

	Užito HgO	čili Hg	Užito kamence	čili Fe	Nalezeno titrací rtuti	čili theorie
a)	0·2665 *g*	0·2468 *g*	0·3522 *g*	0·0407 *g*	0·2467 *g*	100·04 %
b)	0·7438 *g*	0·6888 *g*	2·4064 *g*	0·2782 *g*	0·6885 *g*	99·96 %
c)	0·9880 *g*	0·9150 *g*	kam. hlin. 0·8634 *g* kam. želez. 0·4848 *g*	0·0516 *g* Al 0·1716 *g* Fe	0·9183 *g*	100·36 %

Rtuť a vápník. — K pokusům užito sráženého $CaCO_3$, vyvařeného vodou až do vymizení reakce na Cl' ve filtrátu.

Užito HgO	čili Hg	Užito $CaCO_3$	čili Ca	Nalezeno rtuti
0·1449 *g*	0·1342 *g*	2·5600 *g*	1·0240 *g*	0·1349 *g*
0·4349 *g*	0·4027 *g*	2·5600 *g*	1·0240 *g*	0·4024 *g*

Z hořejšího vysvítá, že Al''', $Fe^{\cdots}$ ani $Ca^{\cdot\cdot}$ nemají vlivu ve výsledek určení Hg titrací.

K závěru stůjž zde řada pokusů, při níž složení rtuťnatého roztoku k titraci určeného, bylo titrujícímu neznámo:

1. Roztok obsahoval 0·1356 *g* Pb a .... 0·1630 *g* Hg
nalezeno přímou titrací .... 0·1626 *g* Hg
2. Roztok obsahoval .... 0·9910 *g* Hg
Po sražení sírovodíkem nalezeno v sedlině .... 0·9830 *g* Hg
3. Roztok obsahoval .... 0·0609 *g* Hg
Stejným postupem jako při 2. nalezeno .... 0·0584 *g* Hg
4. Roztok obsahoval 0·1965 *g* Pb .... 0·0937 *g* Hg
a po sražení sírovodíkem nalezeno v sedlině .... 0·0937 *g* Hg
5. Roztok obsahoval vedle 0·2493 *g* kamence chromitodraselného .... 0·0464 *g* Hg
Nalezeno titrací .... 0·0494 *g* Hg*)
6. Roztok obsahoval 0·1455 *g* kamence chromitodraselného 0·0363 *g* Hg
a nalezeno titrací.. 0·0373 *g* Hg
7. Roztok obsahoval 0·3627 *g* kamence železito-ammonného 0·0644 *g* Hg
a nalezeno titrací.. 0·0652 *g* Hg
8. Roztok obsahoval 0·5769 $ZnSO_4 . 7H_2O$ .... 0·0524 *g* Hg
a nalezeno titrací.. 0·0524 *g* Hg
9. Roztok obsahoval 0·5769 *g* $ZnSO_4 . 7H_2O$ .... 0·0423 *g* Hg
a nalezeno titrací.. 0·0428 *g* Hg
10. Roztok obsahoval 0·5769 *g* $ZnSO_4 . 7H_2O$ .... 0·0822 *g* Hg
a nalezeno titrací.. 0·0826 *g* Hg

Résumé.

1. Roztoky kyslíkatých solí rtuťnatých titrovati lze roztokem chloridu sodného za užití nitroprussidu sodného jako indikátoru. Titrace budiž provedena za teploty obyčejné (na př. při 15°), množství indikátoru budiž 0·06 *g* a celkový objem kapaliny po titraci buď roven nebo blízký 200 cm^3. Po okyselení trochou chloruprosté kyseliny dusičné nebo sírové a po přidání indikátoru připouští se $^1/_{10}$ n. roztok NaCl (upravený rozpuštěním

---

*) Větší odchylku tu způsobuje zbarvení roztoku iontem $Cr^{\cdots}$, jež stěžuje poznání konce titrace.

5·8460 *g* l. č. taveného preparátu) tak dlouho, až zákal (nitroprussid rtuťnatý) úplně zmizí, t. j. kapalina se vyjasní. Doba uplynulá mezi přídavkem indikátoru k původní kapalině a počátkem titrace nebuď příliš dlouhá a nepřekračujž $^1/_4$ hodiny. — $^1/_{10}$ N. roztok NaCl má vůči roztoku rtuťnatému účinnost o něco málo vyšší než $^1/_{10}$ n. a nutno spotřebu NaCl děliti činitelem 0·9907, aby odpovídal $^1/_{10}$ n. roztokům rtuťnatým, jichž 1 cm^3 obsahuje 0·01003 *g* rtuti. Nalezneme tudíž gramy rtuti, násobíme-li spotřebované cm^3 $^1/_{10}$ n. NaCl faktorem 0·01003/0·9907 čili 0·010124.

2. Kyselina dusitá vadí titraci iontu $Hg^{\cdot}$ iontem $Cl^{\cdot}$ za užití nitroprussidu sodného jakožto indikátoru a nutno tudíž ji odstraniti. Činíme tak přídavkem roztoku $KMnO_4$ až do zbarvení růžového, načež přebytek $KMnO_4$ rušíme roztokem kyseliny šťavelové.

3. Titraci $Hg^{\cdot\cdot}$ chloridem sodným nevadí přítomnost kationtů, skýtajících rozpustné (ionisované) nitroprussidy. Jsou to na př. $Na^{\cdot}$, $K^{\cdot}$, $NH_4^{\cdot}$, $Ca^{\cdot\cdot}$, $Mg^{\cdot\cdot}$, $Pb^{\cdot\cdot}$, $Zn^{\cdot\cdot}$, $Mn^{\cdot\cdot}$, $Al^{\cdot\cdot\cdot}$, $Fe^{\cdot\cdot\cdot}$, $Cr^{\cdot\cdot\cdot}$. U posledního z řečených kationtů ($Cr^{\cdot\cdot\cdot}$) nebudiž koncentrace příliš vysoká, ježto se konec titrace v silně zbarvené kapalině méně přesně poznává než v bezbarvé.

4. Jde-li o to určiti rtuť v sirníku rtuťnatém, rozložíme jej (v baňce kjeldahlisační) varem se směsí 1 d. konc. HNO_3 (h. 114) a 2 d. konc. H_2SO_4 (h. 1·84), obou chloruprostých. Jest záhodno bráti k rozboru 0·25 *g* preparátu a rozložiti jej 17 d. HNO_3 a 34 d. H_2SO_4 o koncentracích uvedených. Sražený sirník rtuťnatý rozkládá se rychle, kdežto minerál rumělka jen zvolna, a musí býti velmi jemně utřena v misce achatové, má-li být rozklad úplný.

5. Běží-li o to, stanoviti rtuť v roztocích obsahujících zároveň halogen (chlor), vyloučíme rtuť v podobě sirníku rtuťnatého, tento promyjeme na filtru a rozrušíme i s filtrem 10 cm^3 konc. kyseliny sírové a pak nahoře uvedenou směsí kyselin HNO_3 a H_2SO_4. Na stejný způsob můžeme rozložiti i smíšenou sedlinu HgS + PbS, načež titrujeme rtuť ve filtrátu po $PbSO_4$.

6. Abychom určili rtuť v organických derivátech, zrušíme předem organický podíl preparátu: *a*) Jde-li o látku z řady mastné, postupujeme jako při rozkladu sirníku rtuťnatého t. j. zahříváme (do mírného varu) se směsí HNO_3 a H_2SO_4 až vše přešlo v roztok. *b*) U derivátů řady aromatické nebo heterocyklických nutno k oxydaci použiti směsi Marieovy (konc. HNO_3 a práškovitý $KMnO_4$). Mangan zredukujeme pak na sůl manganatou roztokem $NaNO_2$, zbylý dusitan odstraníme roztokem $KMnO_4$ a přebytek tohoto kyselinou šťavelovou.

Obsahuje-li organický derivát rtuti též halogen (chlor), rozložíme jej buď dle postupu *a* nebo (je-li třeba) dle *b*, vyloučíme rtuť z roztoku jakožto sirník rtuťnatý a ten dále zpracujeme k titraci (viz nahoře).

Z organické laboratoře chemické fakulty
na českém vysokém učení technickém v Praze.

Studie o halogenisovaných hydrazinech aromatických (část I.)

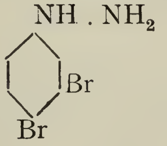
O skutečném a domnělém 3·4-dibromfenylhydrazinu.

Podávají

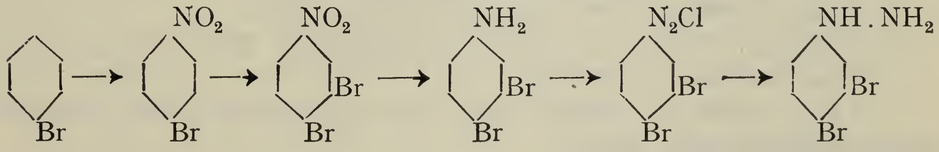
Prof. E. Votoček a Dr. P. Jírů.

Předloženo dne 22. října 1922.

Ode dvou let zabýváme se v laboratoři naší soustavným výzkumem arylhydrazinů v jádře halogenisovaných, a to za účelem jich použití k diagnose aldehydů a ketonů, zvláště v řadě cukrů. Mimo četné jiné fenylhydraziny bromované připravili jsme také 3·4-dibromderivát



při čemž byl nám východiskem brombenzol. Nitrací převeden byl tento v *p*-nitroderivát, bromací získán z něho (dle předpisu Scheufelenova, Lieb. Ann. *231,* 169) 3·4-dibromnitrobenzol, z něho redukcí 3·4-dibromanilin, odtud pak diazotací a redukcí 3·4-dibromfenylhydrazin:



Výsledný hydrazin, na této cestě poprvé připravený, měl býti totožný s látkou, kterou svého času obdržel Meyer (Lieb. Ann. *272,* 215) bromováním acetonfenylhydrazonu v roztoku chloroformovém a již popsal jakožto 3.4-dibromfenylhydrazin. Srovnáním obou produktů ukázalo se záhy, že jsou látky ty docela rozdílné a že látka Meyerova vůbec ani není dibromfenylhydrazinem, nýbrž toliko *p*-monobromfenylhydrazinem. Sluší tudíž veškerá udání Meyerova o 3·4-dibromfenylhydrazinu, jeho solech i jiných derivátech, z literatury škrtnouti.

Popíšeme zde zprvu vlastnosti skutečného 3·4-dibromfenylhydrazinu, jak jsme jej získali z 3·4-dibromanilinu, a v druhé části práce své podáme kritiku výsledků Meyerových, kterak plyne z opakování celé jeho práce.

I. Skutečný 3·4-dibromfenylhydrazin.

Příprava. — 10 *g* 3·4-dibromanilinu přidáno za míchání do 30 *g* konc. kyseliny solné, a chlazená kaše zdiazotována roztokem 3·7 *g* $NaNO_2$ v 18 cm^3 vody. K získanému roztoku soli diazoniové přidáván po malých dávkách ledem chlazený roztok 18 *g* krystal. $SnCl_2$ v 19 cm^3 konc. kyseliny solné, při čemž se redukční zplodina vylučovala krystallicky. Po 1hodinném stání látka odsáta, zbavena lisováním matečného louhu a zpracována na volnou zásadu hydrazinu tím, že rozmíchána s vodou a zalkalisována louhem sodným. Vyloučená sedlina hydrazinu odsáta, vysušena na pórovitém talíři a přehlacena z ligroinu (vroucího mezi 70—130°). Produkt jest hned po prvé krystallisaci čistý a taje při 75°. Tento bod tání se přehlacením z jiných rozpouštědel již nemění. Tak na př. taje látka překrystallovaná ze směsi chloroformu a petroletheru při 75°, z vody mezi 74° až 75°, ze zředěného alkoholu opět při 75°. Nejlépe hodí se k přehlacení ligroin, jestiť produkt z něho vyloučený nejstálejší, kdežto z vody přehlacený se snáze kazí.

Pokud se týče výtěžku, podotýkáme, že 330 *g* dibromanilinu poskytlo nám asi 230 *g* dibromfenylhydrazinu, což odpovídá asi 66% výtěžku theoretického.

Vlastnosti. — Z ligroinu krystalluje 3·4-dibromfenylhydrazin v nažloutlých jehličkách bodu tání 75° (nekorrig.). Je-li zcela čistý, jest na vzduchu dosti stálý; při dlouhém uchovávání však přece jen hnědne. Preparát takový se přehlacením snadno opět vyčistí. V alkoholu, etheru i chloroformu se dobře rozpouští; méně snadno v ligroinu, těžko v petroletheru, nesnadno ve vodě. Redukuje Fehlingovu kapalinu již za chladu.

Analysa. — Stanovení dusíku dle Dumasa:

Látky 0·1885 *g*, 18 cm^3 dusíku při 16° a 741 *mm*.

Nalezeno: 10·78% N, theorie pro $C_6H_3Br_2NH . NH_2$ 10·54%.

Stanovení bromu (dle Caria):

Látky 0·1897 *g*, 0·2670 *g* AgBr; nalezeno bromu 59·89%, theorie pro $C_6H_3B_2NH . NH_2$ 60·11%.

Stanovení C a H:

Látky 0·2056 *g*, 0·2053 *g* CO_2, 0·0455 *g* H_2O; nalezeno C 27·23%, H 2·47%; theorie pro $C_6H_3Br_2NH . NH_2$: C 27·08%, H 2·27%.

Soli 3·4-dibromfenylhydrzvinu.

Chlorhydrát získán ochlazením roztoku 1 *g* zásady v teplé přebytečné HCl. Rozpouští se v alkoholu. Bod rozkladu jest 215°. Stanovení HCl provedeno acidimetricky tím, že k vodnému roztoku soli přidáno známé množství NaOH a zpět titrováno *n*/10 kyselinou na fenoltfalein. Užito:

0·2353 *g* látky, 15 *cm*³ NaOH (= 14·5 *cm*³ *n*/10 H_2SO_4 s faktorem 0·996). Ke zpětné titraci spotřebováno 6·6 *cm*³ *n*/10 H_2SO_4 s faktorem 0·996, což odpovídá (14·5 — 6·6) . 0·996 čili 7·86 *cm*³ *n*/10 HCl. Theorie žádá 7·79 *cm*³ řečené kyseliny.

Plyne z toho, že jest 3·4-dibromfenylhydrazin zásadou jednosytnou.

Síran. — K alkoholickému roztoku 2 *g* zásady přidáno 2·3 *g* 95 % kys. sírové, zředěné alkoholem. Vychladnuvši, směs ztuhla. Odsáté krystallky sulfátu přehlaceny z vody, okyselené H_2SO_4. Vypadlé jehličky načervenalé, odsáté a promyté etherem, rozkládají se konstantně při 180°. Stanovení H_2SO_4 provedeno s 0·2166 *g* soli podobně jako u chlorhydrátu a nalezeno, že zde 1 mol. kys. sírové připadá na 2 mol. zásady, tedy že jde o síran normálný. Kyselejší síran získán, byla-li přidávána směs etheru + H_2SO_4 k etherickému roztoku zásady. Sůl ta načervenalá (promytá etherem) rozkládala se při 135° a ukázala při titraci, že jest kyselým síranem (z 1 mol. zásady + 1 mol. H_2SO_4) s trochou přimíšeného síranu normálného.

Šťavelan. — Alkoholický roztok 2 *g* zásady sražen alkoholickým roztokem 0·4 *g* kys. šťavelové. Vyloučená sedlina, sliabě nažloutlá, odsáta a promyta alkoholem i etherem do odbarvení. Sůl ta jest jak ve vodě tak i v alkoholu obtížně rozpustná. Bod rozkladu 162/3°.

Analysa: 0·2514 *g* látky dalo (dle Caria) 0·3042 *g* AgBr čili 51·49 % Br; theorie žádá pro sůl z 2 mol. zásady + 1 mol. $C_2H_2O_4$ 51·41 % Br.

Pikran. — Konc. alkoholické roztoky složek slity v poměru molekulárném. Vyloučený pikrát odsát a přehlazen několikanásobně z alkoholu, až se jeho bod rozkladu ustálil mezi 154° až 156°. Tvoří krásně žluté jehličky, ve vodě těžko rozpustné a vodou se rozkládající.

Analysa: Z 0·2183 *g* látky získáno dle Caria 0·1638 *g* AgBr, což odpovídá 31·93 % Br; theorie pro pikrát 32·29 % Br.

0·1816 *g* látky poskytlo dle Dumasa 22·9 *cm*³ dusíku při 15° C a 744 *mm*. Nalezeno tudíž 14·38 % N, množství theoretické jest 14·15 % N.

Další deriváty 3.4-dibromfenylhydrazinu:

Acetylderivát. — Získán několikahodinným varem 2 *g* zásady s 10 *cm*³ ledové kys. octové. Když přebytek kyseliny oddestillován, ztuhl zbytek krystallicky. Produkt vyčištěn krystallisací z vody a ze zředěného alkoholu až do stálého bodu tání 181°/2°, načež tvořil jehličky načervenalé, snadno rozpustné v alkoholu, těžko ve vodě i v etheru.

Analysa: 0·1985 *g* látky dalo dle Caria 0·2406 *g* AgBr čili nalezeno 51·59 % Br, vypočteno pro monoacetylprodukt 51·90 % Br. — 0·2046 *g* látky poskytlo dle Dumasa 16·8 *cm*³ N při 16° a 744 *mm*. Nalezeno dusíku 9·32 %; theorie žádá 9·10 %.

Acetylovati basi anhydridem octovým není výhodno, vzniká tu směs monoacetylderivátu a diacetylderivátu.

Hydrazon benzaldehydu. — Ekvimolekulárná množství jeho složek smíchána v roztoku alkoholickém. Vyloučený hydrazon vyčištěn přehlacením ze zředěného alkoholu do konstantního bodu tání 128°. Týž bod tání (127/8^0) měl i po přehlacení ze směsi chloroformu a petroletheru. Tvoří bílý, slabě nažloutlý prášek krystallický, ve vodě znatelně se nerozpouštějící, též v petroletheru těžko rozpustný.

Analysa: 0·1788 *g* látky dalo dle Caria 0·1908 *g* AgBr, což odpovídá 45·40 % Br. Theorie jest 45·16 % Br. — 0·2028 *g* látky dalo dle Dumasa 14·4 *cm*^{3} N při 15^0 a 743 *mm*. Nalezeno dusíku 8·08 %, theorie jest 7·92 %.

Hydrazon salicylaldehydu. — Připraven slitím složek (ekvimolekulárných množství) v roztoku alkoholickém. Vyloučený hydrazon dosáhl konstantního bodu tání 190^0 teprve po několikanásobné krystallisaci z alkoholu 96%ního. Tvoří pískovitou, krystallinickou hmotu žlutou (s nádechem do červena), rozpustnou v alkoholu i v benzolu.

Analysa: 0·1622 *g* látky poskytlo dle Caria 0·1636 AgBr čili 42·92 % Br. Theorie jest 43·20 % Br. — Spálením 0·2006 *g* látky dle Dumasa získáno 14·2 *cm*^{3} N při 20^0 a 744 *mm*. Nalezeno dusíku 7·87 %, theorie 7·57 %.

Hydrazon acetonu. — Ať pracováno s pouhou směsí složek, nebo u přítomnosti kyseliny octové, získán vždy jen produkt kapalný, ve způsobě oleje. Analyse nebyl podroben.

Hydrazon arabinosy. — K jeho přípravě zahřívána 1 mol. arabinosy s 1 mol. hydrazinu v roztoku alkoholickém asi 1 hodinu s chladičem zpětným. Ze syrupu, zbylého po odehnání rozpouštědla, sražen hydrazon etherem. Rozkládal se asi při 82/83^0. Nedal se zúplna vyčistiti, pročež nebyl analysován.

Hydrazon rhamnosy. — Získán obdobně jako právě uvedeno při derivátu arabinosovém. Etherem vyloučený produkt přehlacen ze zředěného alkoholu až do stálého bodu tání 153/4^0. Jest bílý, po případě pleťově zbarven, rozpouští se snadno v alkoholu ethylnatém i methylnatém. Jest nesnadno rozpustný ve vodě, etheru, benzolu i petroletheru.

Analysa: 0·2879 *g* látky dalo dle Caria 0·2615 *g* AgBr, což odpovídá 38·65 % Br; theorie jest 38·79 % Br. — 0·2286 *g* látky dalo spálením dle Dumasa 14·1 *cm*^{3} N při 14^0 a 742 *mm*. Nalezeno dusíku 7·05 %, theorie jest 6·80 %.

Hydrazon glukosy. — K přípravě jeho postupováno stejně jako nahoře. Etherem sražený produkt čištěn opětovaně tím, že rozpuštěn v několika kapkách alkoholu a sražen etherem. Získán na konec v podobě krystallinického prášku bílého, o bodu tání 165^0 až 167^0.

Analysa: 0·2374 *g* látky dalo 0·2003 AgBr. Nalezeno tudíž 37·34 % Br, theorie pro bezvodý hydrazon žádá 37·34 % Br, pro hydrát pak 35·84 %.

Vedle řečeného hydrazonu isolovány byly z produktu reakčního ještě bílé krystallky při 70^0 tající a neměnící tento bod tání ani po novém čištění z alkoholu a etheru. Obsahovala pouze 30·25 % Br, tedy ještě méně než hydrazonhydrát. Povahu látky té jsme prozatím blíže nestudovali.

Hydrazon fruktosy a hydrazon galaktosy získány na stejný způsob, ale daly se jen špatně čistiti, pročež nebyly analysovány.

Osazon glukosy. — Připraven na obvyklý způsob varem cukru s chlorhydrátem zásady, octanem sodným a vodou. Odsátý produkt vymyt acetonem a přehlacen z fenetolu. Tvoří žluté krystallky, tající (za rozkladu) konstantně mezi 225⁰ až 226⁰. Nerozpouští se znatelně v methylalkoholu, etheru, benzolu, acetonu, jen obtížně v ethylalkoholu, snadno v pyridinu i v kyselině octové.

Analysa: 0·1983 *g* látky poskytlo spálením dle Dumasa 14·7 *cm*³ N při 12⁰ a 750 *mm*, což odpovídá 8·63% dusíku; theorie jest 8·32%

Týž osazon získán též z fruktosy. (Nalezeno v něm dusíku 8·58%, theorie jest 8·32%.)

II. Domnělý 3·4-dibromfenylhydrazin Meyerův.

Již předběžné srovnání hydrazinu našeho se zásadou, již **Mayer** (Lieb. Ann. *272*, 215/9) prohlašuje za 3·4-dibromfenylhydrazin, ukázala nesprávnost jeho nálezů a vedla nás přirozeně k tomu, že jsme celou práci jeho pro kontrolu opakovali.

Postupovali jsme přesně dle jeho předpisu pro bromaci acetonfenylhydrazonu, v němž byla nám hned od počátku nápadna ta okolnost, že zmíněný autor používal k zavedení 2 atomů bromu do molekuly hydrazinové toliko 1 molekuly bromu, ač by reakce theoreticky vyžadovala 2 molekul halogenu.

Roztok 50 *g* čerstvě předestillovaného acetonfenylhydrazonu ve 250 *g* chloroformu cchlazen zevně ledem a připuštěno k němu z dělící nálevky a za míchání mechanického po kapkách celkem 55 *g* bromu (t. j. množství odpovídající 1 mol. Br_2) rozpuštěného ve 100 *g* chloroformu. Reakční kapalina barvila se temně červeně a vylučovala již během přidávání bromu sedlinu. Po 24hodinném stání směs, silně páchnoucí a dráždící oči k slzení, odsáta, a tuhý produkt zprvu promyt chloroformem, pak vyvařen vodou. Vešel tu z části v roztok, z části zůstal nerozpuštěn v podobě černého mazu. Roztok přesycen NaOH, vypadlá zásada (b. t. 95⁰—98⁰) znovu rozpuštěna ve zředěné HCl, čištěna spodiem a znovu sražena NaOH. Sedlina nyní získaná odsáta a přehlacena z ligroinu. Získány tak krystallky o bodu tání 105⁰ až 106⁰, jenž přehlacením z vody stoupl na 108⁰ až 109⁰, aniž se další krystallisací měnil.

Výtěžek byl 10 *g* a látka měla tyto vlastnosti: Z ligroinu nebo z vody přehlacena, tvořila krásné jehlice dlouhé, byla snadno rozpustná v alkoholu, etheru i horkém ligroinu, těžce ve vodě i petroletheru. Silně redukovala Fehlingovu kapalinu. Ležením na vzduchu záhy se barvila červeně a kazila se. Měla tedy vlastnosti, jakéž udává pro preparát svůj Meyer, jenom bod tání se opakovaným čištěním zvýšil o několik stupňů (Meyer pozoroval 104⁰).

Analysa látky sušené nad H_2SO_4 ukázala však, že to není dibromderivát, jak udává Meyer, nýbrž pouhý monobromfenylhydrazin:

0·3013 *g* látky dalo .... 0·4230 *g* CO_2 a 0·0969 *g* H_2O
0·2096 *g* „ „ (dle Dumasa) 28·4 cm^3 N při 20° a 749 *mm*
0·2210 *g* „ „ (dle Caria).... 0·2232 *g* AgBr, tudíž

	nalezeno:	Vypočteno pro $C_6H_4BrNH . NH_2$
uhlíku	38·30 %	38·51 %
vodíku	3·60 %	3·77 %
dusíku	15·21 %	14·98 %
bromu	42·97 %	42·73 %

Další výzkum náš ukázal, že produkt dle postupu Meyerova získaný je *para*-bromderivátem. Zjistili jsme to jednak bodem tání, převedením v *p*-bromanilin a konečně přípravou rozmanitých derivátů, jež srovnali jsme pak s příslušnými deriváty *p*-bromfenylhydrazinu. (Tento připravili jsme si bromací fenylhydrazinu v prostředí chlorovodíkovém dle předpisu Michaelisova.)

Bod tání produktu, získaného dle Meyera, zůstával nezměněný (108°) i tenkráte, když k látce před tím přimíšeno *p*-bromfenylhydrazinu (připraveného dle Michaelise). Jsou tudíž obě látky totožné. Když naproti tomu smíšen skutečný dibromfenylhydrazin (b. t. 75° C) s produktem získaným dle Meyera (b. t. 108°), klesl bod tání na 56°, což poukazuje na různost obou látek.

Převedení v p-bromanilin. — Meyer uvádí ve své práci, že jeho (ovšem domnělý) dibromfenylhydrazin při redukci zinkem a kyselinou solnou skýtá na místě dibromanilinu toliko *p*-bromanilin, z čehož usuzuje, že při redukci se vymýtí netoliko jeden z atomů dusíkových, nýbrž i atom bromový, jakož odpovídá rovnici:

$$C_6H_3Br_2NH . NH_2 + 4\ H = C_6H_4BrNH_2 + NH_4Br.$$

Tentýž zjev pozoroval i při redukci 2·4-dibromfenylhydrazinu. Vzhledem k nespolehlivosti jiných jeho údajů bylo nutno i tuto část práce jeho opakovati, hlavně ovšem redukci 2·4-dibromfenylhydrazinu, neboť že domnělý Meyerův 3·4-dibromfenylhydrazin povede k monoderivátu, bylo a priori velmi přirozené. Stůjž zde popis redukce:

Do roztoku 5 *g* Meyerova hydrazinu v zředěné HCl vnášeny střídavě HCl a prášek zinkový, při čemž redukce podporována zahříváním na vodní lázni. Když vzorek kapaliny po alkalisaci nejevil redukční mohutnosti vůči Fehlingově kapalině, byl rozklad skončen, načež kapalina reakční sfiltrována, filtrát přesycen natronem a vytřepán etherem. Po odehnání etheru zbyl hnědý olej, jenž záhy ztuhl. Přehlacením z petroletheru získány pěkně vyvinuté krystalky, bodu tání při 64° až 65°, jenž novým přehlacením z téhož rozpouštědla ještě o něco málo stoupl, totiž na 66° až 67° C. Číslo to souhlasí s udáním literatury pro *p*-bromanilin (66°), kdežto Meyer nalezl 62° až 63°. I analysa potvrdila, že redukční zplodina jest monobromanilinem: 0·2016 *g* vysušené látky dalo 0·2170 *g* AgBr, což odpovídá 45·83 % Br, kdežto theoretické číslo jest 46·46 %.

Důležitější bylo seznati, jak se při obdobné redukci chovají skutečné dibromfenylhydraziny. Zkusili jsme jednak náš 3·4-dibromderivát, jednak 2·4-dibromderivát připravený na obvyklý způsob z 2·4-dibromanilinu. Z obou získali jsme účinkem zinkového prachu a kyseliny solné *p*-monobromanilin (analysa produktu z 3·4-derivátu: 46·25 % Br, z produktu 2·4: 45·94 % Br).

Nastává tudíž skutečné odštěpování bromu při redukci zinkem a kyselinou solnou, a tato okolnost asi zavedla Meyera ke klamné domněnce, že produkt připravený jím účinkem bromu na acetonfenylhydrazon jest dibromfenylhydrazinem, kdežto ve skutečnosti jest, jak plyne z práce naší, toliko *p*-monobromfenylhydrazinem, jehož redukční štěpení vede normálně k monobromanilinu.

Deriváty produktu Meyerova (domnělého 3·4-dibromfenylhydrazinu) a korrespondující deriváty p-bromfenylhydrazinu.

Z obou hydrazinů připraveny deriváty tyto: Pikrát, derivát acetylový, benzaldehydový, salicylaldehydový i acetonový, a to podle vlastních předpisů Meyerových, aby vedení důkazu bylo přesné.

Pikrát. — K alkoholickému roztoku 2 *g* zásady Meyerovy přidán roztok 2·4 *g* kyseliny pikrové v témže rozpouštědle. Vyloučené jehlice odsáty po 24 hodinách a přehlaceny několikráte z konc. alkoholu, až se jejich bod rozkladu ustálil na 128° až 129°. Pikrát ten tvoří krásně žluté jehličky, dobře rozpustné v alkoholu i vroucí vodě, nesnadno v etheru. Při rozboru nalezeno v něm 19·06 % Br, tedy tolik, kolik žádá theorie pro pikrát monobromfenylhydrazinu (19·20 % Br). A vskutku shledán pikrát ten úplně shodným s pikrátem, připraveným na zcela obdobný způsob z *p*-bromfenylhydrazinu. V pikrátu tomto nalezli jsme rozborem 19·06 % Br proti theoretickým 19·20 %.

Acetylderivát. — 2 *g* hydrazinu Meyerova a 4 cm^3 anhydridu octového zahříváno asi po 5 minut na lázni vodní, načež reakční kapalina po čtyřikráte odpařena s alkoholem. Zbylý produkt, vychladnutím ztuhnuvší, poskytl dvojnásobným přehlacením z vodného alkoholu (1 : 1) jehličky bílé, rozkládající se konstantně při 167°. Rozpouštěly se nejsnáze v alkoholu, méně snadno ve vroucí vodě i v etheru, velmi těžko ve chladné vodě i ligroinu. Delším záhřevem redukovaly kapalinu Fehlingovu. Nalezeno v nich (dle Caria) 34·60 % Br, theorie žádá 34·89 %.

Ze všeho toho vyplývá úplná totožnost látky té se známým již acetyl*p*-bromfenylhydrazinem (b. t. 167°).

Benzalderivát. — 2 *g* hydrazinu Meyerova rozpuštěny za tepla v potřebném množství alkoholu a přidán 1 *g* čerstvě předestillovaného benzaldehydu. Vyloučený hydrazon odsát a vysušen. Tál při 124°, kterýžto bod tání stoupl několikanásobným přehlacením z alkoholu (96%ního) na stálou hodnotu 126^0 až 127^0. Analysou nalezeno v látce 28·80% Br.

Jest tudíž totožná s benzal-*p*-bromfenylhydrazonem, jenž obsahuje theoreticky 29·05% Br a taje dle údání literatury (Lieb. Ann. *324,* 314) při $127·5^0$.

Derivát salicylaldehydu. — Sloučeninu tu Meyer v práci své nepopisuje. Připravili jsme ji smíšením 2 *g* hydrazinu s 1·3 *g* čerstvě předestillovaného salicylaldehydu. Ztuhlou směs překrystallovali jsme několikráte z alkoholu 96%ního. Ať jsme vyšli od hydrazinu Meyerova nebo od kontrolního *p*-bromfenylhydrazinu, získali jsme vždy lesklé krystallky (šupinky, event. jehlice) konstantního b. t. 179^0. V produktu připraveném z hydrazinu Meyerova nalezli jsme rozborem 27·24% Br, v produktu z kontrolního *p*-bromfenylhydrazinu 27·28%, což souhlasí v obou případech s theorií pro monobromfenylhydrazon salicylaldehydu, jež žádá 27·45% Br.

Derivát acetonový. — Ani této sloučeniny Meyer nepopisuje. My připravili jsme ji takto: 2 *g* hydrazinu Meyerova rozpuštěny v acetonu, při čemž se kapalina sama od sebe zahřála. Hydrazon sražen z roztoku acetonového vodou a vysušen. Tál surový při 90^0 až 91^0. Přehlacen z vodného alkoholu (1 : 1), tvořil slabě nažloutlé šupinky b. t. 91^0 až 92^0, z ligroinu šupinky větší b. t. 92^0, z petroletheru tvořil šupinky perleťově lesklé b. t. 93^0. Rozpouští se dobře i v chloroformu. Povařen s konc. HCl rozkládá se v chlorhydrát hydrazinu, jenž vypadne z roztoku. Delším zahříváním redukuje Fehlingův roztok. Na vzduchu jest nestálý a mění se v maz již po několika hodinách.

Jest totožný s *p*-bromfenylhydrazonem acetonu, pro nějž udává literatura b. t. 93^0 (Lieb. Ann. *248,* 95).

Budiž poznamenáno, že 3·4-dibromfenylhydrazon acetonu jest za obyčejné teploty kapalný.

Ze všeho, co dosud uvedeno, vyplývá s určitostí, že domnělý 3·4-dibromfenylhydrazin Meyerův není nic jiného než monobromfenylhydrazin, a to para; majíť isomery meta a ortho vlastnosti zcela jiné (meta-bromfenylhydrazin jest kapalný, ortho- taje již při 48^0 C).

III. Vyšší bromovaní acetonfenylhydrazinu.

Zajímalo nás zjistiti, je-li vůbec možno vhodnou změnou předpisu, t. j. množství užitého bromu, dojíti od acetonfenylhydrazonu k dibromfenylhydrazinům, po případě ještě vyšším bromderivátům. Za tím účelem působili jsme na hydrazon ten $2\frac{1}{2}$ mol. čili 5 atomy bromu. Zde popis příslušného pokusu:

K roztoku 30 *g* acetonfenylhydrazonu ve 150 *g* $CHCl_3$ přikapán za chladu a stálého míchání roztok 82 *g* bromu ve 100 *g* $CHCl_3$. Po 20hodinném stání produkt reakční odsát a vyvařen vodou, načež roztok filtrován, aby zbaven byl nerozpustných mazů. Z filtrátu vyloučena louhem sodným volná zásada hydrazinová a přehlacena z ligroinu. Tála při 91° a po další krystallisaci z vody při 92° C, kterýžto bod tání zůstával i po přehlacení z ligroinu konstantním.

Něco málo téhož produktu získáno ještě z řečených mazů, a to tím, že vyvařeny velice zředěnou HCl, a filtrát stejně zpracován jako dříve.

Čistý produkt byl přesnadno rozpustný v etheru, méně snadno v alkoholu i v ligroinu, těžko ve vodě i v petroletheru. Na vzduchu byl stálý, redukoval Fehlingovu kapalinu. Svými vlastnostmi shodoval se úplně s 2·4-dibromfenylhydrazinem, jenž popsán v literatuře (Lieb. Ann. *272*, 219, B. B. *26*, 2192). Stanovení bromu úplně potvrdilo shodu tu, nalezenyť v molekule látky 2 atomy bromu: 0·1854 *g* látky dalo 0·2596 *g* AgBr, což odpovídá 59·60 % Br. Theoretické číslo pro dibromfenylhydrazin jest 60·10 % Br, kdežto monobromfenylhydrazin žádá jen 42·73 % Br.

Připomínáme, že výtěžek tohoto 2·4-dibromfenylhydrazinu byl velmi neuspokojivý.

Z uvedeného vysvítá, že i kdyby Meyer při práci své byl získal dibromfenylhydrazin — jak se mylně domníval — nebyl by to býval 3·4-derivát, jak uvádí autor ten, nýbrž od něho docela rozdílný derivát 2·4.

Více než dva bromy jsme přímou bromací acetonfenylhydrazonu nemohli vpraviti do jádra benzolového. Nepodařilo se to ani tenkráte, když jsme vyšli od hotového 2·4-acetondibromfenylhydrazonu a tento bromovali v roztoku chloroformovém 1 molekulou bromu. Příčina toho vysvitne z kapitoly následující.

IV. O reakčním mechanismu při účinku bromu na acetonfenylhydrazon.

Jaká jsou jednotlivá stadia reakční při bromování acetonfenylhydrazonu, Meyer experimentálně nezkoušel. Předpokládá toliko, že předem vstupuje brom do jádra benzolového, načež se účinkem vzniklého HBr odštípne zbytek acetonový.

My pokládali jsme za užitečné sledovati podrobně průběh reakce při působení 1 mol. Br. na 1 mol. acetonfenylhydrazonu, tedy za podmínek, za jakých pracoval Meyer, a to již z toho důvodu, abychom si vyložili, proč vpravování 2 at. bromu na jádro jen špatně prochází, vpravení pak více bromů vůbec se nedaří.

Zachytili jsme tyto meziprodukty bromace: bromhydrát aceton-*p*-bromfenylhydrazonu, bromhydrát *p*-bromfenylhydrazinu a bromované deriváty diazoniové.

Isolace bromhydrátu aceton-p-bromfenylhydrazinu. — 25 *g* acetonfenylhydrazonu bromováno na způsob Meyeůrv v roztoku $CHCl_3$ (130 *g*) přikapováním 27 *g* bromu (rozpuštěného v 50 *g* téhož rozpouštědla), za stálého míchání. Kapalina zbarvila se s počátku žlutě, později hnědočerveně. Po čtvrt hodině jevil roztok jakýsi var (ač měl teplotu pouze 8^0 C). Po půl hodině kapalina zhoustla a záhy ztuhla v kaši. Stalo se tak po přidání něco málo větší dávky bromu než co činí polovice užitého bromu. Kašovitá kapalina odsáta, při čemž zbylo na filtru asi 18 *g* produktu I. Červený filtrát poskytl po 2½ hodinách malounko šupinek stříbrolesklých (produkt B).

Produkt I. byl slabě narůžovělý, místy prostoupen stříbrolesklými šupinkami. Rozkládal se při 140^0. Rozpouštěl se dobře v ethylalkoholu (96%), v kyselinách (HCl, H_2SO_4, HNO_3, $C_2H_4O_2$), znatelně i ve vodě, etheru i benzolu. Varem s louhy rozkládal se v kapičky chladem tuhnoucí. Titrace jeho ukázala, že jest to bromhydrát aceton-monobromfenylhydrazonu: 0·2493 *g* látky rozpuštěno za tepla v 25 cm^3 kyseliny sírové (= 25·5 $n/10$ NaOH, $f = 0{\cdot}984$), načež ztitrováno louhem sodným zpět, za užití fenoltfaleinu. Spotřebováno: 35·1 cm^3 $n/10$ NaOH ($f = 0{\cdot}984$), z čehož vysvítá, že látka odštěpuje (35·1 — 25·5) . 0·984 cm^3 $n/10$ HBr, t. j. 9·44 cm^3 $n/10$ HBr. Theorie žádá sice pro $Br . C_6H_4NH . N (HBr){=}C (CH_3)_2$ o něco méně, totiž 8·01 cm^3 $n/10$ HBr, ale vyšší o něco výsledek padá zajisté na vrub slabého znečistění soli produktem II. (šupinkami stříbrobílými, jenž jest bezpochyby bromhydrát pouhého *p*-bromfenylhydrazinu, t. j. látkou o větším obsahu HBr.

Že nahoře uvedený bromhydrát obsahuje složku acetonovou, dokázáno i přímo tím, že vzorek látky předestillován s 12% kyselinou solnou a k destillátu přidáno louhu + jodkaliumjodu. Vyloučila se okamžitě hojná sedlina jodoformu, na důkaz přítomného acetonu.

Pro kontrolu připravili jsme ostatně bromhydrát aceton-*p*-bromfenylhydrazonu i uměle. Do chlazeného roztoku 4 *g* suchého hydrazonu ve 20 *g* $CHCl_3$ uváděn suchý HBr. Za krátko počaly se vylučovati hrudky žlutého produktu, jenž promyt $CHCl_3$ a vysušen ve vakuu, rozkládal se při $154/5^0$ a choval se k rozpouštědlům zcela tak jako nahoře popsaný produkt I.

Z filtrátu po látce té vylučovaly se během doby stříbrolesklé šupinky, rozkládající se při $204/5^0$, jež odpovídaly vlastnostmi svými produktu II.

S oběma produkty umělými provedena nahoře vytčená zkouška na zbytek acetonový; jak se dalo očekávati, dopadla kladně u látky odpovídající I., záporně u látky odpovídající II.

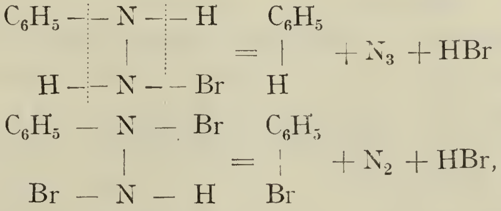
Nahoře uvedená látka I. (bromhydrát aceton-*p*-bromfenylhydrazonu), získaná bromací acetonfenylhydrazonu, přechází již při pouhém protřepání s vodou ve volný bromfenylhydrazon acetonu. Tento získán ve způsobě žluté látky b. t. 93^0, jež po přehlacení z petroletheru tála mezi 93 a 94^0 a neměnila svého bodu tání dalšík rystallisací z alkoholu. Byla velice nestálá na vzduchu, záhy se kazila a mazovatěla. Proto analysována jen látka čerstvá, ve vakuu vysušená:

0·2190 *g* látky dalo 0·3796 *g* CO_2 a 0·0996 *g* vody; 0·2203 *g* látky dalo 0·1824 *g* AgBr; 0·2023 *g* dalo spálením 22·1 cm^3 N při 14^0 a 749 *mm*. Nalezeno tudíž 47·29% uhlíku, 5·08% vodíku, 35·23% bromu a 12·60%

dusíku, což vede výpočtem k nejjednoduššímu vzorci $C_9H_{11}N_2Br$, shodným s formulou pro bromfenylhydrazon acetonu.

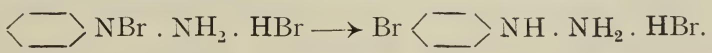
Z povahy vystižených meziproduktů vysvítá, že prvá stadia reakční bromaci acetonfenylhydrazonu jsou tato: Když byl vstoupil brom do parapolohy jádra aromatického, adduje se substituční reakcí tou vzniklý HBr na jeden z dusíků a vytvoří bromhydrát hydrazonu. Ten však pak odštěpuje svůj zbytek acetonový a skýtá *p*-bromfenylhydrazin.

Další brom působí však ještě jinak. Chattaway, jenž v řadě prací (C. *1909*, 595, *1908* I 2149, *1909* II 274) studoval účinek bromu na primárné hydraziny aromatické v kyselém prostředí, ukázal, že se při něm tvoří hlavně bromované benzoly, menší měrou pak též v jádře substituované fenylhydraziny, dále hydrazobenzol, azobenzol, difenyl i anilin. Dle něho bromují se hydraziny aromatické předem při dusíku a substitucí tou vzniklé N-brom-arylhydraziny (jež jsou při velkém přebytku kyseliny dosti stálé), jednak se štěpí ve smyslu solí diazových, takže vzniká uhlovodík buď prostý nebo bromovaný:

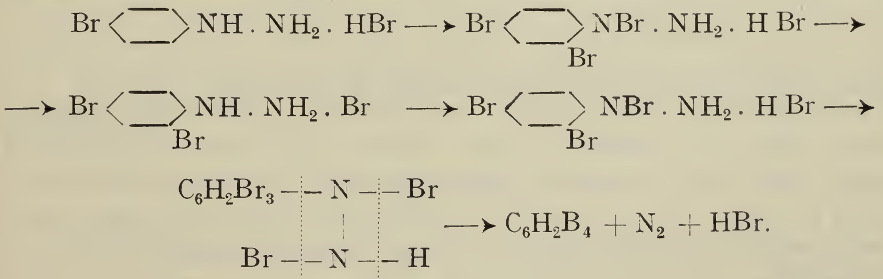


$$\begin{array}{ccccc} C_6H_5 - & N & - H & & C_6H_5 \\ & | & & = & | \quad + N_3 + HBr \\ H - & N & - Br & & H \\ C_6H_5 - & N & - Br & & C_6H_5 \\ & | & & = & | \quad + N_2 + HBr, \\ Br - & N & - H & & Br \end{array}$$

jednak se přesmykují, t. j. brom stěhuje se do jádra aromatického, takže resultuje sůl bromarylhydrazinu, na př.:



Vzniklá sůl bromarylhydrazinu propadá pak znovu reakcím nahoře řečeným, na př.:

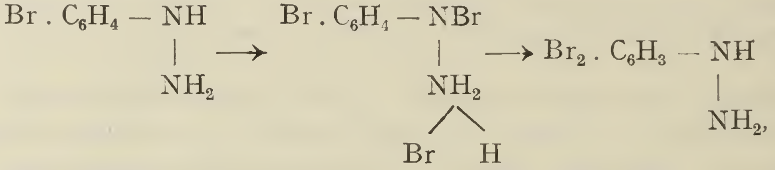


$$\begin{array}{ccc} C_6H_2Br_3 - & N & - Br \\ & | & \\ Br - & N & - H \end{array} \longrightarrow C_6H_2B_4 + N_2 + HBr.$$

Výše bromované arylhydraziny se přítomným bromem hned dále přeměňují, aspoň udává Chattaway, že isoloval 2·4-dibromfenylhydrazinu jen malé množství, tribromfenylhydrazin pak se mu vůbec nezdařilo zachytiti.

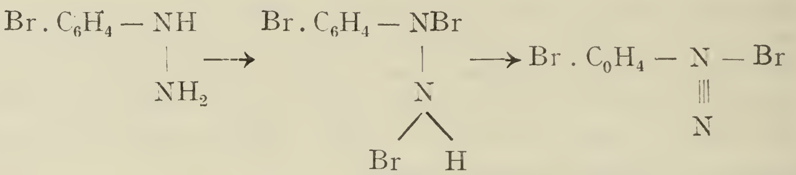
Applikujeme-li pozorování Chattaway-ovo na případ náš, t. j. bromování acetonfenylhydrazonu, seznáváme, že další mechanismus reakční musí být tento: Jakmile se odštípne zbytek acetonový, jme se brom reagovati substitučně s vodíky skupiny hydrazinové. Z toho vzejdou N-bromfenylhydraziny, jež buď se přesmyknou v 2·4-dibromfenylhydrazin:

I.

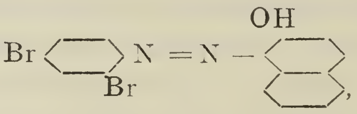


nebo se mění v bromid diazoniový:

II.



Že reakce I. vskutku nastává, dokázali jsme již nahoře tím, že jsme 2·4-dibromfenylhydrazin v substanci isolovali. Zbývalo jen ještě podati důkaz pro tvorbu diazoniových bromidů. K tomu cíli provedli jsme pokus tento: K roztoku 25 *g* acetonfenylhydrazonu ve 170 *g* $CHCl_3$, chlazeném zevně směsí ledu a soli kuchyňské, přikapáván za míchání mechanického roztok 162 *g* Br v 70 *g* $CHCl_3$, a to tak zvolna, že celá operace trvala 1½ hodiny. Vzato tudíž na 1 mol. hydrazonu 6 molekul bromu. Po 3hodinném stání tmavě červená zplodina reakční rozdělena odsátím v sedlinu a podíl kapalný. Ze sedliny té nepodařilo se získati tribromfenylhydrazin. Tmavě červený filtrát, složený ze dvou kapalin, rozdělen v dělicí nálevce. Hořejší podíl obsahoval hlavně chloroform a nereagoval ani s β-naftolem ani s ammoniakem. Těžší podíl dolejší neskýtal ammoniakem azoimidu, za to vyloučil, vlit byv do alkalického roztoku β-naftolu (20 *g* naftolu, 20 *g* KOH, 500 *g* H_2O), červenohnědou sedlinu barviva. Toto zbaveno mazů rozetíráním s benzinem, načež tvořilo hmotu tmavě červenou, krystallinickou. Bylo nerozpustné ve vodě, louzích i ammoniaku, těžko rozpustné, a to barvou oranžovou, v ethylalkoholu, amylalkoholu, kyselině octové, snadno v konc. H_2SO_4, jíž zbarvilo fialově. Barvilo (v roztoku alkoholickém) hedvábí i vlnu špinavě oranžově. Hydrosiřičitanem sodným se redukovalo. Zkrátka chovalo se jako azobarvivo. Spektrálný rozbor, provedený mřížkovým spektrometrem Zeissovým,*) ukázal, že jest totožná s 2·4-dibromazo-β-naftolem



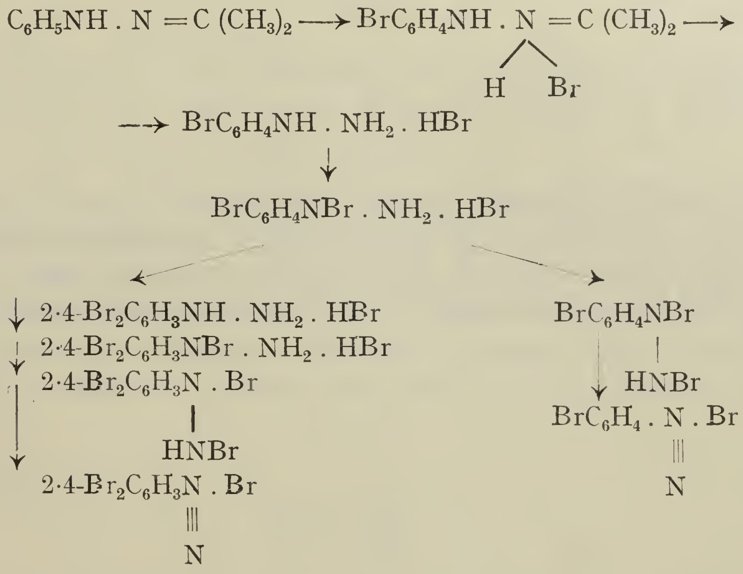
---

*) Přístroj dal nám k použití p. prof. Jos. Schneider, začež mu tímto upřímně děkujeme.

kterýž jsme si (podobně jako též *p*-brom-benzol-azo-β-naftol) za účelem srovnání připravili z příslušného aminu (2·4-dibromanilinu) diazotací a kopulací s β-naftolem. Jak barvířské vlastnosti, tak i absorpční spektrum naší sloučeniny souhlasily úplně s 2·4-dibrom-azo-β-natolem. Od monobrom-azo-β-naftolu lišilo se absorpčním spektrem v H_2SO_4, nerozpustností v alkoholu, i svojí barvou (jest méně ohnivé než monobrombarvivo).

Dokázáno tudíž, že se při bromaci acetonfenylhydrazonu vskutku tvoří diazoniumbromid (v jádře dvakráte bromovaný), jak jsme předvídali z práce Chattawayovy, z čehož vyplývá též nemožnost, aby se tvořil tribromfenylhydrazin, neboť hydrazinová skupina se silným účinkem bromu trvale přeměňuje.

Co zde dosud bylo pověděno o účinku bromu na acetonfenylhydrazin, můžeme shrnouti v toto schema mechanismu reakčního:



$$C_6H_5NH\,.\,N=C\,(CH_3)_2 \longrightarrow BrC_6H_4NH\,.\,\underset{H\quad Br}{N=C}\,(CH_3)_2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow BrC_6H_4NH\,.\,NH_2\,.\,HBr \longrightarrow BrC_6H_4NBr\,.\,NH_2\,.\,HBr$$

$$2{\cdot}4\text{-}Br_2C_6H_3NH\,.\,NH_2\,.\,HBr \longrightarrow 2{\cdot}4\text{-}Br_2C_6H_3NBr\,.\,NH_2\,.\,HBr \longrightarrow 2{\cdot}4\text{-}Br_2C_6H_3N\,.\,Br \,|\, HNBr \longrightarrow 2{\cdot}4\text{-}Br_2C_6H_3N\,.\,Br \equiv N$$

$$BrC_6H_4NBr \,|\, HNBr \longrightarrow BrC_6H_4\,.\,N\,.\,Br \equiv N$$

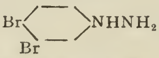
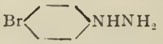
V obou případech má účinek bromu za následek zrušení skupiny hydrazinové.

Résumé.

1. Diazotací 3·4-dibromanilinu a další redukcí chloridem cínatým připravili jsme neznámý dosud 3·4-dibromfenylhydrazin. Popsali jsme volnou zásadu, její soli i četné deriváty, zvláště hydrazony. Cukerné deriváty hydrazinu toho nehodí se k diagnose cukrů, ježto špatně krystallují a tudíž nesnadno se čistí. Výjimku činí v tom ohledu jen derivát rhamnosy.

2. Námi připravený 3·4-dibromfenylhydrazin jest naprosto odlišný od produktu, jejž Meyer (Lieb. Ann. *272*, 215) považoval za 3·4-dibrom-

fenylhydrazin, a jenž není nic jiného než *p*-bromfenylhydrazin. Vysvítá to zřetelně z tabulky bodů tání, kterou zde uvedeme:

	Skutečný 	Meyerova udání o jeho domnělém dibromfenylhydrazinu	Naše data o Meyerově hydrazinu	 (Michaelisův)
volná zásada	75°	104° (Lieb. Ann. *272*, 215	108° až 109°	107° až 109° (B. B. *26*, 2190
pikrát	154° až 156°	132° (Lieb. Ann. *272*, 217	128° až 129°	128° až 129°
acetylderivát	182°	162° až 163° (Lieb. Ann. *272*, 217)	167°	161° (BB. *25*, 1555) 167° (BB. *26*, 2190)
derivát benzaldehydový	128°	123° (Lieb. Ann. *272*, 219)	126° až 127°	127·5° (Lieb. Ann. *324*, 314)
derivát salicylaldehydový	190°	—	178° až 179°	179°
derivát acetonový	látka jest kapalná	—	93°	93° (Lieb. Ann. *248*, 95)

3. Účinek přebytečného bromu na acetonfenylhydrazon (v roztoku chloroformovém) skýtá jen nepatrné množství dibromfenylhydrazinu, a to 2·4-tribromfenylhydrazin pak se dle našich zkušeností reakcí tou netvoří, neboť brom přemění nakonec trvale skupinu hydrazinovou.

K teorii differenciálnych systémov.

Napisal:
Dr. **Jur Hronec.**

Předloženo dne 22. října 1922.

L. Fuchs v práci, nalezajúcej sa v „Gesammelte mathematische Werke“ sv. 3. LIV., výjde z tých differenciálnych rovníc, ktorých integrály sú determinantné mínory integrálov istej differenciálnej rovnice vyššieho radu. S mojej stránky použil som toto skúmanie k tomu, aby som prišiel k istému súvisu medzi integrálnymi mátrixami differenciálnych systémov, povstalých z differenciálnych systémov väčšieho počtu, ba týmto príjdem k rovnici mátrixnej, kde ľavá strana je toho istého tvaru, ako ľavá strana rovnice (C) mojej práce: „Fuchsove relácie a ich počet“;[1]) lenže tento tvar je obecnejší, než tvar v spomenutej práci. Puplikovanie výsledkov, plynúcich z tohoto obecnejšieho súvisu podržím si na budúcnosť.

I.

Budíž

$$(A) \qquad \frac{d\,y_k}{d\,x} = \sum_{\lambda=1}^{2n} y_\lambda\, a_{\lambda k}$$

differenciálny systém Fuchsového týpu, kde koefficienty $a_{\lambda k}(x)$ sú funkcie racionálne a kde: $k = 1 . 2 \ldots 2n$. Značme integrálny mátrix tohoto differenciálneho systému

$$(y_{ik}),\ (i, k = 1 . 2 \ldots 2n),$$

kde je

$$|\,y_{ik}\,| = \varDelta = |\,c_{ik}\,|\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{k=1}^{2n} a_{kk}\, d\,x;},$$

kde konštantná hodnota $|\,c_{ik}\,|$ nie je nulou. Inak mátrix (c_{ik}) znamená hodnotu matrixu (y_{ik}) v bode x_0, to jest je

$$(y_{ik}(x_0)) = (c_{ik}),$$

---

[1]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky. Ročník LII. Č. 3.

poneváč bod $x = x_0$ v obore S môžeme úplne voľno voliť, preto k vôli jednoduchosti voľme tento bod tak, aby bolo

$$| y_{ik}(x_0) | = | c_{ik} | = 1$$

a vtedy máme

$$| y_{ik} | = \varDelta = e^{\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{k=1}^{2n} a_{kk}\, dx} \quad ; (i, k = 1 . 2 \ldots 2n) \tag{1}$$

Z tohoto determinantu $2n$-ho radu tvorme všetky možné mínory n-ho radu. Keď číslom ν označíme všetky mínory n-ho radu, ktoré patria k elementom ľubovoľne vychytených n stlpov, kde je

$$\nu = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1 . 2 \ldots n}$$

a kde je ešte $\nu^2 \geqq n^2$,

vtedy počet všetkých mínorov, ktoré sme v stave tvoriť z determinantu $| y_{ik} |$ $(i, k = 1 . 2 \ldots 2n)$, bude ν^2, poneváč z $2n$ stlpov môžeme stlpy n-ho radu zase ν násobne vychytiť. Takto vychytené determinanty n-ho radu značme

$$u_{j\varkappa},$$

kde $j, \varkappa = 1 . 2 \ldots \nu$.

Tieto ν^2 determinantné mínory sú také, že každému mínoru n-ho radu zodpovie jemu pridružený mínor zase n-ho radu.²) Sebe pridružené mínory n-ho radu však tak tvoríme, že tých n radov a n stlpov, z ktorých máme jedon mínor tvoriť, presuneme do vrchného rohu ľavého a to bude mínor $u_{j\varkappa}$, kde je $j, \varkappa = o, 1 . 2 \ldots \nu - 1$, tomuto zodpovedajúci a pridružený mínor však bude $u_{\nu-1-j,\, \nu-1-\varkappa}$ a leží v spodnom pravom rohu determinantu $| y_{ik} |$.

Dľa náuky o determinantoch je:

$$| u_{j\varkappa} | = | u_{\nu-1-j,\, \nu-1-\varkappa} | ; \; (j . \varkappa = 0 . 1 . 2 \ldots \nu - 1) \tag{2}$$

Komponujme mátrixe týchto determinantov so sebou a značme indexné čísla i, k, vtedy na základe náuky determinantov³) máme:

$$(u_{ik})\,(u_{\nu-1-i,\, \nu-1-k}) = \left(\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \pm u_{i\lambda}\, u_{\lambda,\, \nu-1-k}\right) = \left(\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \pm u_{i\lambda}\, u_{\nu-1-k,\, \lambda}\right).$$

Ale je:

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \pm u_{i\lambda}\, u_{\nu-1-k,\, \lambda} = \delta_{i,\, \nu-1-k}\, \varDelta, \tag{3}$$

kde

$$\delta_{i,\, \nu-1-k} = \begin{cases} 1, & \text{keď je } i = \nu - 1 - k \\ 0, & \text{keď je } i \neq \nu - 1 - k \end{cases}$$

---

²) Vid. Kronecker: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten, str. 19.

³) Kronecker: Vorlesungen atď. str. 329.

a Δ je zase vyššie definovaný determinant, takže po tomto máme:

$$(u_{i\,k})\,(u_{\nu-1-i,\,\nu-1-k}) = (\delta_{i,\,\nu-1-k}\,\Delta),$$

kde $i, k = 0,\ 1\,.\,2\ldots\nu-1$ a keď bereme rovnice (1) a (2) do ohľadu, vtedy dostaneme, že je

$$|\,u_{i\,k}\,| = e^{\frac{\nu}{2}\int\limits_{x_0}^{x}\sum\limits_{\mu=1}^{2n} a_{\mu\,\mu}\,dx}.$$

Poneváč differenciálny systém (A) je Fuchsového týpu, preto je

$$|\,u_{i\,k}\,| \neq 0,$$

ale vtedy integrálnemu mátrixu $(u_{i\,k})$ zodpovie jedon určitý differenciálny systém takéhoto tvaru

$$(B) \qquad \frac{d\,u_k}{d\,x} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} u_{i\,\lambda}\,A_{\lambda\,k} \quad (i, k = 1\,.\,2\ldots\nu),$$

kde koefficienty $A_{i\,k}$ sú tiež racionálne funkcie premenny x, lebo píšuc differenciálny systém (B) v tejto podobe:

$$(4) \qquad \left(\frac{d\,u_{i\,k}}{d\,x}\right) = (u_{i\,k})\,(A_{i\,k})$$

dostaneme, že

$$(A_{i\,k}) = (u_{i\,k})^{-1}\left(\frac{d\,u_{i\,k}}{d\,x}\right).$$

Poneváč differenciálny systém (A) je Fuchsového týpu, t. j. koefficienty sú racionálne funkcie a tak integrálny mátrix $(y_{i\,k})$ nemá bodov neurčitých a potom poneváč je $|\,y_{i\,k}\,| \neq 0$, preto toto stojí, ako sme už vyššie videli i na všetky mínory, ba i na ich inversy, zato z tejto rovnice nasleduje, že ani koefficienty $A_{i\,k}$ differenciálneho systému (B) nemajú v obore S neurčitých bodov, to jest, že i tieto koefficienty sú racionálne funkcie premenny x a že je $|\,A_{i\,k}\,(x)\,| \neq 0$.

II.

Z rovnice (B) máme:

$$\left(\frac{d\,u_{i\,k}\,(x)}{d\,x}\right) = (u_{i\,k}\,(x))\,(A_{i\,k}\,(x))$$

a ztadiaľto ďalej:

$$(u_{i\,k}\,(x)) = \left(\frac{d\,u_{i\,k}\,(x)}{d\,x}\right)(A_{i\,k}\,(x))^{-1}.$$

Kladme

$$(A_{i\,k}\,(x))^{-1} = (b_{i\,k}\,(x)),$$

vtedy je:

$$(u_{i\,k}\,(x)) = \left(\frac{d\,u_{i\,k}\,(x)}{d\,x}\right)(b_{i\,k}\,(x)).$$

Komponujme túto rovnicu s ľava konštantným mátrixom (c_{ik}), o ktorom stojí, že $| c_{ik} | \neq 0$:

$$(c_{ik})\,(u_{ik}(x)) = (c_{ik}) \left(\frac{d\,u_{ik}(x)}{d\,x}\right) (b_{ik}(x)).$$

Kladme:

$$(c_{ik})\,(u_{ik}(x)) = (w_{ik}(x)), \tag{5}$$

vtedy máme

$$(w_{ik}(x)) = \left(\frac{d\,w_{ik}(x)}{d\,x}\right)(b_{ik})\,; \quad (i, k = 1\,.\,2\,.\,.\,.\,\nu). \tag{6}$$

Z rovnice (5) máme:

$$w_{i\lambda} = \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} c_{i\varrho}\, u_{\varrho\lambda}.$$

$$w_{\nu-1-k,\,\lambda} = \sum_{\gamma=0}^{\nu-1} c_{\nu-1-k,\,\gamma}\, u_{\gamma\lambda}.$$

Tieto obecné integrály differenciálneho systému dosaďme do rovnice (3):

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \pm\, w_{i\lambda}\, w_{\nu-1-k,\,\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \pm \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \sum_{\gamma=0}^{\nu-1} c_{i\varrho}\, c_{\nu-1-k,\,\gamma}\, u_{\varrho\lambda}\, u_{\gamma\lambda} =$$
$$= \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \sum_{\gamma=0}^{\nu-1} c_{i\varrho}\, c_{\nu-1-k,\,\gamma} \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \pm\, u_{\varrho\lambda}\, u_{\gamma\lambda}\,.$$

Berúc do ohľadu rovnicu (3), máme:

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \pm\, w_{i\lambda}\, w_{\nu-1-k,\,\lambda} = \varDelta \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} c_{i\varrho}\, c_{\nu-1-k,\,\varrho}$$

alebo, keď klademe

$$\sum_{\varrho=0}^{\nu-1} c_{i\varrho}\, c_{\nu-1-k,\,\varrho} = \Gamma_{i,\,\nu-1-k}, \quad (i, k = 0, 1\,.\,2\,.\,.\,.\,\nu - 1),$$

vtedy je:

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \pm\, w_{i\lambda}\, w_{\nu-1-k,\,\lambda} = \varDelta\, \Gamma_{i,\,\nu-1-k}\,. \tag{7}$$

Na základě (6) máme:

$$\begin{cases} w_{i\lambda}(x) = \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{d\,w_{i\varrho}(x)}{d\,x}\, b_{\varrho\lambda}(x) \\ w_{\nu-1-k,\,\lambda}(x) = \displaystyle\sum_{\gamma=0}^{\nu-1} \frac{d\,w_{\nu-1-k,\,\gamma}(x)}{d\,x}\, b_{\gamma,\,\lambda}(x), \quad (i, k = 0\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,\nu - 1). \end{cases} \tag{8}$$

Vložme tieto hodnoty do (7)

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \pm \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \sum_{\gamma=0}^{\nu-1} \frac{d\, w_{i\varrho}(x)}{d\, x}\, b_{\varrho,\lambda}(x)\, \frac{d\, w_{\nu-1-k,\gamma}(x)}{d\, x}\, b_{\gamma\lambda}(x) =$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \sum_{\gamma=0}^{\nu-1} \frac{d\, w_{i\varrho}(x)}{d\, x}\, \frac{d\, w_{\nu-1-k,\gamma}(x)}{d\, x} \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \pm\, b_{\varrho\lambda}(x)\, b_{\gamma\lambda}(x) = \varDelta\, \Gamma_{i,\nu-1-k}\,.$$

Klaďme

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \pm\, b_{\varrho\lambda}(x)\, b_{\gamma\lambda}(x) = v_{\varrho\gamma}(x),\ (\varrho, \gamma = 0\,.\,1 \ldots \nu - 1), \tag{9}$$

kde $v_{\varrho\gamma}(x)$ sú tiež racionálne funkcie v premenne x, a tak máme:

$$\sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \sum_{\gamma=0}^{\nu-1} \frac{d\, w_{i\varrho}(x)}{d\, x}\, v_{\varrho\gamma}(x)\, \frac{d\, w_{\nu-1-k,\gamma}(x)}{d\, x} = \varDelta\, \Gamma_{i,\nu-1-k}$$

alebo

$$\sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \sum_{\gamma=0}^{\nu-1} \frac{d\, w_{i\varrho}(x)}{d\, x}\, v_{\varrho\gamma}(x)\, \frac{d\, w_{\gamma k}(x)}{d\, x} = \varDelta\, \Gamma_{ik},\ (i, k = 0\,.\,1\,.\,2 \ldots \nu - 1)$$

a konečne na základe mátrixneho počtu:

$$\left(\frac{d\, w_{ik}(x)}{d\, x}\right) (v_{ik}(x)) \left(\frac{d\, \overline{w}_{ik}(x)}{d\, x}\right) = (\varDelta\, \Gamma_{ik})\ \ i, k = 1\,.\,2 \ldots \nu,$$

kde $\overline{w}_{ik}$ sú pridružené determinanty determinantov w_{ik} a Γ_{ik} sú konštantné hodnoty, ktorých hodnota závisí od začiatočnej hranice integrovania. w_{ik} boly obecné integrály differenciálneho systému (B) a preto môžeme písať:

$$\left(\frac{d\, u_{ik}(x)}{d\, x}\right) (v_{ik}(x)) \left(\frac{d\, \overline{u}_{ik}(x)}{d\, x}\right) = (\varDelta\, \Gamma_{ik}), \tag{C}$$

kde racionálne funkcie $v_{ik}(x)$ určené sú systémami (9), a v týchto jestvujucie znamienka určíme dľa Kroneckera⁴) na základe indexov diagonálnych elementov mínorneho determinantu u_{ik} a síce je:

$$u_{ik} = \begin{vmatrix} y_{g_1 h_1} \ldots y_{g_1 h\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{g\nu h_1} \ldots y_{g\nu h\nu} \end{vmatrix}$$

a keď my v tomto mínornom determinante jednotlivé indexe tak ustálíme, aby bolo $g_1 < g_2 < g_3 < \ldots < g_\nu$, a zase: $h_1 < h_2 < h_3 < \ldots < h_\nu$, kde tieto indexné čísla sú kombinácie n-ho radu, tvorené z čísiel $1\,.\,2 \ldots 2\,n$, vtedy znamienko mínorného determinantu u_{ik}, poťažne funkcie b_{ik} je:

$$(-\,1)^{g_1 + h_1 + g_2 + h_2 + \ldots + g_\nu + h_\nu}\,.$$

---

⁴) Vorlesungen atď., 19. prednáška.

Transformujme differenciálny systém (B) substituciou:

$$u_{ik}(x) = e^{\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{\mu=1}^{2n} a_{\mu\mu}\, dx} v_{ik}(x),$$

vtedy máme, že je:

$$\frac{d u_k}{d x} - \sum_{\lambda=1}^{\nu} u_{i\lambda} A_{\lambda k} = e^{\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{\mu=1}^{2n} a_{\mu\mu}\, dx} \left\{ \frac{d v_k}{d x} - \sum_{\lambda=1}^{\nu} v_{i\lambda} B_{\lambda k} \right\},$$

kde $B_{\lambda k}$ sú zase racionálne funkcie premenny x, a kde pojednávanie differenciálneho systému (B) redukované je na differenciálny systém

$$(B) \qquad \frac{d v_k}{d x} = \sum_{\lambda=1}^{\nu} v_{i\lambda} B_{\lambda k},$$

pri ktorom mátrixná rovnica (C) prejde do tvaru:

$$(C') \qquad \left(\frac{d v_{ik}(x)}{d x}\right) (U_{ik}(x)) \left(\frac{d \bar{v}_{ik}(x)}{d x}\right) = (\Gamma_{ik}),$$

kde Γ_{ik} sú vzhľadom na x konštanty, ale závisia od začiatočnej hranice integrovania a kde $U_{ik}(x)$ sú zase racionálne funkcie premenny x.

Jestliže rovnice (8) takto určíme:

$$w_{i\lambda}(z) = \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} \frac{d w_{i\varrho}(z)}{d z} b_{\varrho\lambda}(z)$$

$$w_{\nu-1-k,\lambda}(x) = \sum_{\gamma=0}^{\nu-1} \frac{d w_{\nu-1-k,\gamma}(x)}{d x} b_{\gamma\lambda}(x),$$

vtedy mátrixná rovnica (C') prejde do tvaru:

$$(C'') \qquad \left(\frac{d v_{ik}(z)}{d z}\right) (U_{ik}(z, x)) \left(\frac{d \bar{v}_{ik}(x)}{d x}\right) = (\Gamma_{ik}).$$

Ľavá strana tejto rovnice je ten istý lenže obecnejší tvar, ako ľavá strana rovnice (C) v práci: „Fuchsove relácie pre differenciálne systémy a ich počet“.⁵)

Rovnica (C') označí nám súvis medzi skupinami differenciálnych kvocientov istých integrálov differenciálneho systému (A).

---

⁵) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky. Ročník LII. č. 3.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 38.

O zvláštních nákrojcích křišťálů z Kazbeka na Kavkaze.

Napsal

Vl. Čirvinskij v Kijevě.

(S 5 obrazci v textu.)

(Předloženo dne 22. října 1922.)

Křišťály kazbecké byly zkoumány nejednou; A. Frenzel[1]) zjistil jejich krystalové plochy, R. Prendel a L. Ivanov[2]) zabývali se jejich dvojčatným srůstem i zajímavým a vzácným úkazem jejich torse.

Při exkursi na Kavkaz v létě r. 1910 jsem sebral značnou kolekci kazbeckých křišťálů (v aulu u stanice Kazbek), mezi nimiž byly krystaly zvláštním způsobem naříznuté několika směry. Nákrojky ty, brzo mělčí brzo hlubší, nacházely se někdy na jediné ploše, jindy na několika, až i na všech plochách téhož tvaru (na př. hranolu).

Ve většině případů mají ráz hlubokých nápilků, jako by byly udělány tlustou pilou. Mimo nákrojky se pozorovaly též mdlé plochy nebo plochy styčné, nezřídka rýhované, jež nejsou normálními elementy omezení krystalů.

Část krystalů pochází nepochybně z puklin v břidlicích, nač ukazuje přítomnost černých a nazelenalých břidlic jílovitých na ukázkách křišťálu, druhá část, hlavně velké krystaly se zmíněnými nákrojky, pochází z dutin a trhlin v žule.

Prvý, kdo si všiml takovýchto zvláštních křišťálů, byl P. Zemjatčenskij,[3]) jenž stručně (na ½ str.) popsal zajímavou druzu kazbeckého křišťálu s charakteristickým naleptáním a zvláštním rýhováním. Podle mínění autorova nejsou to krystalografické elementy zevního omezení a vyložiti je dlužno přirůstáním a prorůstáním tabulkovitých krystalů kalcitu. Zemjatčenskij tu mluví vlastně ne o nákrojcích, nýbrž o „skrojených plochách", ale i nákrojky se na krystalech těch našly, jak viděti z obrazce v jeho učebnici mineralogie (1910, č. 134 na str. 97).

---

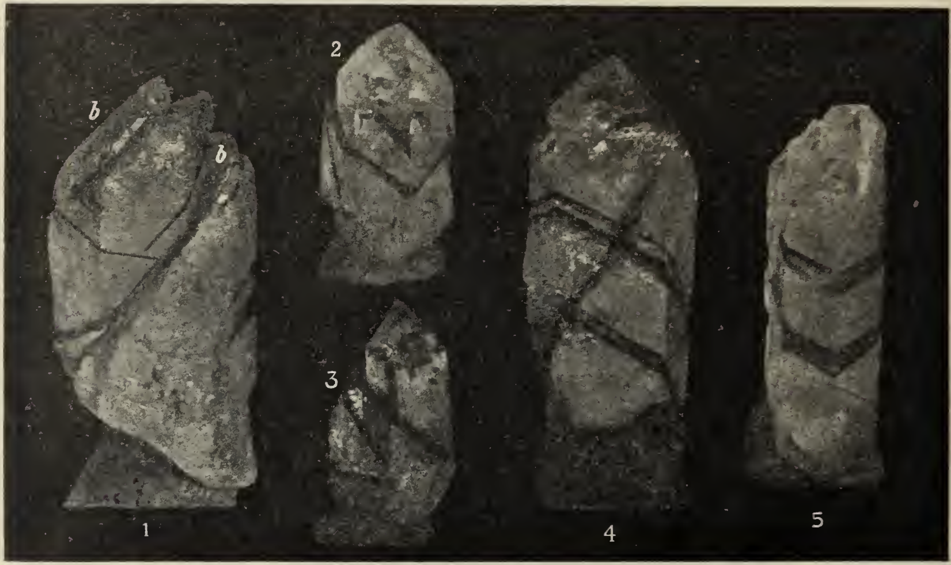
[1]) Frenzel, Mineralogisches aus Kaukasien. Tscherm. Min.-petr. Mitth. N. F. II, 126 sq.

[2]) Prendel, Ежегод. по минералогіи и геол. Россіи III. 18. а Зап. Новор. Общ. Ест. XXVI., 1904, 161.

L. Ivanov, Из. Акад. Наук 1916, 623.

[3]) Zemjatčenskij. Прот. СПб. общ. ест. XXIII. 4, 1893.

Maje k disposici značné množství křišťálů, položil jsem si otázku, zdali existuje jaká zákonitost v poloze nákrojků. Můžeme rozeznávati případy: 1. plocha nákrojku leží v pásmu $(10\bar{1}1):(10\bar{1}0)$, obr. 1; 2. leží v pásmu $(11\bar{2}1):(11\bar{2}0)$, obr. 4; 3. neleží v žádném z obou pásem.



Obr. 1.—5.

Tyto typy mohou se vyskytovat na různých krystalech anebo častěji pospolu na témž krystalu.

Nejzajímavěji jest vyvinuto pět krystalů, na jejichž popis se tuto omezím.

I. (Obr. 1.) Velký krystal 10 × 4·5 *cm*, pravý, s hojnými uzavřeninami kapalnými a plynnými, zvláště v dolejší části, jež snižují jeho průhlednost. Nákrojky přísluší ku všem třem typům. Hlavních je sedm, menší jsou čtyři. Nákrojky prvého typu jsou 3, a příložným goniometrem stanoveny jejich úklony k $(10\bar{1}0)$: $a = 142^0$, $b = 142^0$, $c = 141^0$. Ke druhému typu náleží dva o úklonech 124^0 a 125^0 k vertikále; ke třetímu rovněž dva s úklonem okolo 140^0. Jest pozorovati též několik ploch styčných (*b*,. Na některých plochách nákrojků jest viděti dobře vyvinuté rýhování.

II. (Obr. 2. a 3.). Průhledný krystal 5·5 × 3 *cm*, pravý, skoro bez uzavřenin, se 2 dobře a 5 špatně vyvinutými nákrojky. Na plochách jednoho z klenců pozorujeme jemné vodorovné rýhování. Nákrojek II. typu má úklon 135°, nákrojek I. nebo III. typu 145°.

III. Krystal č. 83. Dauphinéské dvojče 8 × 2·5 *cm*. Zajímavy jsou destičkovité vrostlice kalcitu, místy hluboko se vřezávající do krystalu; dvě z nich jsou zvláště dobře vyvinuty, jedna má úklon 141½°, vrůstá do plochy hranolu a měří 3·5 *cm* zšíři při tloušťce 2 *mm*; druhá vrůstá pod úhlem 141° rovněž do hranolu a má 2·7 *cm* i tloušťku 1·8 *mm*. Tyto dvě destičky jsou rovnoběžny ku plochám $(10\bar{1}1)$ a $(01\bar{1}1)$. V krystalu jest ještě několik destičkovitých vrostlic kalcitu, ale drobných, jichž polohu nelze přesněji určiti; některé z nich stojí skoro svisle. Místy na nich jest vyvinuto rýhování, tvořící kosočtverečnou síťku. Ve vrchní části krystalu blízko hrany prismatické pozorujeme dvě plochy přikrojené, jež polohou připomínají pravý a levý trapezoedr a tvoří zdánlivou srostlici brazilskou; vznikly dotykem s destičkovitým kalcitem z části ještě uchovaným. Ona rýhovaná plocha styčná svírá malý úhel s plochou klence. Mimo vrostlé vyskytují se i narostlé destičky kalcitové.

IV. Krystal č. 113 (obr. 4.); měří 9 × 3·5 *cm*, se vrostlicemi kapalnými a plynnými soustředěnými ve spodní části. Dobře vyvinuté nákrojky 3, špatných 7. Všecky tři hlavní nákrojky patří k typu II. a jejich úklony jsou 131°, 130° a 132°.

V. Krystal č. 120 (obr. 5). Dauphinéské dvojče 8 × 3 *cm*, s dosti mnoho uzavřeninami kapalnými a plynnými, hlavně v nejhořejší a nejdolejší části. Hlavních nákrojků jest pět, slabších devět, mezi nimiž některé přibližně vertikální. Všechny hlavní nákrojky patří ke II. typu a mají úklony 136°, 135°, 137°, 137°, 155°.

Celkem tedy máme na pěti krystalech pro nákrojky I. typu 5 dat v mezích od 141° do 142°; pro II. typ: a) 124°, 125°; b) 130°, 131°, 132°, 135°, 136°, 137°, 137°; c) 155°; pro III. typ 140°, 140°, 145°. Jak známo, jsou u křemene úhly:

$$(10\bar{1}1):(10\bar{1}0) = 141^0\,47',$$
$$(11\bar{2}1):(11\bar{2}0) = 155^0\,33',$$
$$(11\bar{2}2):(11\bar{2}0) = 137^0\,44'.$$

Odpovídá tedy úklon kalcitů I. typu (všech pěti exemplářů) úplně úklonu mezi klencem a prvořadým prismatem křemene.

Mezi nákrojky II. typu možno konstatovati skupinu pěti dat 135° až 137°, blízkých úklonu trigonální bipyramidy $(11\bar{2}2)$ k hranolu $(11\bar{2}0)$; kromě toho v jednom případě máme úhel 155° blízký bipyramidě $(11\bar{2}1)$; týž úklon pozorován ještě dvakráte na ostatních krystalech.

Na základě těchto pozorování docházíme k závěru, že *mimo docela náhodné nákrojky vyskytují se i zákonité a to podle rhomboedrů* $(10\bar{1}1)$ *a* $(01\bar{1}1)$, *pravděpodobně též podle trigonálních bipyramid* $(11\bar{2}1)$ *a* $(11\bar{2}2)$. S tím vůbec souhlasí známé zákonitosti ve srůstu kalcitu s křemenem (nejčastější je podle Breithaupta, Dany a j.[4]) srůst, při němž $(01\bar{1}2)$ kalcitu je rovnoběžno s $(10\bar{1}1)$ křemene, srůst podle $(11\bar{2}1)$ je vzácnější).

Pokud se týče otázky původu popsaných zjevů, zcela souhlasím s P. Zemjatčenským, jenž vykládá výskyt některých ploch *prorůstáním i narůstáním tabulkovitého vápence na krystaly křemene.* Pro názor ten svědčí ráz ploch, rýhování, odpovídající štěpným trhlinám vápence, a hlavně přítomnost zachovaných ještě destičkovitých vrostlic kalcitu. (Srovn. zvl. popis krystalu III.)

Destičky kalcitové vrůstaly do křemene za vzrůstu jeho krystalů; pozdější rozpuštění kalcitu bylo příčinou, že se objevily hluboké zářezy a nákrojky.[5]) Část destiček kalcitových srůstala s křemenem v poloze přesně určené, jak vyloženo výše, část v polohách nahodilých. Úplně shodné krystaly křišťálu s nákrojky a se skrojenými plochami, jak se zdá, vyskytují se i ve Švýcarsku;[6]) aspoň ve sbírce mineralogického kabinetu Donské techniky v Novočerkassku u prof. P. P. Suščinského jsem viděl druzy křišťálu[7]) z údolí Maderanského (v kantonu Uri) s význačnými plochami styčnými i s nehojnými nákrojky. G. vom Rath,[8]) jenž popsal krystaly ty, praví, že často destičky kalcitové přeřezávají krystaly křemene, při čemž na nich zůstávají otisky štěpnosti vápencové podle tří směrů.

Co se tkne krystalových tvarů, nebyly nalezeny nové na materiálu mnou sebraném (asi 150 kusů), nýbrž jen obyčejné tvary uvedené již Frenzelem: $(10\bar{1}1)$, $(01\bar{1}1)$, $(11\bar{2}1)$, $(51\bar{6}1)$ a $(10\bar{1}0)$. Vyskytují se krystaly pravé i levé a též dauphinéská dvojčata; brazilská nebyla zjištěna.

Uzavřeniny nejobyčejnější jsou kapalné a plynné, v některých krystalech též kousky jílovitých břidlic, někdy orientované po plochách klencových, a pořídku chlorit. Nálety manganové pozorované Frenzelem a mázdry hydroxydu železitého, jež uvádí Prendel, nebyly nalezeny. Většina krystalů je průhledná nebo průsvitná, plochy jejich čisté a lesklé. Vše to svědčí, že krystaly mé sbírky pocházejí z jiného naleziště než Prendelovy a Frenzelovy.

Mineralogický ústav Kijevského polytechnického institutu.

---

[4]) E. S. Dana, Amer. Journ. Sc. XII (1876), p. 448.

[5]) E. S. Fedorov (Ежегод. по Геол. и Минер. Росс. III. 78) popsal rozříznutý krystal křemene z Bogoslovského obvodu na Urale. Podle jeho názoru zjev ten se vysvětluje přítomností přehrádky (snad hnědelové) v prostoru, v němž se dála krystalisace, a pozdějším jejím rozpuštěním.

[6]) Srovn. Hintze, Mineralogie I. 1386.

[7]) Ukázka obdržena od W. Manchera v Mnichově.

[8]) Vom Rath, Stzb. niederrhein. Gesellsch. Bonn 1860, 121.

Příspěvek ke křivkám cissoidálním.

Napsal

Dr. **Klíma Josef,**

profesor reálky v Karlíně.

(Předloženo dne 22. října 1922.)

Cissoidu křivek ^1k a ^2k pro pól P dostaneme[1]), sestrojíme-li bodem P libov. sečnu s, jež nechť protíná křivku ^1k v bodě ^1A a křivku ^2k v bodě ^2A, pak bod A cissoidy vyhovuje rovnici $\overline{PA} = \overline{P^1A} \pm \overline{P^2A}$. V dalším budeme uvažovati jen součet, ježto rozdíl možno převésti v součet, nahradíme-li křivku ^2k křivkou $^2k'$, jež je souměrně položena ke křivce ^2k vzhledem k středu P.

Jak známo, je cissoidou *dvou přímek* ^1k a ^2k pro pól P hyperbola k, jež má v přímkách ^1k, ^2k asymptoty a jež prochází bodem P. Tečnu t k hyperbole této, sestrojené jako cissoidu, lze v bodě A určiti na základě věty o polární subnormále, jež rovná se součtu subnormál křivek ^1k a ^2k, z nichž cissoida ta vznikla. K hyperbole k možno ovšem v bodě A sestrojiti též tečnu tak, že bod A půlí její úsek mezi asymptotami ^1k, ^2k. Přímky ^1k a ^2k mohou býti též imag. sdružené a pak jsou dány eliptickou involucí paprskovou o středu S. Body ^1A a ^2A na libov. přímce s jdoucí pólem P jsou imag. sdružené a určeny involucí, jíž daná paprsk. involuce vytíná na této a bod A cissoidy je od jejího středu ω stejně vzdálen jak pól P ($\overline{A\omega} = \overline{\omega P}$). Cissoida je tu elipsou k, jdoucí pólem P a mající danou elipt. paprsk. involuci o středu S za involuci sdruž. průměrů. Specielně cissoidou dvou minimálních přímek, jdoucích bodem S pro pól P je kružnice o středu S a poloměru $\overline{SP}$.

Kdyby přímky $^1k \parallel {}^2k$, pak jich cissoida pro pól P rozpadá se ve dvě přímky a to $k \parallel {}^1k$ a přímku $k' \parallel {}^1k$ jdoucí pólem P, z nichž druhá odpovídá společ. úběž. bodu přímek ^1k a ^2k.

---

[1]) Viz ku př. Wieleitner: „Specielle ebene Kurven" str. 2. a další. Cissoidu tu budeme v dalším označovati $C\,(^1k,\ ^2k)_P$.

Stejně jako definujeme cissoidu dvou křivek pro pól P, možno definovati cissoidální plochu **K** ploch ${}^1\mathbf{K}$ a ${}^2\mathbf{K}$ pro pól P. Z předchozího a z věty, že rovnoběžné průměty stejných délek na téže přímce jsou opět stejné, plyne: „*Cissoidální plochou* α *dvou reálných rovin* ${}^1\alpha$ *a* ${}^2\alpha$ *pro pól* P *je hyperbolická plocha válcová, jdoucí bodem* P, *mající roviny* ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ *za asymptotické a tudíž površky rovnoběžné s průsečnicí* $({}^1\alpha\,{}^2\alpha)$“. V případě, že roviny ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ jsou imag. sdružené, dostaneme eliptickou plochu válcovou a v případě minimálních rovin dostaneme rotační plochu válcovou.

Uvažujme nyní cissoidu *přímky* ${}^1p$ *a kuželosečky* ${}^2k$ pro pól P. Je to křivka 4^0 k^4, jak vyplývá, stanovíme-li průsečíky její s libovolnou přímkou q. Sestrojíme cissoidu této přímky q a přímky ${}^1p'$, jež je souměrná k přímce ${}^1p$ vzhledem k středu P (${}^1p' \parallel {}^1p$). Tato cissoida $C\,(q, {}^1p')_P$ je hyperbola o asymptotách q a ${}^1p'$ a protíná kuželosečku ${}^2k$ ve čtyřech bodech, jimž odpovídají na $C\,({}^1p, {}^2k)_P$ body společné s q. V případě, že kuželosečka ${}^2k$ má asymptotu rovnoběžnou s přímkou ${}^1p$, rozpadne se cissoida v křivku stupně třetího a přímku jdoucí pólem P rovnoběžně s ${}^1p$, a kdyby jedna asymptota kuželosečky ${}^2k$ splynula s př. ${}^1p'$, dostaneme cissoidu stupně druhého a přímku pólem P rovnoběžnou s ${}^1p$, již třeba dvojnásob počítati. Prochází-li přímka q úběžným bodem kuželosečky ${}^2k$, bude protínati, jak snadno dle předch. nahlédneme, cissoidu k^4 ve třech bodech v konečnu a čtvrtý je úběž. bodem. Splyne-li q s asympt. kuželosečky ${}^2k$, jsou jen dva body v konečnu a druhé dva splynou s úběž. bodem asymptoty. Je-li přímka $q \parallel {}^1p$, skládá se $C\,(q, {}^1p')_P$ ze dvou přímek rovnoběž. s ${}^1p$, z nichž jedna jde pólem P, i protíná q cissoidu $C\,({}^1p, {}^2k)_P$ ve dvou bodech v konečnu a dvou splýv. s úběž. bodem přímky ${}^1p$. Splyne-li q s ${}^1p$ pak, ježto $C\,({}^1p', {}^1p)_P$ je bodem, má přímka ${}^1p$ s $C\,({}^1p, {}^2k)_P$ čtyři splývající body v úběžném bodě a proto dostáváme: „*Cissoida přímky* ${}^1p$ *a kuželosečky* ${}^2k$ *má s kuželosečkou* ${}^2k$ *společné asymptoty a úběžný bod přímky* ${}^1p$ *je jejím samodotyčným dvojným bodem, v němž tečna je* ${}^1p$“.

Pól P je, dle konstrukce, dvojným bodem cissoidy a tečny v něm procházejí průsečíky kuželos. ${}^2k$ s přímkou ${}^1p'$. Proto cissoida kuželosečky a přímky, jež je symetrická k tečně kuželosečky vzhledem k pólu P, je křivkou 4^0, mající v bodě P bod úvratu.

Cissoida $C\,({}^1p, {}^2k)_P$ je *třídy 6*, neboť tečnám jejím jdoucím libov. bodem R odpovídají v cissoidálné transformaci, určené pólem P a přímkou ${}^1p'$, hyperboly jdoucí pólem P o společné asymptotě ${}^1p'$, jež dotýkají se kuželosečky ${}^2k$ a procházejí bodem ${}^1R$ odpov. bodu R v této transformaci. Hyperboly, jdoucí body P, ${}^1R$ a mající ${}^1p'$ za asymptotu, tvoří svazek, který na kuželosečce ${}^2k$ vytíná biquadratickou involuci jednomocnou, jež má 6 dvojných bodů a tedy křivka $C\,({}^1p, {}^2k)_P$ je třídy 6, jak plyne též ze vzorců Plückerových, ježto samodotyčný dvojný bod vznikne splynutím dvou dvojných bodů.

Též možno konstrukcí určiti inflexní a dvojné tečny křivky $C\,({}^1p, {}^2k)_P$. ∞^2 přímkám, odpovídá v transfor. cissoid. o pólu P a přímce ${}^1p'$ síť hyperbol jdoucích bodem P a o asympt. ${}^1p'$. Z těchto ty, jež oskulují kuželosečku ${}^2k$ odpov. inflex. tečnám cissoidy a ty, jež se ${}^2k$ dotýkají dvojnásob odpov. dvojným tečnám této. Síť těch hyperbol vytíná na ${}^2k$ dvojmocnou biquadratickou involuci, jež má 6 čtveřin, v nichž tři prvky splývají a 4 čtveřiny, v nichž dva a dva prvky splynou. I má cissoida $C\,({}^1p, {}^2k)_P$ *šest inflex. tečen* a *čtyři dvojné tečny.*

Že cissoida přímky ${}^1p$ a kuželosečky ${}^2k$ pro libov. bod P jako pól je racionálnou kvartikou, možno též odvoditi následovně. Mysleme si přímkou ${}^1p$ proloženu rovinu ${}^1\alpha$ kolmo k nákresně, bod P budiž pak kolmým průmětem bodu (P). Mysleme si dále v prostoru libov. rovinu ${}^2\alpha$ k nákresně nakloněnou. Kuželosečka ${}^2k$ je kolmým průmětem jisté kuželosečky $({}^2k)$, ležící v rovině ${}^2\alpha$. Cissoidální plochou rovin ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ pro pól (P) je hyperb. plocha válcová **V**, jejíž površky jsou rovnoběž. s průsečnicí $s \equiv ({}^1\alpha\ {}^2\alpha)$ a jež prochází bodem (P). Kuželosečka $({}^2k)$ promítá se z bodu (P) kuželovou plochou druhého stupně **K**, jež protíná válc. plochu **V** v prostorové křivce biquadratické prvého druhu, která má v bodě (P) dvojný bod, a jejímž kolmým průmětem jeví se cissoida $C\,({}^1p, {}^2k)_P$. Z tohoto prostorového nazírání a z vlastností prostor. křivky 4^0 prvého druhu s dvojným bodem¹) dají se odvoditi všechny vlastnosti cissoidy $C\,({}^1p, {}^2k)_P$. Kdyby pól P byl na kuželosečce ${}^2k$, pak by se plocha válcová **V** a kuželová **K** protínaly též v prostor. křivce 4^0 s dvoj. bodem v (P), ale úběž. bod kolmice k nákresně byl by bodem té křivky a proto jejím kolmým průmětem byla by racionální křivka třetího stupně, jak snadno dostaneme též přímo²). Profesor dr. *Zahradník* dovodil pak³), že všechny racion. křivky 3^0, jež mají dvojný bod v konečnu, vyjma tu, jež má úběžnou přímku za inflexní tečnu, lze obdržeti jako cissoidu přímky a kuželosečky pro pól ležící na této. V pojednání tomto jsou též všechny zvláštní případy probrány.

Uvažujme dále cissoidu *přímky* ${}^1p$ *a křivky* n^0 k^n. Je to křivka $2n^0$, jež má v pólu P n nás. bod, s křivkou k^n má společné asymptoty a úběžný bod přímky ${}^1p$ je jejím samodotyčným n-násob. bodem, v němž tečna je ${}^1p$. Dvojným bodům křivky k^n odpovídají též dvojné body cissoidy. Je-li tedy k^n racionální t. j. má-li $\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}$ dvoj. bodů, je též cissoida racionální t. j. rodu

$$p = (2n-1)\,(n-1) - \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - 3\,\frac{n\,(n-1)}{2} =$$

$$= (2n-1)\,(n-1) - \frac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2+3n) = 0.$$

---

¹) Ku př. v Pascal „Repertorium d. höh. Math.“ II. díl, II. polovina, str. 639 v 2. vyd. z r. 1922.

²) Stiner „Metr. Eigensch. der Kurven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte“ v Monatshefte für Mathematik und Physik, roč. 1893.

³) Sezení české společ. nauk roč. 1906.

Výsledek ten vyplývá též z prostorového nazírání jako v předchozím případě, ježto cissoida ta jeví se jako kolmý průmět průsečné křivky hyperb. plochy válcové s plochou kuželovou n^0, jež má na ploše válcové svůj vrchol. Je-li přímka ${}^1p$ rovnoběžná s asymptotou křivky k^n, tu rozpadá se cissoida v přímku $p \parallel {}^1p$ jdoucí pólem P a vlastní cissoidu stupně $2n - 1$. Kdyby křivka k^n měla přímku ${}^1p'$, jež je symetr. k ${}^1p$ dle P, za asymptotu, tu plocha válcová a kuželová mají společ. površku a dle ní společnou rovinu tečnou a proto cissoida rozpadá se ve dvojnásob počítanou přímku $p \parallel {}^1p$, jdoucí pólem P a cissoidu vlastní stupně $2n - 2$.

Vyšetřme konečně cissoidu křivek ${}^1k^m$, ${}^2k^n$ stupňů m a n pro pól P. Abychom určili průsečíky libov. přímky q s touto, stanovme si cissoidu křivky ${}^1k^m$ a přímky q', symetrické k přímce q dle P, pro pól P. Tato je dle předchozího případu stupně $2m$, má společ. asymptoty s křivkou ${}^1k^m$, v úběž. bodě přímky q' má samodot. m nás. bod a v pólu P má m-nás. bod. I protíná tudíž druhou křivku ${}^2k^n$ ve $2mn$ bodech, jimž odpovídají průsečíky přímky q s $C\,({}^1k^m, {}^2k^n)_P$. Kdyby přímka q byla rovnoběžna s některou asymptotou křivky ${}^1k^m$, pak $C\,(q', {}^1k^m)_P$ rozpadá se v přímku ${}^1q \parallel q$ jdoucí pólem P a cissoidu stupně $2m - 1$, jejímž $(2m - 1)n$ průsečíkům s křivkou ${}^2k^n$ odpov. průsečíky q s $C\,({}^1k^m, {}^2k^n)_P$ v konečnu a n-průsečíkům $({}^1q\ {}^2k^n)$ odpovídá n průseč. q s cissoidou v nekonečnu. I jsou proto úběžné body křivky ${}^1k^m$ n násobnými body cissoidy $C\,({}^1k^m, {}^2k^n)_P$ a stejně úběžné body křivky ${}^2k^n$ jsou jejími m-násobnými body. Splyne-li přímka q s asymptotou křivky ${}^1k^m$ a určíme cissoidu přímky q a křivky ${}^2k'^n$ souměrně položené ke křivce ${}^2k^n$ dle pólu P, tu má tato úběž. bod přímky za n nás. samodot. o tečně q a proto přímka q má s $C\,({}^1k^m, {}^2k^m)_P$ ve svém úběž. bodě $2n$ splýv. bodů společných. Dostáváme tedy výsledek: „*Úběžné body křivky* ${}^1k^m$ *jsou n násobnými, samodotyčnými body cissoidy* $C\,({}^1k^m, {}^2k^n)_P$ *a tečny v nich jsou asymptoty křivky* ${}^1k^m$ *a podobně úběžné body křivky* ${}^2k^n$ *jsou m-násob., samodotyčnými jejími body a tečny v nich splývají s přísluš. asymptotami křivky* ${}^2k^n$“.

Mají-li křivky ${}^1k^m$ a ${}^2k^n$ α — úběžných průsečíků společných, pak jich cissoida pro libov. pól rozpadne se v α přímek jdoucích pólem a těmito úběž. body průsečnými a křivku stupně $(2mn - \alpha)$. Prochází-li konečně křivka ${}^1k^m$ β kráte pólem P rozpadne se cissoida v β-nás. křivku ${}^2k^n$ a křivku stupně $(2mn - \beta n)$.

Obecně stupeň cissoidy křivek ${}^1k^m$, ${}^2k^n$ pro pól P je:

$$2mn - (\beta n + \gamma m + \alpha),$$

mají-li ${}^1k^m$ a ${}^2k^n$ α úběžných bodů společných, prochází-li ${}^1k^m$ β kráte a ${}^2k^n$ γ-kráte bodem P a nepočítáme-li α přímek jdoucích pólem P a β-nás. křivku ${}^2k^n$ a γ — nás. křivku ${}^1k^m$.¹)

---

¹) Wieleitner, „Spec. ebene Curven“, str. 2.

V případě, že jedna z křivek zákl., třeba ${}^1k^m$ je kružnicí ${}^1k^2$ a pól P jejím středem, dostaneme konchoidu křivky ${}^2k^n$, jež je dle toho stupně

$$2.2\,n - (2\,\beta + 2\,\alpha) = 2\,(2\,n - \beta - \alpha),$$

kde ${}^2k^n$ jde β-kráte pólem P, a α-kráte prochází imag. kruhovými body.[1]) Pól P je tu $2\,n - 2\,\alpha = 2\,(n - \alpha)$ nás. bodem, ježto odpadají tu $2\,\alpha$ imag. minimálních přímek jdoucích bodem P. Konchoida ta jde n-násobně imag. body kruhovými a tečny v nich splývají s asympt. kružnice ${}^1k^n$.

Z prostorového odvození cissoidy přímky a křivky možno odvoditi též, kdy cissoida dvou křivek stejných stupňů se rozpadá. Kdybychom totiž měli *dvě křivky* ${}^1k^n$ *a* ${}^2k^n$ *téhož stupně* n, *v perspekt. kolineaci pro střed v pólu* P *a ose* o, *pak proložíme-li osou* o dvě libov. roviny ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ a v těchto určíme křivky $({}^1k^n)$, $({}^2k^n)$, jichž orthog. průměty jsou dané křivky, pak tyto křivky jsou na ploše kuželové, jež má vrchol v bodě (P), mající za orth. průmět pól P. Ježto cissoid. plochou rovin ${}^1\alpha$, ${}^2\alpha$ pro pól (P) je hyperb. plocha válcová, jdoucí bodem (P) o povrchových přímkách rovnob. s o, bude částí cissoidy $C\,({}^1k^n, {}^2k^n)_P$ orthog. průmět průsečné křivky této hyperb. plochy válcové s prve uvedenou kužel. plochou o vrcholu (P), obsah. křivky $({}^1k^n)$, $({}^2k^n)$. Část tato je patrně stupně $2\,n$ a má bod P za n-násobný. Body křivek ${}^1k^n$, ${}^2k^n$, jež v perspekt. kolineaci (P, o) k sobě přísluší, dají jednu část cissoidy stupně $2n$ a ostatní body na paprscích svazku P dají zbývající část stupně $2\,n\,(n - 1)$.

Zvláštní případ: Mějme určiti cissoidu dvou kuželoseček ${}^1k^2$, ${}^2k^2$ pro jich střed perspektivity P, v němž protínají se dvě společné tečny obou křivek. Pro tento pól rozpadá se cissoida ve dvě křivky 4^0, obě kuželosečky mají též pro střed. perspekt. P dvě osy perspekt. Taký případ nastává ku př. při půdorysu meze vlast. stínu na přímkové ploše šroubové, jež je cissoidou kružnice a elipsy, jak dokázal prof. dr. *Frant. Kadeřávek*.[2]) Elipsa tam dána rovnicí

$${}^1k^2 \equiv \frac{x^2}{\dfrac{a^2\,c^2}{c^2 - b^2}} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

a kružnice: ${}^2k^2 \equiv x^2 + (y - b)^2 = c^2$ a pól P je v počátku. Snadno se výpočtem přesvědčíme, že pól je průsečíkem společ. tečen a proto se tam cissoida rozpadá ve dvě kvartiky. Jiný případ je konchoida kuželosečky pro její ohnisko atd.

---

[1]) Gino Loria v Int. Math., roč. 1901.

[2]) V pojednání: „O mezi vlastního stínu sborc. ploch šroub. osvětl. paprsky rovnoběž.“ Rozpr. Č. Akademie roč. 1911, čís. 33.

O morfologickém významu kalicha, koruny a paracorolly v květech Mimulus.

Příspěvek k morfologii květu.

Napsal

dr. **Jan Vilhelm,**
docent university Karlovy v Praze.

(S 4 vyobrazeními v textu.)

Předloženo dne 24. listopadu 1922.

Květy vytvořující uvnitř koruny paracorollu v linii *Mimulus tigrinoides-luteus,* vypěstované p. kolegou univers. doc. dr. Arturem Brožkem v universitní zahradě ústavu pro fysiologii rostlinnou J. M. univ. prof. dr. Boh. Němce, sledoval jsem i letošního roku, když počaly kvésti v kulturách počátkem měsíce září. Měl jsem v úmyslu důkladněji si prohlédnouti v těchto květech poměry svazků cevních a určiti přesně jejich průběh a rozložení a tím rozlišiti pravou hodnotu morfologickou paracorolly. Bohužel v kulturách letošního roku vyvinulo se poměrně menší množství květů této odrůdy a následkem toho mohl jsem provésti svoje studie jen na omezeném počtu květů tohoto plemene, které se jen autogamicky rozmnožuje a po několika generacích snižuje svoji životní schopnost. Vyšetřil jsem znova, jaké morfologické vztahy mají k sobě v trubce korunní lístky korunní, tyčinky a nové útvary paracorollní a dospěl jsem opět k podobným výsledkům, jež jsem uveřejnil v pojednání „*Paracorolla v květech Mimulus*" (l. c. Rozpr. Čes. Akad., ročn. XXX, tř. II., č. 1, 1921). Tentokráte však důkladně jsem prozkoumal svazky cevní v korunní trubce i poměr jejich k tyčinkám a k novým útvarům paracorollním. Tím doplnil jsem svoji dřívější studii oceněním významu morfologického kalicha, koruny a paracorolly v květech *Mimulus.*

Zvláštní zajímavé poměry poskytly mi květy, jež se objevují často u této odrůdy *Mimulus* a pravidelně mají v trubce korunní, kde by měla býti abortovaná tyčinka, jen paracorollní útvary, kdežto mezi vyvinutými tyčinkami tyto buď vůbec nevytvořují nebo jen v zakrnělém stadiu. V tomto stadiu nalezl jsem shodně ve čtyrech květech z různých individuí dva paracorollní útvary jen na místech, kde není vyvinuta pátá tyčinka v zygomorfním květu, což jest novým důkazem, že tyto petaloidní útvary nepatří k tyčince, nýbrž souvisí s trubkou korunní. Vyvinují se nejprve v této části zygomorfického květu, poněvadž tu mají nejvíce místa k svému vývoji. Na jiném květu vedle těchto paracorollních výrůstků také objevil se malý petaloidní výrůstek, zvlášť hojnými chloupky žlaznatými pokrytý, na straně obrácené k trubce korunní právě na největším lístku korunním, tvořícím dolení pysk. Podobně i zde ve trubce korunní v normálním květu nachází se nejvíce volného místa k vytvoření nového útvaru květního. Právě tyto květy, v nichž mohl jsem pozorovati vývoj paracorolly u *Mimulus*, nejvíce objasnily mi tento zvláštní útvar v těchto květech.

Při podrobnějším prohlédnutí roztržené trubky korunní lze i vyšetřiti, kde srůstají paracorollní útvary s trubkou korunní a kde srůstají nitky tyčinek této odrůdy s paracorollou v květech *Mimulus*. Nitky tyčinek jen zcela krátce zespod nejvýš 2—3 *mm*, kdežto paracorollní útvary splývají s trubkou korunní ve výšce až 10 *mm*. Tedy i zde lze spatřiti rozdíly mezi oběma částmi květu.

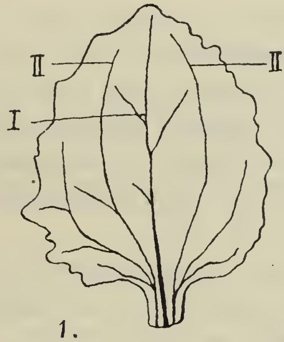
Než hlavní zřetel tentokráte hleděl jsem věnovati nervatuře květních částí. Nervatura trubkovitě srostlého kalicha jest výrazná a při srovnání s nervaturou korunní trubky této úplně podobná.

Pět zelených kališních lístků srůstá v trubkovitý kalich, v jehož pět cípů směřují zespod přímé hlavní nervy (svazky cevní), jež jsou vyvinuty značně silně proti druhým a tvoří tu jakousi žebernatost trubky kališní. Mezi dvěma žebry končícími v cípu kališním nacházíme skoro rovnoběžně s hlavním žebrem (I.) po obou stranách tohoto nervy vedlejší (II.), slabší, ne zcela přímo probíhající, často i slabším větvením zkřivené, na konci mnohdy vidličnatě se dělící, rozbíhající se v menší větvičky a nedosahující plně okraje kališního. Mimo to pozorujeme ještě v místech neznatelného srůstu kališních lístků 1—2 menší nervy, jež jsou silnější větví nervu postranního, vedlejšího.

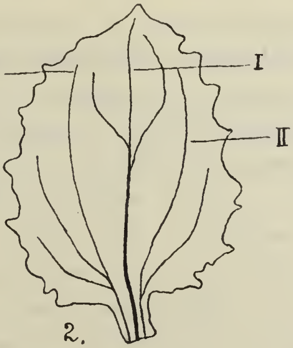
Vezmeme-li ku srovnání vegetativní list lodyžní z téže rostliny, shledáme, že na něm jest výrazná nervatura stejného složení. Hlavní nerv (I.) probíhá až ku špičce čepele středem a jest skoro přímý neb vzrůstem slabě obloukovitě prohnutý; vedlejší nervy (II.) probíhají po jeho obou stranách skoro rovnoběžně ovšem obloukovitě, a k nim druží se slabší ještě obloukovité postranní 1—2 větve, které na spodu čepele se spojují s vedlejšími nervy.

Dle toho srovnání *nervatura kališní,* ač srůstem kališních listků poměry v nervatuře bývají složitější, u *Mimulus odpovídá úplně nervatuře čepele vegetativního listu lodyžního.*

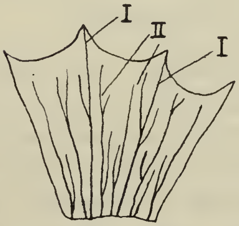
U trubky korunní, vzniklé srůstem ze pěti korunních lístků, rovněž dá se stanoviti rozložení nervatury a tím zjistiti nervaturu korunního lístku samotného. Jak jsem již se zmínil poměry u koruny jsou podobné jako u kalichu. Hlavní nervy nejsilnější probíhají zespod trubky korunní směrem do střední části každého z pěti cípů korunních. Mimo to jako u kalichu rozlišíme i zde po obou stranách každého hlavního nervu ještě slabší nerv téměř rovnoběžně zespod vybíhající a jen v hoření části od hlavního nervu se odchylující stranou.



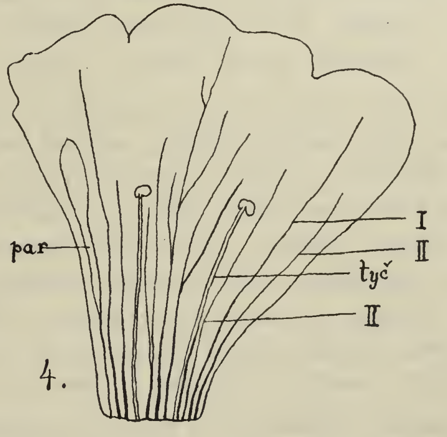
1.



2.



3.



4.

Z toho vidno, že základní struktura nervatury vegetativní čepele listové, kalicha a koruny jest shodná a *korunní lístek* u *Mimulus jest téhož morfologického významu jako kališní. Můžeme ho zase dle průběhu nervatury srovnávati plným právem s vegetativní čepelí listovou jako homologický orgán.*

Proto z těchto důvodů *útvary paracorollní nemohou míti povahu palistů,* jak se často vyskytuje tento zjev v květech jiných rostlin, kde korunní lístek odpovídá při srovnání nervatury nejspodnější části vegetativního listu, což v četných jiných případech dokázal Glück.*)

Při bedlivějším sledování nervatury jest patrné, že hlavní nejsilnější a největší nerv probíhá i v trubce korunní ve květech s paracorollními útvary zcela volně v každém korunním lístku. *Vedlejší nervy* druhořadé každého lístku korunního ve srostlé trubce se však *rozdělují, jejich silnější větev probíhá do korunní trubky a slabší odděluje se a vybíhá do paracorollního útvaru petaloidního.*

Jen takovým způsobem lze si vysvětliti, že vznikají mutací v trubce korunní ve květech *Mimulus* paracorollní petaloidní útvary, vlastně nová vnitřní koruna s dvojitým (rozpůleným) počtem členů, odštěpující se v dolení části od původní koruny patrně k zvýšení působnosti smyslné (k lákání hmyzu), kteroužto jest obdařena koruna květu *Mimulus* plnou měrou. *Jest to tedy zde zvláštní případ tvořícího se listu dvojčepelného, jehož nová polovice jest rozeklaná ve dva úkrojky nebo laloky.*

Ještě jednu zvláštnost lze i tu pozorovati. Střední hlavní nerv korunního lístku jest více na vnější stranu koruny posunutý a na vnitřní straně trubky korunní zdánlivě připadá jako vpadlý, na straně vnější jest však více ven vyniklý. Za to druhé dva vedlejší nervy více vynikají na straně vnitřní, a zároveň souvisí přímo s útvary paracorollními.

Zda tyto nové útvary paracorollní morfologicky odpovídají palistům (stipulae) nebo jazýčku (ligula), nemohl jsem zjistiti a z toho důvodu, že u rodu *Mimulus* přisedají vegetativní listy těsně buď pochvatě nebo tvoří jen zcela krátké pochvaté řapíky a po palistech nebo ligule není na vegetativních listech potuchy. *Proto nelze paracorollu u Mimulus vykládati za palistové (stipulární) nebo ligulární homologie.* Spíše dalo by se v tomto případě souditi, že *paracorollní útvary* u *Mimulus* by mohly *odpovídati snad dolením lalokům čepele listové vzhůru se obracejícím,* čemuž by nasvědčovaly také poměry nervatury v korunní trubce.

Konečně dodal bych k dříve již podaným důkazům, že paracorollní útvary u *Mimulus* nejsou ve spojitosti s tyčinkami, ještě nový doklad a sice právě ze sledování nervatury na spodině trubky korunní. Na spodině roztržené trubky korunní spočítáme velice snadno 19 nervů, z nichž 4 jsou vlastně přirůstající nitky tyčinek, značně silnější a nápadnější svým zvětšeným objemem. Jsou i nápadné tím, že od pletiva korunní trubky, s níž srůstají, nápadně dovnitř odstávají. Na místě mezi dvěma cípy korunními proti pysku, kde předpokládáme abortovanou tyčinku, nacházíme také vyvinutý silnější nerv. Do každého ze pěti korunních lístků vstupují tři nervy, jež jsou ponořeny úplně do pletiva trubky korunní.

Z toho vidno, že *paracorolla* u *Mimulus nemá s tyčinkami nic společného a že paracorolla dle průběhu svazků cevních náleží k původní koruně,*

---

*) l. c. *Blatt- und blütenmorphologische Studien.* Jena, 1919.

jež mění se v korunu dvojčepelnou. Dle nervatury sluší považovati korunu i kališní lístky v květech Mimulus morfologicky za homologické čepeli listové.

Za poskytnutí materiálu k tomuto pojednání vzdávám p. kol. dru Arturu Brožkovi své vřelé díky!

Výklad vyobrazení v textu.

Obr. 1. a 2. Lodyžní listy Mimulus; I. hlavní nerv; II. vedlejší nerv.
Obr. 3. Část roztrženého kalicha s označením nervatury jako v předešlých obrazech.
Obr. 4. Část trubky korunní rozevřené s označením nervatury jako v předešlých obr.; *par* = paracorolla; *tyč* = tyčinka.

O identitě agnolithu s inesitem.

Napsal

F. Ulrich v Praze.

Předloženo dne 24. listopadu 1922.

Za svého pobytu v B. Šťávnici o letošních prázdninách získal jsem malý formát (6 × 10 *cm*) jalové výplně žíly, na němž vedle bílého vápence a hnědě růžového celistvého uhličitanu manganato-železnato-vápenatého se vtroušenými zrnky sirných rud (PbS, $CuFeS_2$, FeS_2 a ZnS) mi ihned byl nápadný pěkně růžový, radiálně paprsčitý aggregát, vyplňující na onom formátu nepravidelnou žilku, se zřetelně mladším křemenem. Kus byl označen rukou zesnulého báňského geologa šťávnického Ludvíka Cseha jako „Diallogit Schöpfertaró", tedy z hlavní štoly v Hodruši. Na první pohled jsem poznal, že onen nerost rozhodně dialogitem není a také předběžná zkouška kyselinou solnou na malém fragmentu provedená ukázala nepřítomnost CO_2. Nepochyboval jsem, že mám v ruce t. zv. agnolith, popsaný Breusingem[1]) na konci min. století na základě sbírkového materiálu ve Freiberku a v Berlíně (t. zv. manganokalcit Breithauptův), po jehož vzorcích jsem se při studiu literatury v Praze ještě před odjezdem na Slovensko marně sháněl. Po návratu do Prahy provedl jsem novou předběžnou zkoušku chemickou na čistých úlomcích, která dokázala přítomnost kysličníku křemičitého, manganu, vápníku a vody, nepřítomnost CO_2. Na opatření dostatečného množství homogenního materiálu pro kvantitativní analysu nebylo za daných poměrů a způsobu výskytu (těsné prorůstání s uhličitany a mladším křemenem) ani pomyšlení, kromě toho musil jsem hleděti, aby co nejvíce materiálu zůstalo pro sbírky min. ústavu a Národního musea, jež dosud, jak jsem se již zmínil, „agnolithu" neměly a proto jsem prostudoval především vlastnosti optické, jež právě u křemičitanů jsou nejspolehlivějším znakem diagnostickým. Již při prvním mikroskopickém prohlédnutí, když jsem se přesvědčil přibližně o velikosti lomu, zhášení a optické orientaci, konstatoval jsem úplnou shodu s inesitem, o němž přesná a téměř úplná data právě nedávno podal E. S. Larsen v obsáhlé práci „The microscopic determination of the nonopaques minerals“. Mezi tím vzácnou laskavostí správy mineralog. sbírek *Národního musea* dostal jsem za účelem srovnávacího studia k disposici dva vzorky pravého *inesitu* z *Långbanu* a z dolu *Harstigen* u *Pajsberku* ve Švédsku, a podávám v těchto řádcích výsledek svých studií spolu s kritikou práce Breusingovy.

---

[1]) E. Breusing: Untersuchungen über *Breithaupt's* Manganokalcit (Agnolith Breusing). N. Jb. f. Min. etc. B. Bd. XIII., 1899, pag. 265 a násl.

* * *

Historická a literární část práce Breusingovy, značně rozvláčně psaná, je jinak pečlivá a celkem správná. Za účelem orientace pro další postup je nutno uvésti hlavní fakta:

R. 1844 uviděl výborný freiberský mineralog A. Breithaupt na jedné ze svých studijních cest ve *Vídni* (patrně v nějaké soukromé sbírce) velmi pěkný exemplář t. zv. „faserigen Braunspat“ Wernerova ze *Štávnice* na Slovensku, získal jej a po návratu do *Freiberka* podrobil bližšímu studiu. Poznal jej co samostatný druh nerostný, nazval jej *manganokalcitem* a podle zevních znaků zařadil jej do svého rodu *Holoëdrites* spolu s *aragonitem*, *tarnovicitem*, *strontianitem*, *witheritem* a *cerussitem*, tím spíše, poněvadž se kvalitativně přesvědčil o přítomnosti kysličníku uhličitého. V tomto svém názoru byl také utvrzen C. F. Rammelsbergem, který v *Poggendorffových Annálech* 68. sv. str. 511 publikoval kvantitativní analysu, již uvádí též v monumentálním svém díle *Handbuch der Mineralchemie* 1860, str. 206, a podle níž má *manganokalcit* složení $MnCO_3$ 67·48%, $CaCO_3$ 18·81%, $MgCO_3$ 9·97%, $FeCO_3$ 3·22%, úhrnem nalezeno 99·48%. Tím byla, jak se zdálo, samostatnost a oprávněnost nové specie dokonale zaručena, a údaje o ní přecházely pak do všech tehdejších učebnic mineralogických. První podnět k revisi fysikálních vlastností a chemického složení manganokalcitu dala malá noticka nedávno zesnulého maďarského mineraloga J. A. Krennera, publikovaná v Grothově Zeitschrift f. Krist. und Min. r. 1883, podle níž manganokalcit (exempláře Národního musea v Pešti a dvorního musea ve Vídni) má štěpnost *rhomboedrickou* a nikoliv *prismatickou* a *brachypinakoidální*, jak udával Breithaupt, a jest tedy trigonální a ne kosočtverečný. Breithaupt byl tenkrát již mrtev († 1873), ale na poznámku Krennerovu reagoval Breithauptův přítel Des Cloizeaux. Známý ten francouzský specialista v určování optických vlastností krystalů studoval Breithauptův manganokalcit již dříve; patrně mu Breithaupt věnoval vzorek tohoto vzácného materiálu, aby jej opticky prozkoumal, za jeho návštěvy ve *Freiberku* r. 1868.[2]) Za života Breithauptova neuveřejnil Des Cloizeaux o výsledku těchto svých studií ničeho; teprve rok po jeho úmrtí v prvním svazku druhého dílu svého „Manuel de minéralogie“ věnoval u *dialogitu* malou zmínku též *manganokalcitu.* V textu reprodukuje celkem věrně popis Breithauptův, v poněkud delší poznámce podává pak pozorování vlastní na úlomku z originálního sbírkového kusu báňské Akademie ve Freiberku. Příznačnou zdá se mi závěrečná věta: De nouvelles observations seraient donc nécessaires pour établir définitivement, si le minéral doit être regardé comme une véritable aragonite manganésienne ou seulement comme une variété de diallogite fibreuse et *peu homogène.* Z ní vidíme, že již tenkráte byl Des Cloizeaux přesvědčen o inhomogenitě Breithauptova materiálu, ale patrně z piety k zesnulému druhu a příteli zachovával reservu. Noticka Krennerova jej přiměla k tomu, aby aktivně v této věci vystoupil. Již 15. prosince 1883 píše A. Weisbachovi, nástupci Breithauptovu ve Freiberku, dopis, v němž se rozhodně staví proti mínění Krennerovu, sděluje, že na fragmentu, jejž mu Breithaupt ulomil z kusu ve sbírce Wernerově r. 1868, našel dva nerosty, jeden dvojosý, s velikým úhlem os optických, druhý jednoosý, *positivní.*[3]) Za účelem dalšího studia prosí pak Weisbacha o zaslání malých úlomků a současně žádá, aby Kl. Winkler, objevitel germania, jenž v oné době ve *Freiberku* rovněž působil, provedl kvantitativní rozbor. Weisbach vyhověl ihned jeho žádosti a již 22. prosince téhož roku mu píše Des Cloizeaux nový dopis, v němž podává první kvantitativní data o velikosti úhlu os optických, úhlu zhášení a o dispersi. Materiál, Weisbachem zaslaný, byl patrně velmi pěkný, poněvadž u něho Des Cloizeaux nalezl *šikmý výchoz ostré středné* na úlomcích štěpných podle (010) a z toho správně dedukoval jeho příslušnost do soustavy *trojklonné,* kdežto před tím se domníval, že onen záhadný „manganokalcit“ je monoklinický. Jak úsilovně se snažil Des Cloizeaux věc rozřešiti, o tom svědčí jeho druhý dopis Weisbachovi ze dne 14. ledna 1884, v němž podává další přesnou charakteristiku „manganokalcitu“ — poznal v něm již určitě *nový* nerost, a to vodnatý křemičitan hlavně manganatý, a očekává jen netrpělivě výsledek analysy Winklerovy, jež musí jeho přesvědčení potvrditi. Jedna věc ho však zaráží — stará analysa Rammelsbergova z r. 1846 uveřejněná v Poggendorffových Annálech sv. 68, str. 511. Byltˇ Rammelsberg tenkrát příliš velkou autoritou, než aby se někdo odvážil pochybovati o správnosti jeho nálezu, tím spíše, když v uvedené zprávě Rammelsberg výslovně píše: *Ich fand darin* etc. Proto Des Cloizeaux v tomto dopise raději předpokládá, že se spíše ve freiberské sbírce stala nějaká konfuse mezi původním originálem Breithauptovým a materiálem, jejž mu Weisbach poslal k prozkoumání. Ze studia tohoto zajímavého nerostu šťávnického vznikla pak zpráva Des Cloizeauxova, předložená v sezení Société minéralogique de France 13. března 1884 a publikovaná v *Bulletinu* této společnosti: *Examen optique et cristallographique de plusieurs silicates de manganèse,* ve které vedle dat optických je uvedena analysa Winklerova, jíž je dokázáno, že zkoumaný nerost je vodnatý *křemičitan,* srostlý těsně s uhličitanem. Určité formule mu Des Cloizeaux nedává, ale navrhuje odstranění jména manganokalcit z mineralogické systematiky a zároveň připouští správnost zmíněné noticky Krennerovy, poněvadž v onom případě jde skutečně o rhomboedrické karbonáty. Ještě jeden dopis Des Cloizeauxův Weisbachovi cituje Breusing — ze 14. března 1884. Z něho je viděti, jak bojuje s pochybami o správnosti analysy Rammelsbergovy, ale konečně přece v jeho duši vítězí autorita Rammelsbergova. Tím byla korespondence mezi Paříží a Freiberkem ukončena — ale věc neusnula. Na článek Des Cloizeauxův reagoval nejprve Krenner,[4]) později Groth,[5]) a oba projevili názor, že se ve Freiberku stal omyl, a Krenner přímo prohlásil, že Des Cloizeauxem zkoumaný materiál není vůbec ze Šťávnice. Výtka nesprávnosti ve sbírce freiberské dotkla se Weisbacha, jehož láska k nerostům a přesnost byla příslovečná (viz článek V. Goldschmidta „Erinnerungsblätter an Albin Weisbach“) a proto se obrátil přímo na toho, kdo jedině mohl podati rozluštění v této spletité věci — na Rammelsberga. Po několikeré výměně dopisů mezi Weisbachem, Rammelsbergem a Webskym byl nalezen konečně v musejní sbírce berlínské původní kus, jejž Rammelsberg přímo od Breithaupta obdržel a v něm Rammelsberg nyní po upozornění z *Freiberka* nalezl i SiO_2 i H_2O vedle MnO, FeO, CaO, MgO a CO_2 — v *prvním doplňku* ke druhému vydání své knihy „Handbuch der Mineralchemie“ str. 157 uvádí všechny vypočtené komponenty, kromě *vody,* ačkoliv ta podle jeho dopisu Weisbachovi[6]) ve zkoumané směsi nerostů činí *několik procent.* Summa všech složek v uvedené analyse *bez vody* činí přesně 100% — na základě cit. dopisu je nutno předpokládati, že k tomuto výsledku dospěl Rammelsberg jen výpočtem a nikoliv přímým nálezem, neboť zrovna na onom místě praví, že *nemohl přesně určiti složení uhličitanů.* Ten, kdo by neznal cit. dopisu, musí však mysliti při čtení Rammelsbergovy zprávy v uvedeném *doplňku* str. 157, že se mu nějakým způsobem podařilo uhličitany odděliti — není tedy tato zpráva Rammelsbergova ani v nejmenším spolehlivá a nesmí se při dalších závěrech vůbec k ní bráti zřetel, máme-li se vyvarovati omylů podobných jako při analyse původní z r. 1846, kterou podle vlastních slov Rammelsbergových (v dopise Weisbachovi ze 14. května 1885) provedl patrně nějaký, jak je z celé historie viděti, málo spolehlivý praktikant v jeho laboratoři. Rozdíly ve výsledcích analysy Winklerovy a druhé analysy Rammelsbergovy jsou na první pohled velmi značné, a proto asi Weisbach, nepovažuje celou věc za úplně jasně vyřízenou, vyzval r. 1897 svého žáka E. Breusinga, aby onu otázku prostudoval. Dvě léta se jí tento věnoval a dík osobním stykům svého učitele měl k disposici jak studijní materiál freiberský, tak i originál Rammelsbergův z Berlína, a vedle publikovaných zpráv v literatuře i řadu dopisů, jež se během doby ve Freiberce nashromáždily a z nichž některé jsem uvedl. Literatury i oněch dopisů použil celkem správně, ale docela nešťastně postupoval při vlastním optickém a chemickém výzkumu svého materiálu. Ačkoliv zkoumal celkem pět výbrusů, nedošel opticky k žádným uspokojivým výsledkům a přijímá jen údaje Des Cloizeauxovy. Pokud se chemického výzkumu týče, provedl celkem tři analysy „manganokalcitového" materiálu, z nich jednu úplnou. Ale právě ona první analysa, která tvoří praemissu pro všechny další chemické závěry autorovy, jest jistě málo přesná a kromě toho úplně nesprávně interpretována, jak vysvítá z těchto fakt:

---

[2]) Breusing l. c.[1]) str. 314—316.

---

[3]) správně má býti *negativní.*

---

[4]) Zeitschrift f. Kryst. 9. 1884, p. 288.

[5]) Zeitschrift f. Kryst. 11. 1886, p. 207 poznámka.

[6]) Breusing l. c. [1]) str. 311.

Stanovení CO_2 a H_2O patří k nejdelikátnějším operacím v analyse křemičitanů a jest také podle Hillebranda[7]) a Washingtona[8]) zatíženo největšími chybami. A právě tyto dvě důležité součástky určoval Breusing v oné základní analyse přímo jen *jedinkrát,* spokojuje se v dalších jen výpočtem, nejvýše ještě stanovením CO_2. K tomu přistupuje další závažná chyba při interpretaci oné základní analysy, která působí, že také všechny další konkluse autorovy, na jejím podkladě činěné, jsou nesprávné: Breusing při rozpočtu jednoduše předpokládá, že všechen vápník a hořčík jsou vázány na CO_2, a nebera zřetel k molekulárním kvocientům, odečítá jejich kysličníky z analysy, jejíž zbytek přepočte an 100 a pak počítá vzorec svého „agnolithu", při čemž dochází k poměru:

$$SiO_2 : (MnFe)\,O : H_2O = 4 : 3 : 2.$$

Docela k jinému výsledku dospějeme, vypočteme-li molekulární kvocienty a zachováváme přesně stoechiometrické poměry, jak vidíme z tohoto přehledu:

	I.	II.	III.
SiO_2	42·15%	0·6990	0·6990
FeO	1·12%	0·0156	0·6513
MnO	35·88%	0·5059	
CaO	8·22%	0·1467	
MgO	0·51%	0·0216	
CO_2	6·14%	0·1395	0·3536
H_2O	6·37%	0·3536	
	100·39%		

---

[7]) W. F. Hillebrand: The analysis of silicate and carbonate rocks. U. S. Geol. Survey Bull. 700, 1919.

[8]) H. S. Washington: Manuel of the chemical analysis of rocks. III. ed. 1919. Analysis of igneous rocks. U. S. Geol. Survey Profes. paper 99, 1917

I. základní analysa Breusingova. II. molekulární kvocienty. III. molekulární kvocienty, kde od součtu kvocientů RO odečten molekulární kvocient CO_2. Zbytek s ostatními komponentami dává velmi dobrý poměr $SiO_2 : RO : H_2O = 70 : 65 : 35 = 14 : 13 : 7$. Že onen uhličitan není *dolomitem*, jak myslí Breusing, vidíme při srovnání mol. kvocientů CaO a MgO na první pohled, stejně jako poznáme ze II. sloupce, že již CaO je více, nežli odpovídá nalezenému množství kysličníku uhličitého a že není tedy správným odečísti jednoduše MgO a CaO spolu s CO_2 a ze zbytku počítati vzorec křemičitanu.

Následkem tohoto chybného závěru je pak dosti značný nesouhlas mezi nalezenými počítanými hodnotami pro analysu druhou (l. c. str. 299), kdežto analysa třetí (l. c. str. 304) je patrně silně ,,upravena", takže po odečtení ,,dolomitu" a přepočtení na 100 dává téměř přesně hodnoty theoretické pro křemičitan $4\,SiO_2 : 3\,MnO : 2\,H_2O$. Rovněž analysa Winklerova, kterou publikoval Des Cloizeaux v uvedené zprávě, jeví veliké rozdíly mezi theorií a skutečně nalezenými hodnotami; Des Cloizeaux sám ji vůbec nerozpočítává, kdežto Winkler[9]) v dopise Weisbachovi myslí, že může psáti formuli:

$$6\,SiO_2 \,.\, 4\,MnO \,.\, 3\,H_2O.$$

Rozdíl mezi tímto vzorcem a skutečně nalezeným množstvím jest zase značný. O vápníku Winkler v této analyse předpokládá, stejně jako Breusing, že jest úplně vázán na CO_2, zdá se však, že obsah CO_2 přímo nestanovil.

Že jest vápník obsažen i v *křemičitanu*, o tom svědčí nález Damourův.[10]) Sám jsem se o správnosti jeho nálezu přesvědčil mikrochemicky.[11]) Kvantitativní analysa nepovede v žádném případě zaručeně k cíli, neboť povahou materiálu (i Breusingova ,,agnolithu" i mnou nalezeného ,,dialogitu" Csehova) je způsobeno, že nedostaneme nikdy množství čistého křemičitanu, potřebné ke kvantitativní analyse, nýbrž vždy jeho směs s uhličitanem, eventuelně ještě s křemenem. Jediná cesta, která v tomto případě vede k cíli, je výzkum *fysikální*, zvláště *optický*.

V tomto směru jest shoda velmi dobrá, jak svědčí srovnání fysikálních vlastností agnolithu s korespondujícími vlastnostmi inesitu, stanovenými Schneiderem,[12]) Scheibem,[13]) Flinkem,[14]) Hambergem[15]) a Zamboninim.16) Oba se vyskytují ve vláknitě až stébelnatě paprščitých aggregátech skelně lesklých, růžových nebo masově červených, někdy šedorůžových. Vryp je bílý, tvrdost 4·5—5 podle Mohsovy, 5·5—6 podle Breithauptovy empirické stupnice tvrdosti, štěpnost velmi dobrá podle (010), dobrá podle (100). Hustota inesitu z *Dillenurgu* v Nassavsku jest rovna 3·03, ze Švédska 3·0295, manganokalcit Breithauptův 3·037, agnolith Breusingův má 3·054 (nehomogenní) „dialogit" hodrušský 3·0298. Optické vlastnosti inesitu studovali Scheibe17) a nejnověji Larsen,18) o „agnolithu" neúplná data vděčíme A. Des Cloizeauxovi. Podle Scheibeho svírá směr zhášení, odpovídající stopě roviny os optických na (010), s *c* 60½°, na (100) úhel zhášení jest roven 12°. Negativní ostrá středná skoro kolmá na (010), úhel os optických měřen v aparátu Adamsově s $n_{\mathrm{Na}} = 1{\cdot}7782$ rovná se 64°00′ pro Li, 63°28′ Na, 62°51 Tl. Larsenovy údaje optické orientace se s tím úplně shodují a indexy lomu podle tohoto autora jsou rovny:

---

[9]) Breusing l. c. str. 322.

[10]) Des Cloizeaux Bull. d. l. soc. min. d. France 1884, str. 74 a násl.

[11]) Drobné úlomky, jejichž homogenitu jsem mikroskopicky zjistil, odpařil jsem na hod. sklíčku třikrát s konc. HCl, získaný produkt promyl kapkou destilované vody, k níž přidáno něco zřeď. H_2SO_4 a pak necháno samovolně odpařiti na podložním sklíčku. Vznikly charakteristické krystaly sádrovce $CaSO_4 \,.\, 2\,H_2O$.

[12]) A. Schneider, Jahrb. geol. Landesanst. Berlin 1887, 483; Zeitschr. d. geol. Ges. 1887, 39, 833.

[13]) Scheibe u. Schneider a l. c.[12]); dále Zeitschr. d. geol. Ges. 1889, *41*, 162.

$$\alpha = 1{\cdot}609 \pm 0{\cdot}003 \qquad \beta = 1{\cdot}636 \pm 0{\cdot}003 \qquad \alpha = 1{\cdot}644 \pm 0{\cdot}003$$
$$\beta - \alpha = 0{\cdot}027 \qquad \gamma - \beta = 0{\cdot}008 \qquad \gamma - \alpha = 0{\cdot}035$$

Pro „manganokalcit" resp. *agnolith* Breusingův udává Des Cloizeaux úhel zhášení na ploše nejlepší štěpnosti ca 61° pro světlo bílé, na ní možno pozorovati výchoz negativní ostré středné s úhlem os $2\,H_a = 80°13'$ (lom oleje neudán). Disperse skřížená a slabě ukloněná. Tato celková shoda optických vlastností byla nápadna již Hambergovi15), který upozornil na možnou identitu obou nerostů. — Breusing však hájí samostatnost a rozdílnost těchto specií. Studoval jsem opticky jak typický *inesit* ze Švédska (dva vzorky Nár. musea ze sbírky Wraného) tak originální „agnolith" Breusingův z berlínského musea i ze sbírek freiberské Akademie (obdržel jsem odtud vzorky od pp. prof. Belowského a Kolbecka laskavým prostřednictvím prof. Slavíka), i „dialogit" Csehův, a konstatoval jsem jejich úplnou shodu vzájemnou i s údaji v literatuře. Štěpné úlomky, mikroskopem pozorovány, jsou dvojího rázu: jedny zhášejí jen o malý úhel — 12°—14° pro světlo sodíkové — šikmo ke svému protažení a mají při zkoumání citlivou violovou destičkou ráz délky positivní — to jsou úlomky štěpné podle (100). Druzí jedinci zhášejí mnohem šikměji — 29½° pro světlo sodíkové maximálně — ráz

---

14) G. Flink: Öfv. Vet.-Ak. Förhand. Stockholm 1888, *45*, 571; 1889, *46*, 12,

15) A. Hamberg: Geol. Fören. i. Stockholm Förhandl. sv. XVI., str. 323 a násl.

16) F. Zambonini: Contributo allo Studio dei silicati idrati, Atti Accad. Napoli 1908 (XVI), 1—127.

17) l. c. 13)

18) E. S. Larsen: The microscopie determination etc. Bull. 679 of U. S. G. Survey 1921.

délky jest negativní a v konvergentním světle jeví výchoz negativní ostré středné s velkým úhlem os optických a zřetelnou dispersí; stopa roviny os optických jest od délky úlomků uchýlena o $60\frac{1}{2}^0$, dvojlom menší než u předešlých — ti odpovídají štěpnosti podle (010). Při kvantitativním stanovení indexů lomu methodou Beckeho nalezl jsem:

$\alpha' = 1{\cdot}61755$ $\beta' = 1{\cdot}63588$ $\gamma' = 1{\cdot}64316$
$\alpha = 1{\cdot}618$ $\beta = 1{\cdot}636$ $\gamma = 1{\cdot}644$

Jak je viděti, souhlasí β a γ úplně s hodnotami, udanými Larsenem, difference je však u α. Za účelem kontroly jsem tento index stanovil několikrát vždy se stejným výsledkem. Počítáme-li úhel os opt. $2V\alpha$ z indexů lomu, udaných Larsenem, ať tangentovou, ať cosinovou formulí,[19]) docházíme k hodnotám úplně jiným, než L. udává. Zdá se nejpravděpodobnějším, že se mu zde stal omyl — místo 1·609 mělo býti asi 1·619. Ale poněvadž totéž nesprávné číslo je uvedeno též v tabulce str. 257, tedy je opravuji.

Ale shoda mezi agnolithem a inesitem jest nejen ve vlastnostech fysikálních, ale i v jejich chování chemickém pokud se týče vody. Dehydrataci agnolithu studoval Breusing, konstituci inesitu snažil se rozřešiti F. Zambonini. Oba se shodují v tom, že je tu přítomna dvojí voda: část jí uniká do 200° — Breusing ji nazývá vodou krystalovou, ale podle novějších výzkumů Zamboniniho a velké řady jiných badatelů o zeolitech bude správnějším považovati ji za vodu „zeolitovou", jejíž množství silně kolísá, jak upozornil již Hamberg, druhá část jest vodou konstituční. Názory o konstituci inesitu jsou u různých badatelů, kteří se touto otázkou zabývali, značně odlišné — zatím považuji za nejsprávnější vzorec Zamboniniho $H_2(MuCa)_2Si_2O_7 + 0{\cdot}6H_2O$. Na jeden zajímavý zjev si dovoluji upozorniti: v literatuře existovaly určité rozpory v údajích o tavitelnosti agnolithu. Revidoval jsem je a shledal, že se před dmuchavkou šťávnický inesit lehce roztápí v hnědé sklo. Žíháme-li úlomek *inesitu* na platinovém plíšku v červeném žáru několik minut, tedy se rozpadá velmi brzy v prášek na povrchu zahnědlý. Napadlo mne, zkusiti jej opticky. K svému překvapení jsem shledal, že ani několikaminutovým žíháním na dmychadle se inesit úplně nerozruší, nýbrž vzniká nový nerost, opticky kromě lámavosti světelné velmi blízký amfibolům. Lámavost světelná značně stoupla (kolem *1·68*), změnila se optická orientace (marně pátráme po výchozu ostré středné na štěpných lupíncích), ráz délky vesměs positivní, na (010) malý úhel zhášení. Současně objevuje se zřetelný pleochroismus mezi barvou růžovou (|| k délce) a zelenavě žlutou (⊥ k délce). Hnědé zbarvení jest způsobeno vyššími oxydačními produkty Mn. Jakmile se mi podaří opatřiti si potřebnou aparaturu, budu tyto zjevy, jež slibují přispěti k objasnění konstituce studované sloučeniny, sledovati kvantitativně v atmosféře některého inertního plynu a dovolím si o nich příležitostně podati zprávu současně s novými analysami inesitu, o nichž nyní pracuji.

---

[19]) l. c. [13]) str. 10—11.

* * *

Profesorovi Dru Fr. Slavíkovi jsem zavázán díkem za vzácnou laskavost, s níž mi pomohl k opatření originálního „agnolithu" Breusingova.

Souhrn.

Touto prací je dokázáno:

1. Identita agnolithu Breusingova (manganokalcitu Breithauptova) s inesitem na základě vlastností fysikálních i chemických. Název agnolith budiž odstraněn z mineralogické systematiky vůbec, manganokalcitem pak se rozumí rhomboedrický uhličitan (CaMgMnFe) CO_3, se značnějším podílem manganu vedle vápníku, jejž analysovali Weibull a Kovář.[20]) Opraveny údaje Larsenovy o velikosti indexů lomu inesitu.

2. Báňská Šťávnice na Slovensku je novým nalezištěm *inesitu*, který přistupuje co nový člen k dosud známým nerostům republiky.

3. Upozorněno je na zajímavou thermickou přeměnu inesitu, jež bude dále experimentálně sledována.

Praha, v říjnu 1922.

Mineralogický a petrografický ústav
university Karlovy.

---

[20]) Kovář: Chemický výzkum některých nerostů z okolí výběžku Poličského. Rozpr. Č. Ak. VIII. čís. 28, str. 7 a násl.

ROČNÍK XXXI. TŘÍDA II. ČÍSLO 42.

Potierova relace v případě totální reflexe na krystalech dvojlomných.

Píše

Miloslav Hampl,
asistent vys. školy technické v Praze.

Předloženo dne 24. června 1922.

V následujícím chci odvoditi mezný případ rovnice Potierovy, kterého jsem dosud v literatuře nenašel a který snad usnadní řešení problemu polarisace hraničných čar totální reflexe u krystalů dvojlomných.

Užívám anglického pravotočivého systemu souřadného, při čemž osa $+Z'$ spadá do normály dopadové a to směrem *do krystalu.* Osa X' je průsečnice roviny dopadové s hraničnou rovinou obou medií — její kladný směr buď ten, který svírá s dopadovou normálou ostrý úhel. Tím současně je definován směr osy Y'. Především bude nutno odvoditi rovnici *indexové plochy* (značím ji „J_p“) z rovnice *index. ellipsoidu* („J“).

Indexový ellipsoid je v reciprokém vztahu k známému *Fresnel. ellipsoidu.* Má-li *Fr. el.* za poloosy hlavní rychlosti světla v krystalu: a, b, c, má *indexový el.* za poloosy hlavní indexy lomu: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$. Protneme-li *index. el.* diametrálnou rovinou kolmou ke směru vlnové normály, tu poloosy průsečné ellipsy jsou reciproké hodnoty rychlostí vlnových normál, příslušných k onomu směru. Nanášíme-li vždy tyto hodnoty na příslušný směr vlnové normály, obdržíme t. zv. *indexovou plochu.* V této své práci odvozuji rovnici ind. plochy z *obecné rovnice* ind. ellipsoidu — čehož jsem dosud v literatuře nenašel.

Směrové kos. systemu S' ($\equiv X'\,Y'\,Z'$) vzhledem k optickým osám $X\,Y\,Z$ buďte dány schematem:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & X & Y & Z \\ \hline X' & p_1 & p_2 & p_3 \\ \hline Y' & q_1 & q_2 & q_3 \\ \hline Z' & r_1 & r_2 & r_3 \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Jsou-li a, b, c hlavní rychlosti světla v krystalu, bude rovnice J v systemu S':

$$J \equiv a_{11}\, x'^2 + a_{22}\, y'^2 + a_{33}\, z'^2 + 2\, a_{12}\, x'\, y' + 2\, a_{23}\, y'\, z' + 2\, a_{31}\, z'\, x' = 1, \quad (2)$$

kde a_{ik} jsou t. zv. optické parametry, jež jsou dány rovnicemi:

$$a_{11} = a^2\, p_1^2 + b^2\, p_2^2 + c^2\, p_3^2, \quad a_{23} = a^2\, q_1\, r_1 + b^2\, q_2\, r_2 + c^2\, q_3\, r_3\,; \quad (3)$$

ostatní koeficienty dostaneme cyklicky, při čemž indexům resp. *1*, *2*, *3* u příslušného a_{ik} odpovídají směr. kos. resp. p, q, r.

Každému směru rovinné světelné vlny odpovídají v krystalu dvě obecně různé rychlosti $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$. Tyto jsou dány reciprokými hodnotami poloos ellipsy, v níž je J protínán diametrálnou rovinou kolmou ke směru postupu vlny.

Jsou-li směr. kos. vlnové normály $\nu_{1,\,2,\,3}$, bude rovnice diametrálné roviny

$$\nu_1\, x' + \nu_2\, y' + \nu_3\, z' = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Poloosy příslušné ellipsy dostaneme jako extremní hodnoty její průvodičů. Tedy jde o řešení extremu funkce $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ s vedlejšími podmínkami: $J - 1 = 0$, $\nu_1\, x' + \nu_2\, y' + \nu_3\, z' = 0$.

Dle obvyklého způsobu budeme určovati extremy funkce:

$$f = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - \lambda_1\, (J - 1) + \lambda_2\, (\nu_1\, x' + \nu_2\, y' + \nu_3\, z') \ldots. \quad (5)$$

Tyto budou hovět rovnicím

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z'} = 0.$$

Hodnoty x', y', z' v případě extremu značme ξ, η, ζ.

Průvodič $\sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2 + \zeta_k^2}$ bude tedy $= \dfrac{1}{\mathfrak{q}_k}$ pro $k = 1, 2$.

Místo $\dfrac{1}{\mathfrak{q}_k}$ pišme $= n_k$, což je patrně index lomu příslušné vlny.

Dostaneme tři rovnice, z nichž píši pouze první. Další z ní plynou cyklickou záměnou resp. η, ζ za ξ, a resp. ν_2, ν_3 za ν_1:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\xi}{n} - \lambda_1 \frac{\partial J}{\partial \xi} + \nu_1\, \lambda_2 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6_1)$$

Znásobením těchto rovnic po řadě hodnotami předně ξ, η, ζ, a pak ν_1, ν_2, ν_3, a sečtením, obdržíme:

předně
$$n - 2\, \lambda_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

a pak
$$-\lambda_1 \left(\nu_1 \frac{\partial J}{\partial \xi} + \nu_2 \frac{\partial J}{\partial \eta} + \nu_3 \frac{\partial J}{\partial \zeta} \right) + \lambda_2 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Značíme-li $\dfrac{\partial J}{\partial \xi} = J_\xi'$ atd., budou rovnice pro ξ, η, ζ, dáno-li ν_1, ν_2, ν_3:

$$\frac{\xi}{n} - \frac{n}{2} J_\xi' + \frac{1}{2} n \nu_1 (\nu_1 J_\xi' + \nu_2 J_\eta' + \nu_3 J_\zeta') = 0 \quad \ldots\ldots \quad (9_1)$$

a cyklicky dál.

J_p příslušnou k J dostanu, nanesu-li na *směr* vlnové normály délku $n = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Nechť vznikne bod o souřad. X, Y, Z. Pro něj bude

$$X = \nu_1 n, \; Y = \nu_2 n, \; Z = \nu_3 n. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Rovnici J_p obdržíme, vyjádříme-li ν_1, ν_2, ν_3 pomocí X, Y, Z a eliminujeme-li ξ, η, ζ. Postup ukáži pouze na první rovnici:

$$2\,\xi - J_\xi' (n^2 - X^2) + X\,Y\,J_\eta' + X\,Z\,J_\zeta' = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9'_1)$$

Stačí teď vytknouti v rovnicích těchto neznámé ξ, η, ζ na základě rovnic

$$\tfrac{1}{2} J_\xi' = a_{11}\,\xi + a_{12}\,\eta + a_{13}\,\zeta, \text{ atd.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11_1)$$

Tím obdržíme tři rovnice:
(píši opět jen první):

$$\begin{aligned} f_1 = \xi\,[1 - a_{11} (n^2 - X^2) + a_{12} X\,Y + a_{13} X\,Z] - \\ - \eta\,[a_{12} (n^2 - X^2) - a_{22} X\,Y - a_{23} X\,Z] - \\ - \zeta\,[a_{13} (n^2 - X^2) - a_{23} X\,Y - a_{33} X\,Z] = 0. \quad \ldots\ldots \quad (12_1) \end{aligned}$$

Další rovnice $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ následují z této cyklickou záměnou neznámých ξ, η, ζ, souřadnic X, Y, Z a indexů *1, 2, 3* u koef. a_{ik}.

Eliminací ξ, η, ζ z těchto rovnic obdržíme rovnici J_p:

$$J_p \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi}, & \frac{\partial f_1}{\partial \eta}, & \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi}, & \frac{\partial f_2}{\partial \eta}, & \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \xi}, & \frac{\partial f_3}{\partial \eta}, & \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Nám jde hlavně o průsečnou křivku plochy J_p s rovinou $X'\,Z'$. Pro ni bude $Y = 0$. Zavedeme-li polární souřadnice: průvodič n a úhel φ počítaný od osy $+Z'$ směrem k $+X'$ kladně, bude

$$X = n \sin \varphi, \; Y = 0, \quad Z = n \cos \varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

A rovnice průsečné křivky po vyčíslení a úpravě:

$$\begin{aligned} n^4 \left\{ a_{22} (a_{11} \cos^2 \varphi - 2\,a_{13} \sin \varphi \cos \varphi + a_{33} \sin^2 \varphi) - (a_{12} \cos \varphi - a_{23} \sin \varphi)^2 \right\} - \\ - n^2 \left\{ a_{22} + a_{11} \cos^2 \varphi - 2\,a_{13} \sin \varphi \cos \varphi + a_{33} \sin^2 \varphi \right\} + 1 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

V dalším budu značiti někdy k vůli stručnosti:

$$A = a_{11} - 2\,a_{13}\,tg\,\varphi + a_{33}\,tg^2\,\varphi, \;\; B = a_{12} - a_{23}\,tg\,\varphi \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

a dále:

$$\Phi_1 = (a_{22}\,A - B^2) \cos^2 \varphi, \;\; \Phi_2 = a_{22} + A \cos^2 \varphi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

takže rovnice naší křivky C bude:

$$C \equiv n^4 \Phi_1 - n^2 \Phi_2 + 1 = 0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Rovnice průsečné čáry J_p s rozhraním, t. j. s rovinou $X'\ Y'$ se dostane obdobně, položíme-li v rovnici J_p: $Z = 0$, a pak třeba $X = n \sin \vartheta$, $Y = n \cos \vartheta$. Rovnice bude obdobná rovnici křivky C, jen indexy 2 a 3 budou zaměněny, a místo $\sphericalangle \varphi$ nastoupí ϑ.

Nazveme-li křivku G, bude:

$$\begin{aligned} G \equiv n^4 \Big\{ & a_{33} (a_{11} \cos^2 \vartheta - 2\, a_{12} \sin \vartheta \cos \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta) - \\ & - (a_{13} \cos \vartheta - a_{23} \sin \vartheta)^2 \Big\} - \\ & - n^2 \Big\{ a_{33} + a_{11} \cos^2 \vartheta - 2\, a_{12} \sin \vartheta \cos \vartheta + a_{22} \sin^2 \vartheta \Big\} + 1 = 0. \quad . \quad (20) \end{aligned}$$

Připomínám, že G není t. zv. *hraniční čára*, kterou vidíme v dalekohledu jako rozhraní mezi parcielní a totální reflexí.

Odvodíme teď Potierovu relaci.

J je reciproká plocha k *Fresnelovu ellipsoidu*. Čili: *úpatnicová plocha k J je inversní plochou k Fresn. ellipsoidu.*

Jsou-li x_0, y_0, z_0 souřad. bodu na J, dostanu příslušný bod úpatnicové plochy (x_1, y_1, z_1) jako patu kolmice spuštěné s počátku na rovinu tečnou k J v bodě (x_0, y_0, z_0). Délka této kolmice patrně bude

$$R = \frac{x_0 J'_{x_0} + y_0 J'_{y_0} + z_0 J'_{z_0}}{\sqrt{J'^2_{x_0} + J'^2_{y_0} + J'^2_{z_0}}} = \frac{2}{\sqrt{J'^2_{x_0} + J'^2_{y_0} + J'^2_{z_0}}} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Pro bod (x_1, y_1, z_1) bude:

$$x_1 = R \frac{J'_{x_0}}{\sqrt{J'^2_{x_0} + J'^2_{y_0} + J'^2_{z_0}}} = \frac{2\, J'_{x_0}}{J'^2_{x_0} + J'^2_{y_0} + J'^2_{z_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22_1)$$

Obdobně pro y_1, z_1.

Bod na ploše inversní k této úpatnicové měj souřadnice x, y, z. Pak bude:

$$x = \frac{x_1}{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2} = \frac{1}{2} J'_{x_0}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23_1)$$

Značme nyní bod na J: ξ, η, ζ, na *Fresnel. ellipsoidu* X, Y, Z. Platí tedy:

$$X = \tfrac{1}{2} J'_\xi, \quad Y = \tfrac{1}{2} J'_\eta, \quad Z = \tfrac{1}{2} J'_\zeta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Odvodím ještě rovnici pro $tg\, s$, kde s značí úhel vlnové normály s příslušným paprskem.

Patrno, že to bude úhel mezi průvodiči k sobě příslušných bodů na J a na *Fresnel. ellipsoidu.*

Tedy

$$\cos s = \frac{\xi X + \eta Y + \xi Z}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \,.\, \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

po dosazení za X, Y, Z a použití vztahu $n^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ bude:

$$cos\, s = \frac{2}{n \sqrt{J_\xi'^2 + J_\eta'^2 + J_\zeta'^2}} \, . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25')$$

Zavedeme nyní polární souřadnice pro body na J vztahy:

$$\xi = n\, cos\, \varphi\, sin\, \alpha, \quad \eta = -\, n\, cos\, \alpha, \quad \zeta = -\, n\, sin\, \varphi\, sin\, \alpha. \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Dalo by se snadno ukázati, že úhel α, je-li ξ, η, ζ jeden z vrcholů průsečné ellipsy, je *polarisační azimut* příslušné vlny, t. j. úhel, který svírá rovina polarisační s rovinou $X'\,Z'$ a čítáme jej kladně ve směru kladné osy Y'.*)

Určíme nyní *tg s*:

Patrně

$$tg^2\, s = \frac{n^2\, (J_\xi'^2 + J_\eta'^2 + J_\zeta'^2) - 4}{4} \, . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Čitatele této rovnice jednoduše upravíme pomocí rovnic pro souřadnice vrcholů průsečné ellipsy pro náš případ, kdy

$$\nu_1 = sin\, \varphi, \quad \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = cos\, \varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Rovnice (*9*) budou znít pak:

$$\begin{aligned} &\frac{\xi}{n} - \frac{n}{2} J_\xi' + \frac{n}{2}\, sin\, \varphi\, (sin\, \varphi \,.\, J_\xi' + cos\, \varphi \,.\, J_\zeta') = 0 \\ &\frac{\eta}{n} - \frac{n}{2} J_\eta' = 0 \\ &\frac{\zeta}{n} - \frac{n}{2} J_\zeta' + \frac{n}{2}\, cos\, \varphi\, (sin\, \varphi \,.\, J_\xi' + cos\, \varphi \,.\, J_\zeta') = 0. \end{aligned} \qquad (29)$$

Z těchto rovnic plyne:

$$J_\eta' = \frac{2\, \eta}{n^2} = -\, \frac{2\, cos\, \alpha}{n} \, . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29_2)$$

Z třetí rovnice pak po úpravě

$$J_\zeta' = J_\xi'\, cotg\, \varphi - \frac{2\, sin\, \alpha}{n\, sin\, \varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29_3)$$

Pomocí toho po úpravě dostaneme:

$$J_\xi'^{\,2} + J_\eta'^{\,2} + J_\zeta'^{\,2} = \frac{1}{sin^2\, \varphi} \left(J_\xi' - \frac{2\, sin\, \alpha\, cos\, \varphi}{n} \right)^2 + \frac{4}{n^2} \quad \ldots \quad (30)$$

Takže

$$tg^2\, s = \frac{n^2}{4\, sin^2\, \varphi} \left(J_\xi' - \frac{2\, sin\, \alpha\, cos\, \varphi}{n} \right)^2,$$

---

*) Viz Kaemmerer, Ueber d. Refl. u. Brechung d. Lichtes etc., p. 37 a n.

a vyjádříme-li J'_ξ pomocí rovnic (*26*), bude konečně:

$$\pm\, tg\, s = \frac{(a_{11} - \mathfrak{q}^2)\, sin\, \alpha\, cos\, \varphi - a_{12}\, cos\, \alpha - a_{13}\, sin\, \alpha\, sin\, \varphi}{\mathfrak{q}^2\, sin\, \varphi} \quad \ldots (31)$$

Z rovnic (*29*) určíme J_ξ', J_η', J_ζ' pomocí nových proměnných: α, φ, n (resp. $\mathfrak{q}$) a s:

$$\left.\begin{aligned} J'_\xi &= 2\, \mathfrak{q}\, (sin\, \alpha\, cos\, \varphi \pm sin\, \varphi\, tg\, s) \\ J'_\eta &= -\, 2\, \mathfrak{q}\, cos\, \alpha \\ J'_\zeta &= 2\, \mathfrak{q}\, (-\, sin\, \alpha\, sin\, \varphi \pm cos\, \varphi\, tg\, s) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Potierova relace je analytický vztah mezi souřadnicemi dvou párů sobě odpovídajících bodů na *Fresnelově ellipsoidu* a na J. Spočívá na Euler. větě o homogenních funkcích a zní:

$$\xi_1 X_2 + \eta_1 Y_2 + \zeta_1 Z_2 = \xi_2 X_1 + \eta_2 Y_1 + \zeta_2 Z_1, \quad \ldots\ldots (33)$$

kde ξ, η, ζ značí bod na J, X, Y, Z bod na *Fresn. ellipsoidu.*

X_1 značí — vzhledem k dříve odvozeným vztahům mezi X a ξ, η, ζ:

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J}{\partial \xi}\right)_1,$$

t. j. po derivaci nutno dosaditi za ξ, η, ζ resp. ξ_1, η_1, ζ_1. Obdobně X_2, $Y_{1,2}$, $Z_{1,2}$.

Vyjádříme-li všecky proměnné pomocí $\mathfrak{q}$, α, φ, dostaneme Potierovu relaci ve tvaru:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{q}_1{}^2 - \mathfrak{q}_2{}^2)\, [sin\, \alpha_1\, sin\, \alpha_2\, cos\, (\varphi_1 - \varphi_2) + cos\, \alpha_1\, cos\, \alpha_2] \pm \\ \pm\, [\mathfrak{q}_1{}^2\, tg\, s_1\, sin\, \alpha_2 + \mathfrak{q}_2{}^2\, tg\, s_2\, sin\, \alpha_1)]\, sin\, (\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \end{aligned} \quad \ldots (34)$$

Tento vztah platí pro dvě libovolné vlny v krystalu.

Dopadá-li na krystal vlna rychlostí v a pod $\sphericalangle\, i$, platí, jak známo:

$$\frac{sin\, i}{v} = \frac{sin\, \varphi_1}{\mathfrak{q}_1} = \frac{sin\, \varphi_2}{\mathfrak{q}_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

kde $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ jsou rychlosti vln v krystalu lomených do tohoto pod úhly φ_1, resp. φ_2.

Použijeme-li tohoto vztahu v rovnici (*34*), dostaneme po jednoduché úpravě:

$$\begin{aligned} sin\, (\varphi_1 + \varphi_2)\, [sin\, \alpha_1\, sin\, \alpha_2\, cos\, (\varphi_1 - \varphi_2) + cos\, \alpha_1\, cos\, \alpha_2] \pm \\ \pm\, sin^2\, \varphi_1\, tg\, s_1\, sin\, \alpha_2 \pm sin^2\, \varphi_2\, tg\, s_2\, sin\, \alpha_1 = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Je to specielní tvar rovnice Potierovy pro dvě vlny vzniklé z jedné dopadající (jinak: pro dvě vlny, jichž úhly φ_1, φ_2 jsou kořeny známé Kirchhoffovy rovnice).

Vrátíme se k diskusi rovnice průsečné křivky C (*19*).

Z rovnice patrno, že křivka je symetrická vzhledem k počátku. Určíme-li z rovnice

$$n^2 = \frac{a_{22} + A\, cos^2 \varphi \pm \sqrt{D}}{2\,(a_{22}\, A - B^2)\, cos^2 \varphi}\,, \tag{19'}$$

kde diskriminant se dá psáti ve tvaru:

$$D = (a_{22} - A\, cos^2 \varphi)^2 + 4\, B^2\, cos^2 \varphi, \tag{37}$$

je patrno, že křivka má dvě větve podle znamení u $\sqrt{D}$. Pokud je $D \neq 0$ pro všechna φ od $0 - 2\,\pi$, patří k témuž φ dvě různá $n_1 \neq n_2$ — křivka se rozpadá na dva ovály, z nichž jeden je celý uvnitř druhého.

Než přistoupíme k určování extrémů a dvojných bodů, vyjádříme funkce A resp. B, D pomocí $\mathfrak{q}$, α, φ, s z rovnic (*32*). Tak bude:

$$A = \frac{\mathfrak{q}^2}{cos^2 \varphi} + (a_{22} - \mathfrak{q}^2)\, \frac{cotg^2 \alpha}{cos^2 \varphi} \tag{38}$$

$$B = (a_{22} - \mathfrak{q}^2)\, \frac{cotg\, \alpha}{cos\, \varphi} \tag{39}$$

$$+ \sqrt{D} = \frac{a_{22} - \mathfrak{q}^2}{sin^2 \alpha} \tag{40}$$

Derivace podle φ budou:

$$\left.\begin{aligned} A' &= - \frac{2}{sin\, \alpha\, cos^3 \varphi}\, [\mathfrak{q}^2\, (- sin\, \alpha\, sin\, \varphi \pm cos\, \varphi\, tg\, s) + a_{23}\, cos\, \alpha] \\ B' &= - \frac{a_{23}}{cos^2 \varphi}\,. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Extremy průvodiče n musí hovět rovnicím:

$$C \equiv n^4\, \Phi_1 - n^2\, \Phi_2 + 1 = 0 \tag{19}$$

$$n^2\, \Phi_1' - \Phi_2' = 0, \tag{43}$$

pokud bude $2\, n^2\, \Phi_1 - \Phi_2 = \sqrt{D} \neq 0$, neboť

$$\frac{n'}{n} = - \frac{n^2\, \Phi_1' - \Phi_2'}{2\,(2\, n^2\, \Phi_1 - \Phi_2)}\,. \tag{44}$$

Řešení rovnic (*19*) a (*43*) se zjednoduší tím, že známe *3* extrémy, t. j.

$$n_1 = \frac{1}{a}\,,\quad n_2 = \frac{1}{b}\,,\quad n_3 = \frac{1}{c}\,. \tag{45}$$

Jim příslušné úhly φ budou pak dány:

$$cotg\, \varphi_1 = - \frac{p_1}{r_1}\,,\quad cotg\, \varphi_2 = - \frac{p_2}{r_2}\,,\quad cotg\, \varphi_3 = - \frac{p_3}{r_3}\,. \tag{46}$$

Pro čtvrtý extrem dostáváme:

$$n_4 = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\,,\quad cotg\, \varphi_4 = \frac{a_{23}}{a_{12}}\,. \qquad \ldots\ldots\ldots (45_4),\ (46_4)$$

Předpokládáme-li stále $a > b > c$, je — pokud $D \neq 0$ — $n_1 = \dfrac{1}{a}$

minimem na vnitřní křivce, $n_3 = \frac{1}{c}$ pak maximem na vnější. O druhých dvou extremech se nedá rozhodnouti, na které křivce leží.

Je-li $b^2 > a_{22}$, t. j. když

$$\frac{q_1^2}{q_3^2} < \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

jest hodnota $n_2 = \frac{1}{b}$ maximem *vnitřní křivky* a pak a_{22} jest minimem *vnější křivky*. A naopak. — Uvažujme případ, kdy vedle rovnic (*19*), (*43*) platí současně

$$D = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Patrně jde pak o dvojné body.

Aby bylo

$$\sqrt{D} = \frac{a_{22} - \mathrm{q}^2}{\sin^2 \alpha} = 0,$$

musí být $a_{22} - \mathrm{q}^2 = 0$ a současně $\alpha \neq 0$.

Z rovnice (*29*$_2$) plyne:

$$\mathrm{q}^2\, \eta = a_{12}\, \xi + a_{22}\, \eta + a_{23}\, \zeta = \xi\, (a_{12} - a_{23}\, tg\, \varphi) + a_{22}\, \eta.$$

Čili:

$$(a_{22} - \mathrm{q}^2)\, \eta = -B\, \xi,$$

a ježto

$$\eta = -\frac{\xi\, cotg\, \alpha}{\cos \varphi},$$

bude

$$cotg\, \alpha = \frac{B \cos \varphi}{a_{22} - \mathrm{q}^2} = \frac{B \cos \varphi}{a_{22} - \dfrac{2\,(a_{22}\, A - B^2) \cos^2 \varphi}{a_{22} + A \cos^2 \varphi \pm \sqrt{D}}} =$$

$$= \frac{2\, B \cos \varphi}{a_{22} - A \cos^2 \varphi \pm \sqrt{D}} = -\frac{a_{22} - A \cos^2 \varphi \mp \sqrt{D}}{2\, B \cos \varphi} \quad \ldots \quad (49)$$

Z této rovnice je přímo patrno, že dvě vlny v krystalu postupující týmž směrem jsou k sobě kolmo polarisovány $\left(cotg\, \alpha_1 = -\frac{1}{cotg\, \alpha_2}\right)$. — V případě čtvrtého extremu, t. j. pro $n_4 = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}$, $cotg\, \varphi_4 = \frac{a_{23}}{a_{12}}$, jest jeden polar. azimut α vždy $= 0$, vyjma případ, kdy mimo $cotg\, \varphi_4 = \frac{a_{23}}{a_{12}}$, resp. $\mathrm{q}^2 = a_{22}$, platí ještě:

$$a_{22} - A \cos^2 \varphi = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Rovnice (*50*) jest kvadratická pro $cotg\, \varphi_4$ a kořeny její určují polohu dvojných bodů. Patrno, že — existují-li ovšem — dvojné body budou vždy *dva* resp. *jeden dvojnásobný* (*bod sebedotyku*) — pro φ v intervalu od 0 do π. Tedy pro celou křivku budou existovat obecně *4* dvojné body; to znamená — ježto křivka čtvrtého stupně může míti nejvýše *3* dvojné body —, že v případě, kdy bude míti C dvojný bod, bude se rozpadat na dvě kuželosečky.

$cotg\ \varphi_4$ má však v případě dvojných bodů vyhovovati dvěma rovnicím: (46_4) a (*50*). Proto musí být:

$$a_{23}{}^2 (a_{11} - a_{22}) - 2\, a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{12}{}^2 (a_{33} - a_{22}) = 0 \ \ldots\ldots \quad (51)$$

nebo ve tvaru determinantu psáno:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - a_{22}\ , & a_{12}\ , & a_{13} \\ a_{12}\ , & 0\ , & a_{23} \\ a_{13}\ , & a_{23}\ , & a_{33} - a_{22} \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (51')$$

V theorii ploch *druhého* stupně vystupuje podobný determinant, proto se jím nebudu podrobněji zabývati, uvedu jen výsledky.

Rovnice tato je splněna pro *tři* hodnoty neznámé a_{22} a sice:

1. $a_{22} = a^2$, z čehož plyne $q_1 = 1,\ q_2 = q_3 = 0 \ \ldots\ \ (52_1)$
2. $a_{22} = b^2$, z čehož plyne *a*) $q_1 = q_3 = 0,\ q_2 = 1 \ \ldots\ (52_{2a})$
   b) $\dfrac{q_1{}^2}{q_3{}^2} = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2} \ \ldots\ (52_{2b})$
3. $a_{22} = c^2$, z čehož plyne $q_1 = q_2 = 0,\ q_3 = 1 \ \ldots\ \ (52_3)$

Tedy jen když jsou splněny *rovnice* (*52*), má křivka C dvojné body.

Odvoďme nyní Kirchhoffovu rovnici.

Přímka kolmá k ose X' protíná C obecně ve *4* bodech. Je-li rovnice této přímky

$$n\ sin\ \varphi = \frac{1}{h}\,, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

a dosadíme-li za $n = \dfrac{1}{h\ sin\ \varphi}$ do rovnice $C \equiv 0$, pak obdržíme *Kirchhoffovu rovnici* pro úhly φ příslušné oněm průsečíkům.

Neznámou $cotg\ \varphi$ značím u, A_{ik} jsou subdeterminanty příslušné k elementu a_{ik} v determ. $|\, a_{ik}\,|$, a k vůli stručnosti píši $a_{11} + a_{22} = \alpha_{33}$, $a_{33} + a_{22} = \alpha_{11}$.

Pak ona rovnice zní:

$$A_{33}\, u^4 + 2\, A_{13}\, u^3 + (A_{11} + A_{33} - \alpha_{33}\, h^2)\, u^2 + 2\, (A_{13} + a_{13}\, h^2)\, u + \\ + h^4 - \alpha_{11}\, h^2 + A_{11} = 0. \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

V případě totální reflexe má tato rovnice *1* kořen dvojnásobný. Tyto kořeny dvojnásobné hoví rovnici *šestého* stupně v u, kterou obdržíme eliminací h z rovnice Kirchhoffovy a její derivace dle u. Jak dříve ukázáno, ve zvláštním případě, kdy bude míti C dvojné body, bude ona resultanta splněna též pro souřadnice dvojných bodů a dá se tedy její stupeň snížiti. O fysikálním významu rovnice Kirchhoffovy nepokládám za nutno se šířiti. Poukazuji na př. na knihu Pockelsovu: „*Lehrbuch der Kristalloptik*“, kde je uvedena také Mac-Cullaghova geometrická interpretace této rovnice.

Uvažujme jiným způsobem případ, kdy rovnice Kirchhoffova má dvojnásobný kořen. Pak přímka kolmá na osu X' musí se křivky C patrně dotýkati. Podmínka dotyku v polár. souřadnicích zní:

$$-\mathit{cotg}\,\varphi = \frac{n'}{n} = -\frac{n^2\,\Phi_1' - \Phi_2'}{2\,(2\,n^2\,\Phi_1 - \Phi_2)} \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

Vyjádřeme nyní všecky veličiny pomocí proměnných: $\mathfrak{q}$, φ, α, s. Podrobných výpočtů, které nejsou tak obtížné, neuvádím. Obdržíme:

$$\Phi_1 = \mathfrak{q}^2\,[a_{22} + (a_{22} - \mathfrak{q}^2)\,\mathit{cotg}^2\,\alpha] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

$$\Phi_1' = -\frac{2\,\mathfrak{q}^2}{\cos\varphi}\left[(a_{22} - \mathfrak{q}^2)\,\sin\varphi\,\mathit{cotg}^2\,\alpha + a_{23}\,\mathit{cotg}\,\alpha \pm a_{22}\,\frac{\cos\varphi\,\mathit{tg}\,s}{\sin\alpha}\right] \quad (56')$$

$$\Phi_2 = a_{22} + \mathfrak{q}^2 + (a_{22} - \mathfrak{q}^2)\,\mathit{cotg}^2\,\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

$$\Phi_2' = -\frac{2}{\cos\varphi}\left[(a_{22} - \mathfrak{q}^2)\,\sin\varphi\,\mathit{cotg}^2\,\alpha + a_{23}\,\mathit{cotg}\,\alpha \pm \mathfrak{q}^2\,\frac{\cos\varphi\,\mathit{tg}\,s}{\sin\alpha}\right]. \quad (57')$$

A dále:

$$n^2\,\Phi_1' - \Phi_2' = \mp\, 2\,(a_{22} - \mathfrak{q}^2)\,\frac{\mathit{tg}\,s}{\sin\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55_1)$$

$$2\,n^2\,\Phi_1 - \Phi_2 = \pm\sqrt{D} = \frac{a_{22} - \mathfrak{q}^2}{\sin^2\alpha}\,. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55_2)$$

Takže konečně po krácení výrazem $\frac{a_{22} - \mathfrak{q}^2}{\sin\alpha}$ (čímž vyloučíme dvojné body), bude:

$$\mathit{cotg}\,\overline{\varphi} = \mp\,\sin\overline{\alpha}\,\mathit{tg}\,\overline{s}\,, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

což je specielní případ Potierovy relace. Patrno, že platí pro všecky body křivek C, které odpovídají totální reflexi, vyjímaje body dvojné.

K tomuto specielnímu tvaru rovnice Potierovy bychom dospěli také přímým limitováním původního tvaru (rovnice (*36*)), t. j. kdybychom nechali blížiti se φ_2 k φ_1 a tedy α_2 k α_1 a s_2 k s_1. Pak by bylo

$$\sin 2\,\varphi_1 \pm 2\,\sin^2\varphi_1\,\mathit{tg}\,s_1\,\sin\alpha_1 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58')$$

což po rozvedení $\sin 2\,\varphi_1$ a krácení $2\,\sin\varphi_1$ přejde zase v (*58*). Toto jednoduché odvození, myslím, by však nebylo zcela oprávněno.

Užití Boškovićovy transformace na rotační plochy 2. stupně.

Napsal

Dr. **Juraj Majcen** (Záhřeb).

(S 1 obrazcem.)

(Předloženo dne 22. října 1922.)

Před krátkým časem obstaral jsem vydání[1]) latinsky psaného díla: „Sectionum conicarum elementa“ (1754) R. J. Boškoviće, (1711—1787) známého dubrovnického mathematika a astronoma.[2])

V § 140 a n. uvedeného díla zabývá se Bošković zvláštní transformací, které užívá k řešení mnohých problemů z theorie kuželoseček, a o které zde budiž nejprve stručně pojednáno. Leží totiž na snadě otázka, zda tato transformace může býti přenesena do prostoru. Tomu tak vskutku jest a budiž v předložené poznámce ukázáno, jaký má význam řečená transformace pro určité rotační plochy. Jde totiž o ty rotační plochy 2. stupně, které mají ohniska na rotační ose, tedy o rotační bifokální ellipsoid, dvojplochý hyperboloid a paraboloid.

Zvláštní charakteristikou Boškovićovy transformace jest, že při ní přicházejí zvláště k výrazu relace fokální. Pojednáme-li o řečených třech plochách rotačních pomocí kollineace s plochou kulovou, tu vztahy ohniskové se neobjeví, ježto s kollineací nemohou býti uvedeny v souvislost. Budiž zde ještě podotknuto, že z hlediska projektivného můžeme považovati Boškovićovu transformaci za obecnější než zvláštní kollineaci. Nechci však zde povahu této transformace studovati, nýbrž Boškovićovo původní zobrazení[3]) užíti na uvedené tři druhy rotačních ploch.

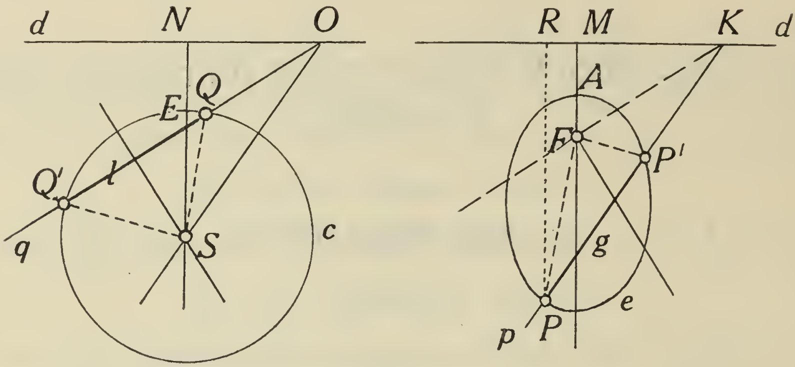
---

[1]) „Rad“ jihoslovanské akademie věd a umění, sv. 225 (1921).

[2]) Srovnej: A. Seydler, O životě a působení R. J. Boškoviće, Čas. pro pěstování math. a fysiky, XVI., 1877, str. 267.

[3]) Mimo jiné užívá tohoto zobrazení Ch. Taylor: An introduction to the ancient and modern Geometry of Conics, Cambridge, 1881.

1. Je-li F pevný bod a d pevná přímka roviny, můžeme vysloviti známou větu Pappovu:[4]) Všechny body P roviny, pro něž jest poměr vzdáleností od pevného bodu F a od pevné přímky d konstantní (k), leží na kuželosečce, pro niž jest bod F ohniskem a přímka d příslušnou řídící přímkou. Kuželosečka jest ellipsou, parabolou nebo hyperbolou, dle toho, je-li $k \overset{<}{\underset{>}{=}} 1$.



Obr. 1.

Buď dána kuželosečka e ohniskem F, řídící přímkou d a bodem A, takže jest $\overline{AF} : \overline{AM} = k$ (viz obr.). V rovině zvolme nyní kružnici c tak, že poměr jejího poloměru $\overline{SE}$ ku vzdálenosti $\overline{SN} \perp d$ rovná se hodnotě onoho „stálého poměru"[5]) k. Pak lze přiřaditi každému bodu Q kružnice c jednoznačně jediný bod P kuželosečky e a opačně.

Veďme bodem Q libovolnou přímku q, která seče přímku d v bodě O, spojme potom $\overline{OS}$ a QS, načež obdržíme korrespondenční bod P kuželosečky e tím, že sestrojíme $FK \parallel QO$, bodem K přímku $p \parallel SO$, načež $FP \parallel QS$. Že bod P leží na kuželosečce e, dokázal Bošković takto: Je-li $PR \perp d$, jest $\triangle PRK \sim \triangle SNO$, $\triangle PFK \sim \triangle SQO$; odtud plyne: $\overline{PK} : \overline{PR} = \overline{SO} : \overline{SN}$, $\overline{PF} : \overline{PK} = \overline{SQ} : \overline{SO}$, takže jest $\overline{PF} : \overline{PR} = \overline{SQ} : \overline{SN}$. Vzhledem k $\overline{SQ} = \overline{SE}$ máme $\overline{SQ} : \overline{SN} = k$ a tudíž také $\overline{PF} : \overline{PR} = k$, z čehož plyne, že P leží na dané kuželosečce e.

Bodem Q libovolně vedená přímka q seče kružnici c ještě v dalším bodě Q'. Touž cestou dokážeme, že transformací přejde bod Q' v ten bod P' přímky p, který obdržíme, sestrojíme-li $FP' \parallel Q'S$.

Velikost a polohu kružnice c můžeme zvoliti libovolně, jen když je splněna relace $\overline{SE} : \overline{SN} = k$.

Zvolíme-li si libovolně přímku p, obdržíme oba její průsečíky P, P' s kuželosečkou e, aniž bychom tuto rýsovali, přímo dle předchozího takto:

---

[4]) Na této jediné větě založil Bošković svou obecnou theorii kuželoseček v díle svrchu uvedeném.

[5]) U Boškoviće: ratio determinans.

sestrojíme $S O \parallel p$, $q \parallel K F$, $F P \parallel Q S$, $F P' \parallel Q' S$, čímž jsou určeny body P a P'.

2. Vezměme nyní na místo kuželosečky e, ohniska F a řídící přímky d rotační plochu druhého stupně ε o ohnisku F na rotační ose a k němu příslušící řídící rovinu δ.[6]) Rotační plochu můžeme potom definovati takto: Geometrickým místem všech bodů P v prostoru, pro něž jest poměr vzdáleností od pevného bodu F a od pevné roviny δ konstantní (k), jest rotační plocha 2. stupně ε, pro niž jest bod F ohniskem a rovina δ příslušnou rovinou řídící. Rotační plocha jest bifokálním ellipsoidem, paraboloidem nebo dvojplochým hyperboloidem, dle toho, je-li $k \lesseqgtr 1$.

Na místo kružnice c vezměme v úvahu plochu kulovou γ, pro niž nechť opět platí vztah: $\overline{SE} : \overline{SN} = k$.

Právě tak jako dříve pro přímku p a kuželosečku e, ležící v téže rovině, můžeme nyní řešiti úlohu, nalézti průsečíky přímky p s plochou rotační ε, při čemž jest lhostejno, zda přímka p osu rotační plochy seče, nebo jest s ní mimoběžná.[7]) K tomuto úkolu užijeme plochy kulové γ. Daná přímka p seče řídící rovinu δ v bodě K' a přímka $S O' \parallel p$, vedená bodem S, seče tuto rovinu v bodě O'. Veďme dále bodem O' přímku q rovnoběžně ku $F K'$. Roviny $(F p)$ a $(S q)$ jsou rovnoběžné, takže můžeme bodem F sestrojiti rovnoběžky $F P \parallel S Q$, $F P' \parallel S Q'$, které přímku p sečou v bodech P a P'.

Poněvadž i zde, jako dříve v útvaru rovinném, máme podobné trojúhelníky $P R' K'$, $S N' O'$ a $P F K'$, $S Q O'$, máme pro bod P opět relaci: $\overline{PF} : \overline{PR'} = k$, takže bod P jest bodem svrchu definované rotační plochy ε. Totéž platí pro druhý bod P'.

3. V soustavě dané rotační plochy ε položme přímkou p rovinu π která seče řídící rovinu δ v přímce h'. V rovině π vytkněme osnovu přímek p_1, p_2, ... rovnoběžných ku přímce p. Jejich průsečíky P_1^0, P_2^0, ... s δ leží na h'. Spojnice $F P_1^0$, $F P_2^0$, ... tvoří v rovině $(F h')$ svazek paprskový. Roviny určené bodem F a přímkami p_2 tvoří svazek rovin, jehož osa f prochází bodem F a jest rovnoběžná s přímkami osnovy p_2. Chceme-li určiti průsečíky P_1, P_1'; P_2, P_2'; ... přímek p_1, p_2, ... s rotační plochou, budeme postupovati tak, jak bylo v čl. 2. vyloženo.

Středem S Boškovićovy plochy kulové γ vedeme rovnoběžku $S O'$ ku přímkám p, p_1, p_2, ... a průsečíkem O' této přímky s δ vedeme paprsky $q \parallel F P^0$, $q_1 \parallel F P_1^0$, $q_2 \parallel F P_2^0$, ... Tyto paprsky q leží v rovině λ, která jest rovnoběžná s rovinou $(F h')$ a která seče řídící rovinu δ v přímce h.

---

[6]) Připojený rovinný obrazec může nám býti pomůckou k znázornění analogických vztahů prostorových.

[7]) V článku „Boškovićeva kugla i kružnica u deskriptivnoj geometriji“ (Nast. vjesnik, XXX, 1921) ukázal jsem, jak může býti převedena tato úloha prostorová v rovinnou.

Rovina λ seče plochu kulovou γ v kružnici l, na níž leží průsečíky Q, Q'; $Q_1, Q_1', \dots$ paprsků $q, q_1, \dots$ s plochou kulovou. Rovina $(S\,h)$ jest rovnoběžná k rovině π.

Poněvadž v soustavě plochy kulové jest rovina $(S\,q_i)$ rovnoběžná k rovině $(F\,p_i)$ v soustavě rotační plochy ε, obdržíme průsečíky přímek p_2 s plochou ε, vedeme-li $F\,P_i \parallel S\,Q_i$ a $F\,P_i' \parallel S\,Q_i'$.

Všechny průsečíky $P, P'; P_1, P_1'; P_2, P_2'; \dots$ leží na kuželosečce, v níž seče rovina π plochu ε. Tato kuželosečka transformuje se tudíž v kružnici l, t. j. v průsečnici roviny λ s plochou kulovou γ.

Protíná-li tudíž rovina π, která seče řídící rovinu δ v přímce h', rotační plochu ε v kuželosečce $g \equiv (\varepsilon\,\pi)$, obdržíme transformovanou kružnici l na ploše kulové γ tím, že položíme středem S rovinu $(S\,h)$ rovnoběžnou ku π, načež určíme rovinu $(F\,h')$, kde $h' \equiv (\delta\,\pi)$, a posléze přímkou h položíme rovinu $\lambda \parallel (F\,h')$. Tato rovina λ seče plochu kulovou γ v hledané kružnici l, která odpovídá kuželosečce g.

Nastoupíme-li opačnou cestu, t. j. zvolíme-li na λ kružnici l, obdržíme v soustavě plochy ε rovinu π, která seče plochu ε v kuželosečce g. Kružnice l transformuje se tudíž vždy na ε v rovinnou křivku g.

4. Průsecíky $P, P'; P_1, P_1'; P_2, P_2'; \dots$ na kuželosečce g obdržíme z průsečíků $Q, Q'; Q_1, Q_1'; Q_2, Q_2'; \dots$ tím, že vedeme bodem F rovnoběžky $F\,P_i$, $F\,P_i'$ k příslušným spojnicím $S\,Q_i$, $S\,Q_i'$. Spojnice bodu S s body Q_i kružnice $l \equiv (\lambda\,\gamma)$ tvoří vždy rotační kužel (S, l). Paprsky $F\,P_i$ vedené bodem F rovnoběžně k povrchovým přímkám tohoto kužele vytvoří tudíž též rotační plochu kuželovou. Ježto to platí jak pro přechod od kuželosečky g k příslušné kružnici l, tak i opačně pro přechod od l ku transformované kuželosečce g, můžeme vysloviti větu:

Každá kuželosečka (*g*) *rotační plochy druhého stupně* ε (*s ohnisky na ose rotační*), *promítá se z ohniska této plochy rotačním kuželem.*

Každý rotační kužel druhého stupně, jehož vrchol jest ohniskem rotační plochy 2. stupně (*s ohnisky na ose rotační*), *seče tuto plochu ve dvou rovinných křivkách 2. stupně.*

5. V soustavě plochy kulové zvolme roviny λ, které jsou navzájem rovnoběžné; příslušné kužele (S, l) mají společnou rotační osu. Pak obdržíme v soustavě rotační plochy ε kuželosečky g, které odpovídají parallelním kruhovým řezům l. Tyto kuželosečky g promítají se z ohniska F souosými rotačními kužely; roviny kuželoseček g protínají řídící rovinu δ v téže přímce h', neboť $(F\,h')$ jest rovina vedená bodem F rovnoběžně k svazku rovin λ. Osa těchto rotačních kuželů jest kolmá k rovině $(F\,h')$.

Máme-li tedy svazek rotačních kuželů o společné ose, takže rovina $\mu \equiv (F\,h')$, vedená společným vrcholem F těchto kuželů kolmo ke společné rotační ose, jest degenerovaným kuželem tohoto svazku (dvojnou rovinou), a přiřadíme-li tomuto svazku projektivně involutorní svazek rovin, jehož jednou dvojnou rovinou jest rovina μ, pak protínají sdružené roviny této rovinné involuce příslušný kužel projektivního svazku v kuželosečkách g, které leží na rotační ploše druhého stupně. Společný vrchol kuželů F jest ohniskem a druhá dvojná rovina v involučním svazku rovin jest příslušnou řídící rovinou δ této rotační plochy. Tomu kuželi ve svazku, který degeneroval ve spolecnou rotační osu, odpovídají v involučním svazku rovin dvě roviny, které se vytvořené rotační plochy ε dotýkají a sice v bodech, v nichž tyto roviny sečou tuto rotační osu.

Pokud není pro vytvořenou rotační plochu ε žádné bližší určení co do polohy a druhu, může býti druhá dvojná rovina δ involučního svazku rovin, jehož osa h' jest kdekoliv v rovině $\mu \equiv (F\, h')$, zvolena libovolně. Abychom určili projektivní přiřazení svazku kuželů s involučním svazkem rovin, stačí potom přiřaditi jednomu kuželi jedinou rovinu ve svazku. Ostatní odpovídající si páry jsou tím již určeny.

Oba poznatky můžeme dokázati pomocí koule γ transformací Boškovićovou. Přiřadíme-li totiž kuželi (F, g) svazku rovinu π svazku rovinného, tu odpovídá oběma, jak jsme v předchozím seznali, v soustavě plochy kulové kužel $(S\, l)$ a rovina λ, která obsahuje kružnici l. Tím je plocha kulová γ určena. Řídící rovina δ může býti vedena zcela libovolně přímkou h', t. j. průsečnicí roviny π s rovinou vedenou bodem F kolmo ke společné ose kuželů. V soustavě plochy kulové γ položíme přímkou h rovinu rovnoběžnou s δ. Teprve touto volbou jest určen „konstantní poměr“ pro všechny body vytvořené plochy rotační, neboť také body kuželosečky g budou míti tento konstantní dělící poměr.

6. Z libovolné volby jednoho rotačního kužele a jedné roviny involučního svazku rovin, jakož i z volby řídící roviny δ, která prochází přímkou h', ležící v rovině vedené vrcholem kužele kolmo k jeho ose, plyne vztah, který může býti vyjádřen bez ohledu na rotační plochu 2. stupně ε jako takovou.

Ve smyslu Boškovićových úvah zůstává totiž poměr $\overline{PF} : \overline{PR}$ také tehdy pro všechny body rotační plochy konstantní, když vzdálenosti bodů P od řídící roviny δ měříme v pevném směru šikmém a ne jen ve směru orthogonálném.

Zvolme tudíž rotační kužel, položme vrcholem jeho F rovinu kolmo k jeho ose a zvolme na této rovině libovolně přímku h'. Libovolná rovina π, položená přímkou h', seče tento kužel v kuželosečce g. Kuželosečkou g položený normálný nebo šikmý válec budiž proťat rovinou δ, která prochází přímkou h'. Libovolným bodem P kuželosečky g veďme povrchovou přímku kužele až k vrcholu F a povrchovou přímku válce až k rovině δ. Délky obou těchto povrchových přímek jsou pro všechny body kuželosečky g v konstantním poměru, ať jakkoliv zvolíme roviny π, δ a směr povrchových přímek válce.

Poznámka tato sleduje cíl, v paměť uvésti historické vymoženosti a z nich co možná jednoduchou cestou vyvoditi poznatky sevšeobecňující. Ač docílené vztahy pro rotační plochy druhého stupně nemají velkých dosahů a byly v podstatě pomocí všeobecnějších method odvozeny, přece cesta, kterou jsme je získali, není bez zajímavosti i v oboru, kde nelze velkých nových poznatků očekávati.

TISKEM ALOISA WIESNERA V PRAZE,
KNIHTISKAŘE ČESKÉ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ A ČESKÉHO VYSOKÉHO UČENÍ
TECHNICKÉHO V PRAZE.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 058879708